ИУ1, ИУ2, 4-й семестр, 2017–2018 уч.г.

Теория вероятностей и математическая статистика

Модуль 3, домашнее задание «Случайные величины»

Задача 1. МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (2 балла)

Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ распределен но нормальному закону $N(\overline{m},\ \Sigma)$. Запишите функцию плотности $f_{\xi\eta}(x, y)$ и найдите: а) плотности вероятностей $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$; б) коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$; в) плотность случайной величины $\zeta = a\xi + b\eta$. Постройте графики найденных функций.

Вар.	$\overline{m}$	Σ	a	b	**Вар.**	$\overline{m}$	Σ	a	b	**Вар.**	$\overline{m}$	Σ	a	b
1.	$(1,-2)$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	2	1	**11.**	$(3,-2)$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	1	-2	**21.**	$(4,-2)$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	-1	-1
2.	$(1,2)$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	2	1	**12.**	$(3,2)$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	1	-1	**22.**	$(1,-2)$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	1	-1
3.	$(2,-2)$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	1	1	**13.**	$(1,-3)$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	-2	3	**23.**	$(3,-2)$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	2	1
4.	$(2,2)$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	4	1	**14.**	$(2,-3)$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	3	-4	**24.**	$(3,2)$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	1	2
5.	$(1,-2)$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	-1	1	**15.**	$(3,-2)$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	-1	2	**25.**	$(3,-3)$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	-2	-1
6.	$(1,2)$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	-2	1	**16.**	$(3,2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	1	-3	**26.**	$(4,-2)$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	1	-1
7.	$(2,-2)$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	-1	2	**17.**	$(-1,2)$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	2	1	**27.**	$(4,2)$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	-1	1
8.	$(2,2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	-1	1	**18.**	$(3,-2)$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	1	1	**28.**	$(-4,1)$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	1	1
9.	$(1,-3)$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	3	-1	**19.**	$(-1,-2)$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	-1	-2	**29.**	$(-4,2)$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	4	1
10.	$(2,-3)$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	3	-1	**20.**	$(1,2)$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	2	1	**30.**	$(4,3)$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	1	4

Задача 2. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (2 балла)

Вариант 1. Случайная величина X подчиняется распределению Релея:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\Big), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \ln x$.

Вариант 2. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность распределения $f(y)$, если $Y = \operatorname{arctg} X$.

Вариант 3. Значения острого угла ромба со стороной a распределены равномерно в интервале $(0,\ \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей площади ромба.

Вариант 4. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2}\Bigr).$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(y)$, если $Y = X^3$.

Вариант 5. Случайная величина X распределена по закону

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4a}\Bigl(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\Bigr), & |x| \le a; \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(y)$ случайной величины $Y = b^2 - X^2$, где $b > a$.

Вариант 6. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно на отрезке $[0,\ 1]$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по показательному закону $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y \ge 0$?

Вариант 7. Закон распределения измеренного значения радиуса круга — нормальный с математическим ожиданием $m = 50$ и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}25$. Найти закон распределения площади круга и его среднюю площадь.

Вариант 8. Найти закон распределения объема шара, если его радиус — случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием $m = 10$ и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}25$.

Вариант 9. Найти плотность распределения вероятностей объема куба, ребро которого — случайная величина X, распределенная равномерно в интервале $[0,\ a]$.

Вариант 10. Пусть X и Y — независимые случайные величины, плотности распределения вероятностей которых

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2},\ \ x \ge 0; \quad f_Y(y) = \frac{1}{3}e^{-y/3},\ \ y \ge 0.$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

Вариант 11. Диаметр цилиндрического вала имеет погрешность изготовления, поэтому его измеренное значение подчинено равномерному распределению на отрезке $[a,\ b]$. Найти плотность распределения вероятностей площади поперечного сечения вала.

Вариант 12. Прочность детали X имеет нормальный закон распределения с параметрами $m_1 = 20$ и $\sigma_1 = 1$. На деталь действует нагрузка $Y \sim N(14, 2)$ (т.е. Y тоже имеет нормальное распределение с параметрами $m_2 = 14$ и $\sigma_2 = 2$). Найти вероятность неразрушения детали, т.е. вероятность события $A = (X > Y)$.

Вариант 13. На окружность радиуса R случайным образом брошены две точки. Считая, что длина хорды — случайная величина с равномерным распределением, найти плотность распределения вероятностей длины дуги между брошенными точками.

Вариант 14. Угол λ сноса самолета определяется формулой $\lambda = \arcsin\Bigl(\dfrac{u}{v}\sin\varepsilon\Bigr)$, где ε — угол действия ветра, u — скорость ветра, v — скорость самолета в воздухе. Значения угла действия ветра распределены равномерно на отрезке $[-\pi,\ \pi]$. Найти плотность распределения вероятностей угла сноса при $u = 20$ м/с, $v = 720$ км/ч.

Вариант 15. У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый „параллелограмм“ регулятора, острый угол φ этого параллелограмма — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[\pi/6,\ \pi/4]$. Найти закон распределения диагоналей параллелограмма регулятора, если его сторона равна a.

