

Домашнее задание №1 "Кратные и криволинейные интегралы"

ИУ1,3(б), 3-й семестр

Вариант №1.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_{x/2}^{2x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{x/2}^{2/x} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = 9x$, $x = y$, $x + y = 2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $z = x^2 + y^2 + 1$ /внутри параболоида/.

Задача 4. Вычислить линейный интеграл $\int_L (x^2 + y^2 - 2Rx) dx + R(x + y) dy$ вдоль дуги окружности $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(R, R)$.

Задача 5. Вычислить $\oint x^3 dy - y^3 dx$, взятый вдоль окружности $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ в положительном направлении. Преобразовать интеграл в двойной и убедиться в равенстве этих интегралов, вычислив тот и другой.

Вариант №2.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 - 4y^2$, $z = 0$, $x = 4$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 - z^2 = 9$, $z = 0$, $z = 4$.

Задача 4. Вычислить: $\int_L yz dx + z\sqrt{9-y^2} dy + xyz dz$ вдоль дуги L винтовой линии $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = \frac{2}{\pi} t$ от точки A пересечения кривой с плоскостью XOY до точки B ее пересечения с плоскостью $z = 4$.

Задача 5. Вычислить $\oint x^3 dy - y^3 dx$, взятый вдоль эллипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ в положительном направлении. Преобразовать в двойной; убедиться в равенстве этих интегралов, вычислив тот и другой.

Вариант №3.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = 4x$; $z^2 = 4 - 4x$; $y = 0$; $x + y = 2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; $z = 0$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(-1,4)}^{(1,1)} \frac{dx + dy}{(x + y - 1)^2}$.

Задача 5. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, где C – пробегаемый в положительном направлении контур, составленный из отрезка прямой от точки $A(3, 0)$ до точки $B(1, 2)$, параболой $y = 2x^2$ от точки $B(1, 2)$ до точки $O(0, 0)$ и отрезка оси OX от точки $O(0, 0)$ до точки A . Проверить результат с помощью криволинейного интеграла.

Вариант № 4.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 = 4y$; $y + z = 4$; $y + 2z = 4$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$; $x + y + z = 4$.

Задача 4. Вычислить $\int_{(0,0)}^{(0,4)} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$ вдоль параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 2)$ и далее по прямой от точки $A(2, 2)$ до точки $B(0, 4)$.

Задача 5. Вычислить $\oint_L x dy - y dx$ по контуру, образованному осью OX и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 5.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_2^4 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $y = x^2$; $y = 1$; $z = 0$.

Задача 3. Вычислить объемы частей шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, на которые он делится плоскостью $z = 1$.

Задача 4. Вычислить $\int_L x dy - y dx$ вдоль первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ от точки $A(2\pi a, 0)$ до точки $O(0, 0)$ и далее вдоль прямой от точки $O(0, 0)$ до точки $B(-\pi a, 2\pi a)$.

Задача 5. $\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy$ по контуру, образованному параболой $y = 3(x - 1)^2$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(3, 12)$, отрезком прямой от точки B до точки $O(0, 0)$ и отрезком оси OX от точки O до точки A . Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 6.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^3 dx \int_{x^2}^{3+2x} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - y^2$; $x = 0$; $z = x$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; $z = 0$; $x + y + z = 4$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(-1; -3)}^{(3; 1)} \frac{dx - dy}{(x - y - 1)^2}$.

Задача 5. Вычислить $\oint_L (x + y) dx - (x - y) dy$ вдоль окружности $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ в положительном направлении, преобразовать в двойной. Убедиться в равенстве этих интегралов, вычислив тот и другой.

Вариант № 7.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 1 - x^2$; $z = 1 - y^2$; $z = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z = \sqrt{7}$, $z = 2\sqrt{3}$.

Задача 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{(1;1)}^{(5;5)} ye^{-x} dx + (10 - e^{-x}) dy$ по формуле Ньютона-Лейбница,

отыскав предварительно функцию по её полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5. Вычислить $\oint a^2 x dy - b^2 y dx$, взятый вдоль эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 8.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_1^2 dx \int_{2/x}^{2x} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4xy$; $z = 0$; $y = 2$; $x + y = 4$, $y > 2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 8 - y^2$; $z = 2x^2 + y^2$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(-1,-1)}^{(0,1)} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ по двум путям:

- а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева;
б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 5. Вычислить $\oint_C e^x x y dx - e^y (x + y) dy$, взятый вдоль контура квадрата с вершинами в точках $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(-2, -2)$, $D(2, -2)$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 9.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = y$, $z^2 = 4 - y$, $x + y = 4$, $x = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ /вне цилиндра/.

