Машиностроение и компьютерные технологии
Сетевое научное издание
http://www.technomagelpub.ru

Ссылка на статью:
// Машиностроение и компьютерные технологии. 2018. № 03. С. 35–50.

DOI: **10.24108/0318.0001379**

Представлена в редакцию: 28.02.2018

УДК 519.76+372.851

О некоторых свойствах полуколец

Белоусов А.И.[1,*]

[*]al_belous@bk.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматриваются некоторые свойства полуколец – замкнутых и полуколец с итерацией. Основной результат состоит в доказательстве теоремы о том, что метод последовательного исключения неизвестных при решении систем линейных уравнений в полукольце с итерацией действительно дает наименьшее (в смысле естественного порядка полукольца) решение системы. Доказательство основано на графовой интерпретации системы и устанавливает связь между методом последовательного исключения неизвестных и методом вычисления матрицы стоимостей размеченного ориентированного графа методом последовательного вычисления матриц стоимостей по путям возрастающих рангов. Кроме этого, доказываются важные свойства бесконечной суммы, замкнутость полукольца с итерацией относительно решений систем линейных уравнений и во всех подробностях доказывается теорема о матрице стоимостей как итерации матрицы меток дуг ориентированного графа, размеченного над полукольцом с итерацией.

Ключевые слова: полукольцо, замкнутое полукольцо, полукольцо с итерацией, матрица стоимостей размеченного орграфа, бесконечная сумма, автомат над полукольцом, ранг пути

Введение

Теория полуколец является важнейшей алгебраической основой для решения задач в теории графов, теории автоматов и формальных языков.

За последние несколько лет в теории полуколец получено немало интересных результатов, часть из которых касается собственно абстрактной алгебры [1 - 5], причем следует обратить особое внимание на работы, посвященные матрицам над полукольцами [6], а также исследованию неидемпотентных полуколец [2]. Большое значение имеют фундаментальные обзоры по итогам работ в этой области [1, 7, 8].

Приложениям теории полуколец к теории графов, автоматов и языков посвящен цикл работ авторов из Балтийского федерального университета им. И. Канта с участием известного специалиста в этой области В. Куиха (W. Kuich) – например, [9, 10]. В этой связи несомненный интерес представляет работа Н. С. Никулиной [11], в которой получены нетривиальные результаты по применению теории полуколец к решению задачи перечисления простых путей в графе. Эта работа по тематике близка к теме настоящей статьи, тем более, что автор ссылается на книгу [12], от некоторых идей которой и отправляется предлагаемая статья. В аспекте упомянутых приложений как раз наиболее важна структура идемпотентного полукольца. Исследованию свойств идемпотентных алгебр посвящены работы [13, 14]. Приложениям теории полуколец в криптографии посвящена работа [15].

Одно из важнейших приложений теории полуколец – теория автоматов. В этой связи заслуживает внимания статья [16], в которой рассматриваются приложения алгебраического аппарата полуколец к теории динамических систем.

В то же время остаются на повестке дня определенные методические проблемы, и теория полуколец является если не методической целиной, то областью, где необходимо тщательно проработать последовательность изложения теории в курсах алгебры или дискретной математики, пересмотреть доказательства некоторых теорем с целью их максимального упрощения, но без ущерба для строгости. По ходу решения методических проблем возникают и проблемы собственно научные, как правило связанные именно с поиском новых доказательств уже известных результатов.

С точки зрения методики и методологии большой интерес представляет статья Е. М. Вечтомова [17].

Данная статья носит научно-методический характер и в ней рассматриваются следующие вопросы.

Доказываются свойства бесконечной суммы (точной верхней грани последовательности по естественному порядку идемпотентного полукольца). Эти свойства подробно и в общем виде доказаны в [12], но излагаемые там доказательства весьма сложны, и в практике проведения занятий для студентов программистских специальностей целесообразно упростить некоторые доказательства. Важные свойства бесконечной суммы, из которых вытекает, в частности, непрерывность операции сложения, могут быть доказаны значительно проще. При этом приходится несколько жертвовать общностью анализа, но предлагаемый уровень вполне достаточен для нематематических специальностей бакалавриата.

Далее рассматриваются так называемые полукольца с итерацией и доказывается теорема о замкнутости таких полуколец относительно решений систем линейных уравнений. К полукольцам с итерацией относится и важнейшее для приложений к теории автоматов и языков полукольцо регулярных языков в заданном конечном алфавите.

