

Модуль 1 «Теория множеств и высшая алгебра»

Дискретная математика, ИУ8, 2 курс, 3 семестр.

Лектор А.О.Иванов

Вопросы для подготовки к рубежному контролю

1. Как определяется объединение множеств?
2. Приведите свойства операция объединения множеств.
3. Как определяется пересечение множеств?
4. Приведите свойства операции пересечения множеств?
5. Как определяется разность множеств?
6. Приведите свойства операции нахождения разности множеств ?
7. Как определяется симметрическая разность множеств?
8. Приведите свойства операции нахождения симметрической разности множеств.
9. В чем заключается метод двух включений доказательства теоретико-множественных тождеств?
10. Приведите основные теоретико-множественные тождества для объединения, пересечения, дополнения множеств.
11. Приведите основные теоретико-множественные тождества для пересечения и симметрической разности множеств.
12. Что называют характеристической функцией множества?
13. В чем заключается метод характеристических функций доказательства теоретико-множественных тождеств?
14. Что называют декартовым произведением множеств?
15. Приведите свойства декартова произведения множеств.
16. Что называют отображением из множества A в множество B ?
17. Какое отображение называют инъективным?
18. Какое отображение называют сюръективным?
19. Какое отображение называют биективным?
20. Что такое композиция отображений?
21. Что такое обратимое отображение?
22. Что такое обратное отображение?
23. Теорема: отображение обратимо, тогда и только тогда, когда оно биективно.
24. Теорема: если отображение обратимо, то обратное к нему отображение единственно.
25. Что называют бинарным отношением на множестве?
26. Что называют n -арным отношением на множествах?
27. Какое бинарное отношение на множестве называют рефлексивным?
28. Какое бинарное отношение на множестве называют иррефлексивным?
29. Какое бинарное отношение на множестве называют симметричным?
30. Какое бинарное отношение на множестве называют антисимметричным?
31. Какое бинарное отношение на множестве называют транзитивным?
32. Какое бинарное отношение на множестве называют эквивалентностью?
33. Какое бинарное отношение на множестве называют порядком?
34. Что называют классом эквивалентности?
35. Что называют фактор-множеством по заданному отношению эквивалентности?
36. Что называют разбиением множества?
37. Сформулируйте теорему о связи между отношением эквивалентности и разбиением множества.
38. Какой порядок на множестве называют линейным?
39. Какой порядок на множестве называют частичным?
40. Какой элемент множества называют наибольшим?
41. Какой элемент множества называют наименьшим?
42. Какой элемент множества называют максимальным?

43. Какой элемент множества называют минимальным?
44. Что такое точная верхняя грань множества?
45. Что такое точная нижняя грань множества?
46. Сформулируйте утверждение о количестве наименьших элементов.
47. Сформулируйте утверждение о количестве наибольших элементов.
48. Что такое счетное множество?
49. Является ли счетным множество целых, рациональных, вещественных чисел. Ответ обосновать.
50. Теорема о мощности множества отображений непустого множества в двухэлементное множество.
51. Что называется бинарной алгебраической операцией на множестве.
52. Приведите примеры бинарных операций.
53. В каком случае бинарная операция называется ассоциативной?
54. В каком случае бинарная операция называется коммутативной?
55. В каком случае бинарная операция называется идемпотентной?
56. Какой элемент называется нейтральным элементом (единицей) относительно бинарной операции?
57. Какая алгебра называется полугруппой?
58. Какая алгебра называется моноидом?
59. Какой элемент называется обратным к заданному элементу относительно бинарной операции?
60. Сформулируйте и докажите утверждение о количестве нейтральных элементов.
61. Сформулируйте и докажите утверждение о количестве элементов, обратных к данному.
62. Какая алгебра называется группой?
63. Сформулируйте и докажите теорему об обратном к произведению элементов.
64. Сформулируйте и докажите теорему об обратном к обратному элементу.
65. Сформулируйте и докажите теорему о решении уравнений в группе.
66. Что такое подгруппа?
67. Что такое гомоморфизм?
68. Докажите, что ядро гомоморфизма является подгруппой.
69. Докажите что образ гомоморфизма является группой.
70. Что называют группой подстановок S_n ?
71. Теорема Кэли о представлении конечных групп в виде подгрупп групп перестановок.
72. Что называют аддитивной группой вычетов?
73. Что называют мультипликативной группой вычетов?
74. Сформулируйте определение целой степени в группе.
75. Какую группу называют циклической?
76. Какой элемент циклической группы называют образующим элементом.
77. Что называют порядком конечной группы?
78. Что называют порядком элемента?
79. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве порядка образующего элемента циклической группы (равенстве порядка образующего элемента циклической группы порядку группы).
80. Что называют смежным классом подгруппы по элементу.
81. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.
82. Сформулируйте и докажите свойство группы простого порядка.
83. Какая алгебра называется кольцом?
84. Какая алгебра называется коммутативным кольцом?
85. Какая алгебра называется кольцом вычетов.
86. Приведите аксиомы кольца.