Вариант 16. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(y)$ случайной величины $Y = kX$, $k > 0$.

Вариант 17. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно на отрезке $[0,\ \pi]$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по закону Коши $f(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$?

Вариант 18. Измеренное значение стороны квадрата — случайная величина X, распределенная по закону

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin x, & x \in (0,\ \pi]; \\ 0, & x \in (\pi,\ 2\pi). \end{cases}$$

Найти плотность $f(y)$ распределения вероятностей площади квадрата.

Вариант 19. Абсолютное значение скорости молекул массы газа при абсолютной температуре T — случайная величина v, подчиняющаяся закону Максвелла — Больцмана: $f_v(x) = \lambda x^2 e^{-\beta x^2}$, $x \geq 0$, $\beta = \frac{m}{2kT}$ — константа Больцмана, λ — нормирующий множитель. Найти плотность распределения вероятностей $f_E(x)$ кинетической энергии молекул $E = \dfrac{1}{2}mv^2 = \gamma v^2$, где $\gamma = \dfrac{1}{2}m$. Показать, что $\lambda = \dfrac{4}{\pi}\beta^{3/2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\dfrac{m}{kT}\right)^{3/2}$.

Вариант 20. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,\ 2\pi]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: $Y = -4X$, $Z = X - Y$, $V = X + 2Y - 3Z - 1$.

Вариант 21. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,\ 20]$, а случайная величина Y имеет плотность распределения $f(y) = 0{,}5\, e^{-0{,}5y}$, $y \geq 0$. Найти математические ожидания и корреляционную матрицу случайных величин U и V, если $U = 2X - 3Y + 5$, $V = Y - 3X + 1$, а коэффициент корреляции между X и Y равен $\rho_{xy} = -0{,}8$.

Вариант 22. По сторонам прямого угла XOY скользит линейка AB длиной $l = 1$, занимая случайное положение, причем все значения абсциссы X, меняющиеся от 0 до 1 равновероятны. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния R от начала координат до линейки.

Вариант 23. Затраты C на обслуживание приборов обратно пропорциональны сроку их службы t, т.е. $C = \dfrac{1}{t}$. Найти закон распределения случайной величины C, если закон распределения t нормальный: $f_t(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{4/\pi}}\exp\left(-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Вариант 24. Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношением $Y = 4 - 3X$. Величина X распределена равномерно на отрезке $[-1,\ 3]$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины Y, корреляционный момент величин X и Y и их коэффициент корреляции.

Вариант 25. Случайные величины U и V связаны со случайными величинами X и Y соотношениями $U = X+3Y-2$, $V = 2X-Y+1$. Известно, что $M[X] = 1$, $D[X] = 5$, $M[Y] = -2$, $D[Y] = 4$, $K_{xy} = 3$. Найти математическое ожидание величин U и V и их корреляционную матрицу.

Вариант 26. На смежных сторонах прямоугольника со сторонами a и b выбраны наудачу две точки. Найти математическое ожидание квадрата расстояния между этими точками, а также его дисперсию.

Вариант 27. Имеется случайная величина X, распределенная по экспоненциальному закону $f(x) = 2e^{-2x}$, $x \geq 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = -2X$, $Z = X + Y - 1$, $V = X - 2Y - Z + 1$.

Вариант 28. Точка находится на окружности радиуса R. Радиус-вектор этой точки проектируется на полярную ось, и на этой проекции, как на стороне, строится квадрат. Определить математическое ожидание и дисперсию площади квадрата, если положение точки в месте окружности равновозможно.

Вариант 29. На плоскости с координатами $(x,\ y)$ дана случайная точка $(X,\ Y)$, причем $M[X] = 2$, $D[X] = 16$, $M[Y] = 4$, $D[Y] = 64$, $K_{xy} = 0$. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния от начала координат до проекции точки на ось OZ, лежащую в плоскости XOY и образующую с осью OX угол $\lambda = 30°$.

Вариант 30. Через точку $B(0;\ b)$ проводится прямая BA под углом λ к оси ординат, причем $A(a;\ 0)$. Все значения угла λ равновероятны на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей абсциссы a точки A.

Задача 3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ (2 балла)

Вариант 1. Математическое ожидание числа солнечных дней в году для определенной местности равно 150 дням. Найти вероятность того, что в данном году здесь будет не менее 200 солнечных дней. Как изменится искомая вероятность, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение числа солнечных дней равно 10?

Вариант 2. Математическое ожидание годового количества осадков для данной местности равно 600мм. Каково минимальное количество осадков за год с вероятностью, не превышающей величины 0,8?

Вариант 3. Математическое ожидание скорости ветра у земли в данной местности составляет 8 км/ч. Найти вероятности того, что: а) скорость ветра превысит 20 км/ч; она будет меньше 50 км/ч. Как изменятся искомые вероятности, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение скорости ветра равно 2 км/ч?

Вариант 4. Ежегодная потребность в электроэнергии для НИИ составляет в среднем 500 кВтч. В каких пределах заключен расход электроэнергии в любой день недели с вероятностью не менее 0,85? Как изменится ответ задачи, если будет известно, что значение среднеквадратичного отклонения ежегодного расхода электроэнергии составит $50 кВтч$? Институт потребляет энергию 365 дней в году.