После этого мы переходим к подробному изложению применения теории полуколец к решению общей задачи о путях в размеченных ориентированных графах. Здесь мы также следуем книге [12], но в отличие от нее во всех деталях доказываем основную теорему, согласно которой матрица стоимостей есть итерация матрицы меток дуг.

В целях полноты изложения кратко излагается (на основе [12]) метод вычисления матрицы стоимостей путем последовательного вычисления матриц стоимостей по путям различных (возрастающих) рангов. Это важно для доказательства основного результата статьи.

Также вводится специфическое для данной статьи понятие автомата над полукольцом (см. также [18]), который, в отличие от обычного размеченного орграфа имеет выделенную «заключительную» вершину с нулевой полустепенью исхода.

И в заключение доказывается основная теорема о том, что метод последовательного исключения неизвестных при решении системы линейных уравнений в полукольце с итерацией дает действительно наименьшее решение системы. Это доказательство основано на графовой интерпретации системы линейных уравнений. Подробное доказательство этой теоремы отсутствует в [12] и, приведенное здесь, восполняет существенный пробел. Особо следует подчеркнуть, что в процессе доказательства устанавливается связь между этим методом («методом Гаусса» для полуколец) и методом вычисления матрицы стоимостей для размеченного орграфа путем последовательного вычисления матриц стоимостей по путям возрастающих рангов. Оказывается, что эти два метода являются разными модификациями одного и того же алгоритма.

Свойства бесконечной суммы

Под бесконечной суммой элементов $a_1,\ldots a_n,\ldots$ замкнутого полукольца [12] понимается точная верхняя грань последовательности $\{a_n\}_{n\ge 0}$, то есть, по определению

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup a_n \cdot$$

Точная верхняя грань рассматривается по естественному порядку идемпотентного полукольца, согласно которому $a \le b$, если $a+b=b$.

Нижний предел суммирования может быть и больше нуля. Как правило, будем пользоваться обозначением $\sum a_n$, полагая по умолчанию, что суммирование ведется от нуля до бесконечности. В случае, когда нижний предел отличен от нуля, будем это указывать.

Рассмотрим здесь важнейшие свойства бесконечной суммы.

Теорема 1. Для произвольных последовательностей $\{x_n\}_{n\ge 0}$ и $\{y_n\}_{n\ge 0}$ имеет место равенство

$$\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n \cdot$$

Доказательство. Пусть $a = \sum x_n + \sum y_n$. Докажем, что элемент a есть точная верхняя грань последовательности $\{x_n + y_n\}$. Имеем: для любого $n \in \mathrm{N}$ вычислим $a + x_n + y_n = \sum x_n + \sum y_n + x_n + y_n = \sum x_n + \sum y_n = a \cdot$

Если b - верхняя грань указанной последовательности, то

$$b + a = b + \sum x_n + \sum y_n = b,$$

так как для любого $n \in \mathrm{N}$ $b \ge x_n + y_n \ge x_n, y_n$ (конечная сумма есть, как известно, точная верхняя грань множества слагаемых [12]), т.е. элемент b является верхней гранью каждой из рассматриваемых двух последовательностей. Итак, $a \le b$, и $a = \sum (x_n + y_n) \cdot$

Из доказанной теоремы вытекает важное свойство непрерывности операции сложения в замкнутом полукольце, а именно имеет место

Следствие 1. Для любых последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$ и элемента a замкнутого полукольца выполняется

$$\sum(x_n + a) = \sum(a + x_n) = a + \sum x_n = (\sum x_n) + a.$$

Доказательство. Частный случай утверждения теоремы 1, когда вторая последовательность постоянна, то есть при $y_n = a$ для каждого n.

Итак, за бесконечную сумму можно выносить произвольное слагаемое, как и наоборот: вносить отдельное слагаемое в бесконечную сумму. Это и выражает свойство непрерывности операции сложения. Напомним, что операция умножения в замкнутом полукольце непрерывна по определению, то есть для последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$ и элемента a замкнутого полукольца выполняется

$$\sum ax_n = a\sum x_n \text{ и } \sum x_n a = (\sum x_n)a.$$

Это не что иное, как бесконечный аналог свойства дистрибутивности умножения относительно сложения.

Следующее свойство бесконечной суммы связано с понятием частичной суммы последовательности.