Задача 4. Вычислить $\int_{(0,1)}^{(4,0)} (y^2 + 2) dx + y x dy$ вдоль параболы $y^2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ ($y \geq 0$) от точки $A(0, 1)$ до точки $B(2, 0)$ и далее по верхней части окружности $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ до точки $C(4, 0)$.

Задача 5. Вычислить $\oint_C x y dx + (x + y) dy$ по контуру, образованному верхней частью астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, ($y > 0$) и отрезком оси OX , проходимоу в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 10.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_{-1+\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела ограниченного поверхностями: $z = 4 - x^2$; $y = 0$; $z = y$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 9$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(1,3)}^{(5,1)} \frac{dx + dy}{\left(\frac{x}{2} + y - 2\right)^2}$ вдоль ломаной, отрезки которой параллельны координатным осям.

Задача 5. Вычислить $\oint_L (x - y) dx + xy dy$ вдоль контура, образованного верхней частью астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ и нижней частью окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в положительном направлении.

Вариант № 11.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-8/3}^0 dy \int_{-2(y+1)}^{\sqrt{4+y^2}} f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = 4y$; $x = y$; $x + y = 2$.

Задача 3. Вычислить объем тела ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 6$; $z = x^2 + y^2$ /внутри параболоида/.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(2,2)}^{(1,5)} \left(\frac{y^2 - 1}{y} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{y^2} \right) dy$.

Задача 5. Вычислить $\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy$, где L – окружность $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, пробегаемая против хода часовой стрелки. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 12.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{2-x} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2$; $z = 1 - y^2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y = 0$; $z = 0$; $x + y + z = 4$; $2x + z = 4$.

Задача 4. Отыскав предварительно функцию $U(x, y)$ по её полному дифференциалу, вычислить криволинейный интеграл $\int_{(0,0)}^{(2,3)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{2 + x^2 + y^2}}$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Задача 5. Вычислить $\oint_L (x^2 + 2y) dx - xy dy$, взятый вдоль эллипса $\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 13.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = y$; $y = x^2$; $z = 2 - y$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$; $z = 0$; $z = 6 - x$.

Задача 4. Вычислить $\int_{(-2,0)}^{(6,4)} (x^2 + 2y)dx - xydy$ вдоль нижней части окружности $(y \leq 0)$ $x^2 + y^2 = 4$ от

точки $A(-2, 0)$ до точки $B(2, 0)$ и далее по прямой от точки $B(2, 0)$ до точки $C(6, 4)$.

Задача 5. С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами $I_1 - I_2$:

$$I_1 = \int_{AmB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy \text{ и } I_2 = \int_{AnB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy,$$

где AmB – отрезок прямой между точками $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$, AnB – дуга параболы $y = x^2$.

Вариант № 14.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-y^2/2}^{1-y^2} f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 0$; $y = 1$; $y = 2x$; $y = 6 - x$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 = x^2 + y^2$; $2z^2 = x^2 + y^2 + 1$.

Задача 4. Вычислить $\int_{(a,0)}^{(-a,0)} xdx + (x + y)dy$ вдоль астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ от точки $A(a, 0)$ до точки $B(0, a)$ и далее по прямой от точки $B(0, a)$ до точки $C(-a, 0)$.

Задача 5. Вычислить $\oint_C \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{1 + x^2 + y^2})] dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Вариант № 15.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 2 - x^2$; $z = x$; $y = x$; $y = 2x$, $(x \geq 0, y \geq 0)$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$; $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(-1,-1)}^{(3,2)} \frac{dx - 2dy}{(x - 2y + 2)^2}$.

Задача 5. Вычислить $\oint_C y^2 dx - x^2 dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x + y = -1$, $x = 0$, $y = 0$ в положительном направлении. Проверить по формуле Грина.

Вариант № 16.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:
$$\int_0^4 dx \int_{2-\sqrt{8-(x-2)^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy.$$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = y^2$; $z = 4$; $y = 3 - x$; $x = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (вне цилиндра).