87. Какая алгебра называется полем?
88. Приведите аксиомы поля.
89. Что называется областью целостности.
90. В каком случае кольцо вычетов является полем?
91. Как решается система линейных уравнений в поле вычетов?
92. Какую алгебру называют полукольцом?
93. Какое полукольцо называют идемпотентным?
94. Какое полукольцо называют коммутативным?
95. Приведите пример полукольца.
96. Приведите пример коммутативного полукольца.
97. Приведите пример идемпотентного полукольца.
98. Что называют естественным порядком идемпотентного полукольца.
99. Докажите, что в идемпотентном полукольце бинарное отношение \leq , заданное по правилу: $a \leq b \Leftrightarrow a+b=b$, является отношением порядка.
100. Сформулируйте и докажите теорему о точной верхней грани конечного подмножества идемпотентного полукольца.
101. Какое полукольцо называют замкнутым полукольцом.
102. Докажите замкнутость конечного идемпотентного полукольца.
103. Что называют итерацией элемента полукольца?
104. Сформулируйте определение индуктивного упорядоченного множества.
105. Какое отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое индуктивное упорядоченное множество называют непрерывным?
106. Какое отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое индуктивное упорядоченное множество называют монотонным?
107. Сформулируйте теорему о связи монотонности и непрерывности отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое индуктивное упорядоченное множество.
108. Что называют неподвижной точкой отображения?
109. Сформулируйте теорему о неподвижной точке отображения индуктивного упорядоченного множества в себя.
110. Докажите непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце.
111. Обоснуйте непрерывность линейного отображения замкнутого полукольца в себя.
112. Сформулируйте и докажите теорему о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.

Модуль 1 "Теория множеств и высшая алгебра"
курса "Дискретная математика", 2-й курс, 4 семестр, ИУ-8, 2012 г.

Задачи для подготовки к рубежному контролю

Теория множеств

1. Используя метод двух включений, для произвольных бинарных отношений ρ , τ и σ выяснить, справедливо ли тождество $(\rho \cup \sigma) \cup \tau = (\tau \cup \sigma) \cup \rho$.

2. Покажите, что для произвольных множеств A , B и C справедливо тождество

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

3. Пусть τ — бинарное отношение на множестве \mathbb{N} : $(a, b) \tau (c, d)$, если и только если $a \leq c$ и $b \geq d$; Является ли τ отношением порядка? Если да, установить, существует ли наименьший элемент по отношению τ ? Является ли этот порядок линейным?

4. Пусть в \mathbb{R}^3 задана плоскость $ax + by + cz = 0$. Точки с радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 связаны бинарным отношением τ , если $((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \mathbf{n}) = 0$, где \mathbf{n} — нормаль к указанной плоскости, а (\cdot, \cdot) — скалярное произведение векторов. Показать, что τ есть отношение эквивалентности. Что будет классом эквивалентности точки из \mathbb{R}^3 ?

5. Пусть на множестве P последовательностей длины 3, элементами которых являются натуральные числа, задано бинарное отношение $\tau: a_1 a_2 a_3 \tau b_1 b_2 b_3$, если и только если a_i делит b_i нацело, $i = 1, 2, 3$. Установите, является ли τ отношением порядка? Линейного порядка? Существует ли наименьший элемент?

6. Пусть A — конечное множество. Какое отношение эквивалентности на нем дает наибольшее число эквивалентных классов? Сколько? Сколькими способами можно задать отношение эквивалентности, разбивающее A на два класса?

7. Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a, b]$, и на множестве F задано бинарное отношение $\tau: f(x) \tau g(x)$, если $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Установите, будет ли отношение τ отношением толерантности? эквивалентности? Если отношение является эквивалентностью, опишите классы эквивалентности по этому отношению.

8. Пусть на множестве P последовательностей длины 2, элементами которых являются целые числа (кроме нуля), задано бинарное отношение $\tau: a_1 a_2 \tau b_1 b_2$, если и только если a_i делит b_i нацело, $i = 1, 2$. Установите, является ли τ отношением предпорядка? порядка?

9. Пусть на множестве неотрицательных рациональных чисел определено бинарное отношение $v: (a/b) v (c/d)$, если и только если $ad \leq bc$. Показать, что v является отношением порядка. Существует ли наименьший элемент? Является ли этот порядок линейным?