Положим для последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} x_i$$

при $k \geq 0$ и назовем это *k-ой частичной суммой последовательности* $\{x_n\}_{n\geq 0}$. Так как последовательность $\{s_k\}_{k\geq 0}$ является неубывающей, то $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \sum_{k=m\geq 1}^{\infty} s_k$ для любого m.

Теорема 2. Точная верхняя грань (бесконечная сумма) любой последовательности равна точной верхней грани последовательности ее частичных сумм, то есть

$$\sum x_n = \sum s_n.$$

Доказательство. Для произвольного неотрицательного k имеем:

$$x_k + \sum s_n = x_k + \sum_{n\geq k} s_n = \sum_{n\geq k}(x_k + s_n) = \sum_{m\geq 0}(x_k + x_1 + \ldots + x_k + \ldots + x_{k+m}) =$$
$$= \sum_{m\geq 0}(x_1 + \ldots + x_k + \ldots + x_{k+m}) = \sum_{n\geq k} s_n = \sum s_n$$

(Использованы свойства коммутативности и идемпотентности операции сложения в полукольце.)

Это значит, что точная верхняя грань последовательности частичных сумм есть верхняя грань последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$. Для произвольной верхней грани этой b последовательности аналогично предыдущему (доказательство теоремы 1), с учетом того, что для любого k $b+x_k=b$ получим:

$$b+\sum s_n=\sum b+s_n=\sum b+(x_1+...+x_n)=b,$$

откуда и следует доказываемое.

Доказанные выше свойства бесконечной суммы используются при доказательстве теоремы о наименьшем решении линейного уравнения

$$x=ax+b$$

или

$$x=xa+b,$$

которое определяется формулой $x=ba^*$, где $a^*=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ - итерация (или замыкание элемента a, для первого и $x=ba^*$ для второго уравнения в произвольном замкнутом полукольце (см. [12]).

Полукольца с итерацией

Полукольцо с итерацией – это подполукольцо некоторого замкнутого полукольца, содержащее вместе с каждым своим элементом его итерацию.

Таким будет, например, полукольцо регулярных языков в произвольном конечном алфавите [12], которое, как известно, не является замкнутым, так как не любая бесконечная последовательность регулярных языков имеет регулярную точную верхнюю грань. Достаточно заметить, что язык $\{a^nb^n : n\geq 0\}$, не будучи регулярным [19], может быть представлен как точная верхняя грань (в данном случае бесконечное объединение) последовательности регулярных языков (каждый член последовательности содержит одно слово a^nb^n при произвольно фиксированном n.

Мы докажем здесь, что компоненты решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+b_1 \\ x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n+b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n+b_n \end{cases} \qquad (1)$$

все коэффициенты которой принадлежат произвольному полукольцу с итерацией, принадлежат этому же полукольцу.

Теорема 3. Решение системы (1) есть вектор, компоненты которого принадлежат тому же полукольцу с итерацией, что и коэффициенты системы.

Доказательство. Индукция по порядку n системы (1).

При $n=1$ система становится уравнением вида

$$x=ax+b.$$

Решение (в данном случае наименьшее) этого уравнения, как было указано выше, выражается формулой $x = a^*b$, а так как итерация любого элемента полукольца с итерацией принадлежит этому же полукольцу, то решение также будет элементом этого полукольца.

Базис доказан.

Формулируя стандартно индукционное предположение, рассмотрим систему (1) порядка n. Выражая неизвестное x_1 через остальные согласно формуле

$$x_1 = a^*_{11}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1) \tag{2}$$

получим систему

$$\begin{aligned} x_k = (a_{k1}a^*_{11}\,a_{12} + a_{k2})x_2 + \ldots + (a_{k1}a^*_{11}\,a_{1k} + a_{kk})x_k + \ldots + \\ + (a_{k1}a^*_{11}\,a_{1n} + a_{kn})x_n + (a_{k1}a^*_{11}\,b_1 + b_k) \end{aligned} \tag{3}$$

при $k = 2,\ldots,n$, порядок которой равен $n-1$, а все ее коэффициенты принадлежат рассматриваемому полукольцу с итерацией. В силу индукционного предположения вектор решения этой системы состоит из компонент, принадлежащих рассматриваемому полукольцу с итерацией. Согласно формуле (2) тогда и компонента x_1 решения будет принадлежать этому же полукольцу.

Теорема доказана.