Задача 4. Вычислить $\int_L 3x^2 y dx + y dy$ вдоль дуги кривой $y = (1 - x)\sqrt{x}$ между точками

O и A её пересечения с осью OX и далее по нижней части окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ ($y < 0$) до точки $B(3, 0)$.

Задача 6. Пользуясь формулой Грина, вычислить $\oint_C (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy$ по контуру, состоящему из верхней полуокружности $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ и отрезков прямых от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; -1)$ и далее до точки $B(2; 0)$. Результат проверить, вычисляя интеграл непосредственно.

Вариант № 17.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^x f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 0$; $y = 2 + 2x$; $y = x/2 - 1$; $x + y = 2$; $z = 1 + y^2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 2x^2 + 2y^2$; $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Задача 4. Вычислить $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ вдоль четверти эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($y \geq 0$) от точки $A(a, 0)$ до точки $B(0, b)$ и далее вдоль прямой до точки $C(-2a, 0)$.

Задача 5. Вычислить $\oint_L x^2 dx + xy dy$, взятый вдоль контура, образованного прямыми $x - y = 1$, $2y - x = 1$, $x + y = -1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 18.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:
$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}-2} f(x, y) dy.$$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = x^2 + 2y^2$; $y = x$; $y = 2x$; $x = 1$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 10 - x^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 9$.

Задача 4. Вычислить:
$$\int_{(2,1)}^{(4,3)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{1}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) dy.$$

Задача 5. Вычислить $\oint_C x dx + (x + y) dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 2x$. Проверить результат по формуле Грина.

Вариант № 19.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-4}^{-2} dx \int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}} f(x, y) dy + \int_{-2}^{\sqrt{8}} dx \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy.$$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2 + 2y^2 = 8$; $y = x - 2$; $y = -x - 2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 0$; $z = 4 - x^2 - y^2$; $z = 2(4 - x^2 - y^2)$; $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; $y = \sqrt{3x}$; ($x \geq 0$); ($y \geq 0$).

Задача 4. Вычислить: $\int_{(3,2)}^{(5,4)} \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Задача 6. Используя формулу Грина, вычислить $\oint_L x^2 y dx + xy^2 dy$. Проверить результат, вычисляя интеграл непосредственно вдоль контура L $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ в положительном направлении.

Вариант № 20.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_{2x-1}^{(x+1)/2} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \frac{2}{y}$; $x + y + z = 3$; $z + y - 2x = 3$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + 2y^2$; $z = 8 - x^2$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(-1,-1)}^{(1,1)} \frac{dx - dy}{(x - y - 1)^2}$.

Задача 5. Вычислить $\oint (x - y^2) dx + 2xy dy$ вдоль окружности $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью двойного интеграла.

Вариант № 21.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-2}^0 dx \int_{-x-2}^{\sqrt{-x}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - y^2$; $z = 0$, $y = 2 - x^2$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - x^2 - y^2$; $z = 4 - 2y$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(-1,0)}^{(1,2)} \frac{3x^2 dx}{\sqrt{y - x^3}} - \frac{dy}{\sqrt{y - x^3}}$.

Задача 5. Доказать, что интеграл $\int_L (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ не зависит от пути интегрирования.

Найти значение интеграла, интегрируя сначала по ломаной AOB от точки $A(-a, \sqrt{2}b)$ до точки $B(a, \sqrt{2}b)$, а затем по прямой, соединяющей эти точки, где O – начало координат.

Вариант № 22.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-2}^2 dx \int_{-2+\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - x^2$; $y + z = 4$; $z = 0$; $y = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 6$; $z = 10 - x^2 - y^2$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(-1,-1)}^{(1,1)} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ по двум путям:

а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева;

б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 5. Вычислить $\oint 2ydx + xydy$ вдоль контура, образованного прямыми $x + y = 3$, $x = 1$, $y = 1$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 23.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{(0)}^{(8/3)} dx \int_{2x-2}^{\sqrt{4+x^2}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 8 - x^2$; $z = 3y$; $z = 8 - y$; $y = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 5 - x^2 - y^2$; $z = 1$.

Задача 4. Отыскав предварительно с помощью криволинейного интеграла функцию по её полному

дифференциалу, вычислить: $\int_{(0,0)}^{(1, \frac{\pi}{2})} (y \cos xy) dx + x \cos(xy) dy$.

