РЛ2,6, 3-й семестр (2016 г.)
Теория поля и ряды, модуль 1
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы *(3 балла)*

1. Дайте определение двойного интеграла. и сформулируйте его основные свойства.

2. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

3. Дайте определение тройного интеграла сформулируйте его основные свойства.

4. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат.

5. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.

6. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода. Опишите его связь с криволинейным интегралом первого рода и процесс его вычисления.

7. Дайте определение односвязной области в R^2 и запишите формулу Грина для выпуклой односвязной области в R^2.

8. Запишите формулу Грина для многосвязной области и сформулируйте условия ее применимости.

9. Сформулируйте условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

10. Дайте определение поверхностного интеграла второго рода и его связь с поверхностным интегралом первого рода. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.

11. Сформулируйте теорему о связи поверхностного интеграла с криволинейным (Формула Стокса).

12. Сформулируйте теорему о связи поверхностного интеграла с тройным (Формула Остроградского-Гаусса).

13. Дайте определение дивергенции и ротора векторного поля. Запишите формулы для их вычисления в прямоугольных координатах.

14. Потенциальное поле. Сформулируйте свойства потенциальных полей.

Теоретические вопросы *(4 балла)*

1. Вывести формулу для якобиана отображений, осуществляющих переход к сферическим и цилиндрическим координатам.

2. Докажите формулу Грина для односвязной области.

3. Вывести формулу для дивергенции в прямоугольных координатах.

4. Вывести формулу для ротора в прямоугольных координатах.

5. Векторные линии. Вывести уравнения для векторных линий. Векторные трубки.

6. Соленоидальное поле. Сформулируйте и докажите свойства соленоидальных полей.

Типовой вариант билета по теории

1. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат *(3 балла)*

2. Соленоидальное поле. Сформулируйте и докажите свойства соленоидальных полей. *(4 балла)*

Типовой вариант билета с задачами

ВАРИАНТ 1.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\,.$$

Задача 2. Для области T, заданной неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}, \quad 0 \leqslant z \leqslant a$ вычислить

$$\iiint\limits_{T} z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy.$$

Задача 3. Вычислить $\int\limits_{L} xydy + ydx$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$ и далее по окружности $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2;2)$.

Задача 4. Вычислить работу векторного поля $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при перемещении вдоль верхней половины эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ из точки $A(a,0)$ в точку $B(-a,0)$.

ВАРИАНТ 2.

Задача 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy.$

Задача 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + z^2 = 5a^2$; $x^2 - y^2 + z^2 = 4a^2$.

Задача 3. Вычислить интеграл $\oint (x^2+y)dx - (y^2+x)dy$ вдоль контура, образованного верхней частью окружности $x^2 + y^2 = 1$ и участком прямых $x - y = 1$ и $x + y = -1$ в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Задача 4. Вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ вдоль окружности $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ в отрицательном направлении.

Возможный вариант Задачи 3.

Задача 3. Вычислить криволинейный интеграл от полного дифференциала

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dx+dy)$$

Комментарии.

Работа равна $\int\limits_{AB} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{AB} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$

Циркуляция равна $\oint \mathbf{a} d\mathbf{r}$