Можно также доказать, что метод последовательного исключения неизвестных при поиске решения системы (1), первый шаг которого описан в доказательстве теоремы 3, дает действительно наименьшее решение системы. Это будет доказано ниже. Здесь же мы доказали только замкнутость полукольца с итерацией относительно решений систем вида (1), получаемых согласно формулам (2) и (3).

Заметим, что само существование решения системы (1) доказано в [12].

Размеченные орграфы и автоматы над полукольцами

Пусть $G = \langle V, E \rangle$ - орграф, на множестве дуг которого (множестве E) определена функция разметки $\varphi\colon E \to S\backslash\{0\}$, где S - носитель какого-то полукольца $\mathsf{S} = (S,+,\cdot,0,1)$. Тогда орграф G будем называть ***орграфом, размеченным над полукольцом*** S. Будем пока считать полукольцо S замкнутым (потом это требование будет ослаблено: мы увидим, что достаточно потребовать, чтобы это полукольцо было полукольцом с итерацией). Принимается также, что значение функции разметки на любой дуге графа не равно нулю полукольца.

Заметим, что ссылка на графы в статье нужна лишь для получения определенных алгебраических результатов. Поэтому мы не прибегаем здесь к каким-то иллюстрациям, так как собственно графический аспект тут не является существенным.

Орграф G, размеченный над полукольцом S, может быть задан квадратной матрицей n-ого (где $n = |V|$) порядка $A = (a_{ij})_{n \times n}$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} \varphi((v_i, v_j)), (v_i, v_j) \in E \\ 0, (v_i, v_j) \notin E \end{cases}.$$

Эта матрица называется ***матрицей меток дуг размеченного орграфа***. Если полукольцо S есть двухэлементное полукольцо B, то матрица весов дуг есть не что иное, как матрица смежности вершин.

Определим понятие ***метки пути в размеченном орграфе***. Пусть $W = x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_m$ - путь конечной длины $m \geq 0$. Дугу $x_i \to x_{i+1}$ этого пути обозначим через e_{i+1}. Тогда если $m = 0$ (т.е. W есть путь нулевой длины), то метка $\varphi^*(W)$ этого пути равна, по определению, единице полукольца. Иначе,
$\varphi^*(W) = \varphi(e_1)\ \varphi(e_2) \ldots\ \varphi(e_m)$, т.е. *метка пути ненулевой длины определяется как произведение меток входящих в этот путь дуг (в порядке их прохождения)*.

Стоимость прохождения из вершины v_i ***в вершину*** v_j, обозначаемая $c(v_i, v_j)$ (или просто c_{ij}) есть, по определению, сумма меток всех путей (конечной длины), ведущих из вершины v_i в вершину v_j. Если множество всех путей из v_i в v_j конечно, то стоимость есть сумма в обычном смысле слова - *сумма элементов полукольца* S. Если указанное множество бесконечно (но, так как рассматриваются только пути конечной длины, счетно - как бесконечное множество конечных последовательностей), то стоимость (для *замкнутого* полукольца S) есть *точная верхняя грань* множества меток всех путей из v_i в v_j. Если вершина v_j недостижима из вершины v_i, то $c(v_i, v_j) = 0$ по определению.

Итак, в любом случае мы можем написать:

$$c_{ij} = \sum_{W: v_i \Rightarrow^* v_j} \varphi^*(W) \tag{4}$$

(принимая по определению, что в случае недостижимости вершины v_j недостижима из вершины v_i записанная выше сумма, вообще говоря, бесконечная, равна нулю полукольца).

Определим теперь полукольцо матриц, чтобы корректно описать вычисление матрицы $C = (c_{ij})_{n \times n}$ стоимостей.

Для любого (не обязательно замкнутого) полукольца $\mathsf{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ может быть определена алгебра $M_n(S) = (M_n(S), +, \cdot, 0, E)$ квадратных матриц n-го порядка, где операции над матрицами производятся, как в обычной матричной алгебре, но с учетом того, что сложение и умножение элементов понимается в смысле того полукольца, которому принадлежат эти элементы.

Тогда может быть доказана теорема:

Теорема 4. Алгебра $M_n(S) = (M_n(S), +, \cdot, 0, E)$ есть полукольцо, причем, если полукольцо $\mathsf{S} = (S, +, \cdot, 0, 1)$ замкнуто, то полукольцо матриц также замкнуто.