Вариант 5. Математическое ожидание скорости ветра на высоте 10 *км* равно 30 км/ч, а среднее квадратичное отклонение — 5 км/ч. Какую скорость ветра на этой высоте можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,85?

Вариант 6. Генератор обеспечивает выходное напряжение, которое может отклоняться от номинального на значение, не превышающее 1В с вероятностью 0,95. Какие значения дисперсии выходного напряжения можно ожидать?

Вариант 7. Математическое ожидание суточного расхода воды в лаборатории составляет 10 м^3. Оценить вероятность того, что в некоторый день расход воды будет находиться в диапазоне $8 - 12$ *м*^{3}, если среднее квадратичное отклонение суточного расхода составит 1 м^3.

Вариант 8. Используя неравенство Чебышева, найти вероятность того, что частота появления грани с номером 6 при бросании правильной игральной кости 200 раз отклонится от вероятности ее появления не более, чем на 0,05. Найденный ответ сравнить с результатом, полученным с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа.

Вариант 9. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота появления грани с четным номером при 10000 бросаниях правильной игральной кости отклонится от вероятности ее появления по абсолютной величине не более, чем на 0,01. Сравнить найденные значения с результатами, полученными с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа.

Вариант 10. Произведено 200 измерений некоторой случайной величины. Известно, что дисперсия измерения этой случайной величины не превышает 4. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих измерений от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,2.

Вариант 11. Чтобы определить среднее сопротивление np-перехода транзистора, в партии из 50 одинаковых коробок проверено по одному транзистору из каждой коробки. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического значения сопротивления np-перехода в выбранной совокупности от среднего значения во всей партии не превысит 10 Ом, если среднее квадратичное отклонение значения сопротивления np-перехода не превышает 6 Ом.

Вариант 12. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое 500 измерений. Предполагая, что среднее квадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превышает 0,5, оценить вероятность того, что отклонение найденного таким образом значения величины от истинного не превысит 0,2.

Вариант 13. Каждая повторная передача сигнала по каналу связи увеличивает вероятность искажения сигнала на 0,1%. При передаче первого сигнала эта вероятность равна 0,05. Передано 100 сигналов. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9 заключено число переданных без искажения сигналов.

Вариант 14. В конденсаторе с вероятностью 0,01 возможен дефект диэлектрика и независимо от первого с вероятностью 0,005 дефект корпуса. Проверена партия в 1000 конденсаторов. В каких границах с вероятностью 0,997 заключается число бракованных конденсаторов? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 15. В Москве рождается каждый день в среднем 335 детей, т.е. в год около 122500 детей. Считая вероятность рождения мальчика 0,51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число девочек не менее, чем на 1500.

Вариант 16. Пусть ξ_1 — число выпадений герба при 10 подбрасываниях монеты, а ξ_2 — число выпавших очков на грани тетраэдра (грани перенумерованы числами 1, 2, 3, 4) при его однократном подбрасывании. Оценить вероятность осуществления неравенства $\xi_1 + \xi_2 < 10$. Решить задачу, используя первое и второе неравенства Чебышева.

Вариант 17. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах число попаданий будет не менее 85 и не более 95?

Вариант 18. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-n\lambda$	0	$n\lambda$
$P(x_n)$	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Можно ли применить к данной последовательности закон больших чисел?

Вариант 19. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-n\lambda$	0	$n\lambda$
$P(x_n)$	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Можно ли применить к данной последовательности закон больших чисел?

Вариант 20. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$
$P(x_n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Можно ли применить к данной последовательности закон больших чисел?

Вариант 21. Правильная монета 1000 раз бросается вверх. Определить такое число N, чтобы с вероятностью 0,85 количество попыток, когда монета ляжет гербом вверх, заключалось между 400 и N.

Вариант 22. Среди изготовленных заводом электроламп 80% выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что в партии из 500 электроламп число изделий, выдержавших гарантийный срок службы, находится в пределах от 380 до 420. Использовать неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 23. Вероятность случайного события равна 0,9. Выполнено 6400 испытаний. Какова вероятность того, что наблюдаемая частота появления случайного события лежит в интервале $0{,}9\pm0{,}01$? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 24. Вероятность случайного события равна 0,81. Выполнено 5000 испытаний. В каком интервале с вероятностью 0,97 лежит наблюдаемая частота случайного события? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 25. Вероятность случайного события равна 0,67. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что наблюдаемая частота случайного события отклонится от его вероятности не более чем на 0,01? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

Вариант 26. Вероятность появления бракованной детали в партии из 1000 деталей равна 0,05. Найти нижнюю и верхнюю границы числа дефектных деталей в этой партии с вероятностью 0,9.

Вариант 27. Стрельба по цели ведется поочередно из трех орудий, причем вероятности попадания в цель равны соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Произведено 300 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что при этих данных частота попаданий отличается от средней вероятности попадания по абсолютной величине не более чем на 0,1.