

Высшая математика, 3-й сем., ИУ1, ИУ2
Модуль 4. Ряды Фурье
Вопросы для подготовки к рубежному контролю

Теоретические вопросы

1. Дайте определение линейного пространства функций, интегрируемых с квадратом на $[a, b]$. Как для таких функций вводится понятие эквивалентности? (3 балла)
2. Дайте определение евклидова пространства $L^2[a, b]$. Как в этом пространстве введены норма и метрика? (3 балла)
3. Какая последовательность элементов евклидова пространства называется сходящейся? (3 балла)
4. Сформулируйте задачу о наилучшей аппроксимации в евклидовом пространстве. (3 балла)
5. Запишите неравенство Бесселя. При каких условиях оно превращается в равенство? (3 балла)
6. Дайте определение замкнутой системы функций в $L^2[a, b]$. (3 балла)
7. Какой ряд называют тригонометрическим рядом Фурье функции? (3 балла)
8. Что называют коэффициентами Фурье функции $f(x) \in L^2[a; b]$? В каком случае ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ называют рядом Фурье функции $f(x)$? (3 балла)
9. Приведите стандартную форму представления суммы тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \in L^2[-l, +l]$. (3 балла)
10. Сформулируйте теорему Дирихле. (3 балла)
11. Сформулируйте достаточные условия представимости функции, определенной на $[a, b]$, суммой ее ряда Фурье. (3 балла)

Типовой вариант билета по теории

1. Какая последовательность элементов евклидова пространства называется сходящейся? (3 балла)
2. Приведите стандартную форму представления суммы тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \in L^2[-l, +l]$. (3 балла)

Типовой вариант билета с задачами

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0; \\ 2x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ Построить график функции и график суммы ряда. (2 балла)
2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = 1 - x$, $0 < x \leq 1$, по синусам кратных углов. Построить график функции и график суммы ряда. (2 балла)
3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^x$, $0 \leq x < 1$. Построить график функции и график суммы ряда. (3 балла)