10. Пусть F — множество функций, непрерывных на $[a, b]$, и на множестве F задано бинарное отношение $\tau: f(x) \tau g(x)$ если и только если $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. Установите, является ли τ отношением предпорядка? порядка?

11. На множестве упорядоченных пар (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}$, задано отношение τ по правилу $(x_1, y_1) \tau (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$. Показать, что τ — отношение эквивалентности. Указать классы эквивалентности. Для точки $(1, \sqrt{2})$ изобразить класс эквивалентности графически.

12. Пусть \preceq_a есть отношение порядка на множестве A , а \preceq_b — на множестве B . На множестве $A \times B$ зададим бинарное отношение $\preceq: (a1, b1) \preceq (a2, b2)$, если и только если $a1 \preceq_a a2$ и $b1 \preceq_b b2$. Докажите, что \preceq есть отношение порядка на $A \times B$. Является ли этот порядок линейным, если линейными являются порядки на множествах A и B ?

13. На множестве упорядоченных пар (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}$, задано отношение π по правилу $(x_1, y_1) \pi (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$. Показать, что π — отношение порядка. Установить, является ли этот порядок линейным? Найти множество нижних и верхних граней множества $\{A, B\}$, где $A = (1, 2)$ и $B = (2, 1)$. Указать $\inf\{A, B\}$ и $\sup\{A, B\}$, если последние существуют. Привести графическую иллюстрацию.

14. Доказать, что множество натуральных чисел равномощно множеству рациональных чисел.

15. Доказать, что отрезок $[0, 1]$ равномощен интервалу $(0, 1)$.

Элементы высшей алгебры

1. На множестве M определена операция \circ по правилу $x \circ y = x$. Установите, является ли алгебра (M, \circ) полугруппой. Существуют ли в ней правые (левые) нейтральные элементы?

2. Пусть на множестве M^2 , где M — некоторое множество, определена бинарная операция \circ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Является ли (M^2, \circ) полугруппой? Существует ли в ней нейтральный элемент?

3. На множестве целых чисел \mathbb{Z} определена операция \circ по правилу $a \circ b = a + b + ab$. Покажите, что алгебра (\mathbb{Z}, \circ) является коммутативным моноидом.

4. Является ли моноидом алгебра $(2^A, \cup)$, где A — некоторое множество.

5. Пусть $A = \{x, y, z\}$ — множество букв, а A^* — множество всех слов, которые можно составить из этих букв с повторениями. Соединением слова $a_1 \dots a_m$ длины m и слова $b_1 \dots b_k$ длины k называют слово $a_1 \dots a_m b_1 \dots b_k$ длины $m + k$. Например: $xy + yzxx = xy yzxx$. Пустое слово (слово нулевой длины) обозначают символом λ . Показать, что $(A^*, +)$ — моноид.

6. В аддитивной группе \mathbb{Z}_7^\oplus вычетов по модулю 7 решить уравнение $4 \oplus_7 x = 2$.

7. В мультипликативной группе \mathbb{Z}_7^\odot решите уравнение $3^{2011} \cdot x = 2$.

8. В группе подстановок S_4 решите уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. В группе подстановок S_7 решите уравнение $(1\ 3\ 6)(5\ 6)x(1\ 4\ 2\ 7) = (1\ 3\ 5)$.

10. В мультипликативной группе вычетов \mathbb{Z}_{31}^\odot решите уравнение $2 \odot x \odot 8 = 5$.

11. Покажите, что алгебра $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \odot)$, где $x \odot y = 3xy$, является группой. Решите в этой группе уравнение $3 \odot x = 5$.

12. Установите, является ли кольцом алгебра $(2^A, \cap, \cup)$? Основные теоретико-множественные тождества считать известными.

13. Установите, является ли кольцом алгебра $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?

14. Установите, является ли кольцом алгебра $(2^A, \Delta, \cap)$, где A — некоторое множество?

15. Установите, являются ли полями следующие кольца вычетов: $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{31}$. Ответ обоснуйте.

16. В поле \mathbb{Z}_7 решите систему уравнений

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1,$$

$$4x_1 - 6x_3 = 2.$$

17. Существуют ли делители нуля в кольце Z_4 вычетов по модулю 4? В кольце Z_5 ?

18. Какие из множеств матриц, элементы которых — действительные числа, образуют кольцо относительно матричных операций умножения и сложения? Какие из колец являются полями?

(а) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$?

(б) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$?

19. Установить, разрешима ли в кольце \mathbb{Z}_{21} система уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1, \\ y - 11x = 13? \end{cases}$$