Задача 5. Используя формулу Грина, вычислить

$$\oint \frac{3x - y^3 \sqrt{1+x^2+4y^3} dx + (18y^2 + x^3 \sqrt{1+x^2+4y^3}) dy}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}$$

вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Вариант № 24.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_{2y-1}^{(y+1)/2} f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $4z = x^2$; $y = 0$; $y + z = 4$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 1$; $z = 4$.

Задача 4. Вычислить $\int_L (y+x)dx + (y-x)dy$ вдоль верхней части эллипса $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ($y \geq 0$) от точки $A(6, 0)$ до точки $B(2, 0)$ и далее по прямой до точки $C(0, 2)$.

Задача 5. Вычислить $\oint \frac{y}{x} dx + x^2 dy$ вдоль контура, образованного кривой $y = \ln x$, участком оси OX и прямой $x = e$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью двойного интеграла.

Вариант № 25.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{-x}}^{2-x} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y + z = 2$; $z = 0$;
 $4z + 2y + x = 8$; $2z + x + y = 4$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 2x$.

Задача 4. Вычислить: $\int_{(1,2)}^{(4,5)} \frac{x dx - y dy}{\sqrt{y^2 - x^2}}$.

Задача 5. Вычислить: $\oint_L y^2 dx + xy dy$ вдоль окружности $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ в положительном направлении.

Вариант № 26.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-1}^0 dx \int_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \sqrt{4 - x}$; $y^2 = 4 - x$; $z = 0$; $x = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$; $z = 4$; $y = 1$, ($y > 1$).

Задача 4. Вычислить $\int_L xy dy + y dx$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$ и далее по окружности $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2; 2)$.

Задача 5. Вычислить $\oint_L y^2 dx + x dy$ по контуру, образованному кривой $y = \sqrt{x - 1}$, прямой $y = 2$ и отрезками осей OX и OY , проходимою в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Вариант № 27.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x + z = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 1$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = 5a^2$; $x^2 - y^2 + z^2 = 4a^2$.

Задача 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{(-4,3)}^{(4,0)} (x^3 - 3y) dx + (y^2 - 3x) dy$ по формуле Ньютона-Лейбница, предварительно отыскав функцию $U(x, y)$ с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5. Вычислить интеграл $\oint_L (x^2 + y) dx - (y^2 + x) dy$ вдоль контура, образованного верхней частью окружности $x^2 + y^2 = 1$ и участками прямых от точки $A(-1; 0)$ до точки $B(0; -1)$ и далее до точки $C(1; 0)$ в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Вариант № 28.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{y+1}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x, y) dx$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = y^2$; $z = y$; $y = x$; $x = 1$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 9 - x^2 - y^2$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$ (вне цилиндра).

Задача 4. Вычислить $\int_L (x + y) dx + (y - x) dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 4$ от точки $A(0; 2)$ до точки $B(2; 0)$, а далее по прямой, соединяющей точку $B(2; 0)$ и точку $C(4; 2)$.

Задача 5. Вычислить $\oint_C (2x - y) dx + (x - 1) dy$ вдоль контура, образованного $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$, $x = 2$ в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Вариант № 29.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^4 dx \int_{-2+\frac{1}{2}(x-2)^2}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy$.

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = -y^2 + 2$; $z = y$; $y = x$; $x = 0$, $z = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = 4a^2$.

Задача 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{(1;1)}^{(8;4)} \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}} \right) dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dy$ по формуле

Ньютона-Лейбница, отыскав предварительно функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 5. Вычислить $\oint_C 2x dy - (x - y) dx$ вдоль контура, образованного линиями $y = x + 1$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Вариант № 30.

Решить следующие задачи и сделать поясняющие рисунки.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{(0)}^{(3)} dy \int_{(y-3)}^{(0)} f(x, y) dx + \int_{(3)}^{(6)} dy \int_{(0)}^{(y-3)} f(x, y) dx.$$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y^2 - x^2 = 1$; $x + z = 3$; $z = 0$; $x = 0$.

Задача 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $2z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $z = 0$.

Задача 4. Вычислить площадь части конуса $x^2 + y^2 = z^2$, вырезаемой поверхностями: $y^2 = ax$; $x = a$.

Задача 5. Вычислить: $\int_{(-1,1)}^{(2,-1)} \frac{dx + dy}{(x + y + 1)^2}$.

Задача 6. Вычислить $\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy$ вдоль периметра квадрата с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.