Доказательство приведено в [12].

Помимо матрицы стоимостей прохождения по всем путям в графе, может быть определена ограниченная матрица стоимостей прохождения по определенному множеству путей, например, по множеству путей заданной длины.

В общем случае можно определить для некоторого множества путей **P** стоимость прохождения из i-й вершины в j-ю по всем путям, принадлежащим множеству **P**, полагая в формуле (4), что суммирование идет только по путям из множества **P**.

Понятие ограниченной матрицы стоимостей будет использовано ниже.

Теорема 5. Матрица стоимостей C размеченного орграфа равна итерации (замыканию) матрицы A весов дуг:

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = A^*$$

Доказательство. Используя метод математической индукции, можно показать, что m-ая степень матрицы меток дуг, т.е. матрица A^m есть матрица стоимостей по всем путям длины m ($m \geq 0$).

Базис индукции уже доказан (мы рассмотрели случаи $m = 0,1,2$). Пусть доказываемое справедливо для всех $m \leq l-1, l \geq 1$. Обозначая произвольный элемент матрицы A^m через $a_{ij}^{(m)}$, получим

$$a_{ij}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l-1)} a_{kj} \cdot$$

Каждое слагаемое этой суммы есть произведение стоимости прохождения из вершины v_i в вершину v_k по всем путям длины $l-1$ (это, по предположению индукции, элемент $a_{ik}^{(l-1)}$) на элемент a_{kj} матрицы смежности вершин, который при условии $v_k \to v_j$ будет равен метке указанной дуги, а если такой дуги нет, то нулю полукольца. Это значит, что k-ое слагаемое написанной выше суммы (для фиксированного k) будет либо равно нулю, либо будет суммой меток всех путей длины l из вершины v_i в вершину v_j, последней дугой которого будет дуга $v_k \to v_j$.

Так как k пробегает все вершины графа, то сумма, выражающая элемент $a_{ij}^{(l)}$ будет ни чем иным, как суммой меток всех путей длины l из вершины v_i в вершину v_j, т.е. стоимостью прохождения из вершины v_i в вершину v_j по всем путям длины l.

Итак, сумма всех степеней матрицы A меток дуг размеченного орграфа будет матрицей стоимостей.

В некоторых работах [18] понятия размеченного над полукольцом орграфа и автомата над полукольцом отождествляются. Здесь же мы считаем целесообразным эти понятия несколько развести. А именно, автоматом над полукольцом S мы будем называть орграф, размеченный над этим полукольцом, в котором выделена вершина f, называемая заключительной и имеющая нулевую полустепень исхода. Под языком такого автомата над полукольцом будем понимать сумму компонент вектора стоимостей прохождения из вершин графа, отличных от f, в вершину f. Заметим, что такой автомат понимается как обобщение понятия конечного автомата [12], так как в статье [18] рассматривается и обобщение понятия магазинного автомата для произвольного замкнутого полукольца. Тогда, если ввести вектор-столбец $b=(b_1,\ldots,b_n)^T$, в котором компонента $b_k, 1\le k\le n,$ есть метка дуги, ведущей из k-ой вершины графа в вершину f, если таковая есть, и нулю полукольца в противном случае, то указанный вектор стоимостей будет как раз равен $A^*b = Cb$, то есть будет наименьшим решением системы (1).

Метод последовательного исключения неизвестных

В [12] подробно описан метод вычисления матрицы стоимостей с помощью последовательного вычисления матриц стоимостей по путям различных рангов.

Именно, ранг пути, ведущего из i-й вершины в j-ю, есть по определению наибольший номер вершины, лежащей на этом пути, не считая первой и последней (предполагается заранее заданной определенная нумерация вершин графа).

Принимается, что путь длины ноль, как и путь длины 1 (содержащий только одну дугу), имеет ранг, равный нулю.

Тогда элемент $c_{ij}^{(k)}$ матрицы стоимостей прохождения по путям ранга, не большего k, может быть записан в виде

$$c_{ij}^{(k)}=c_{ij}^{(k-1)}+c_{ik}^{(k-1)}(c_{kk}^{(k-1)})^*c_{kj}^{(k-1)}, k\ge 1,$$

где под знаком итерации находится стоимость прохождения по всем замкнутым путям, ранга, не большего $k-1$, проходящим через k-ю вершину (заметим, что в этих путях не допускается, следовательно, k-я вершина как промежуточная).

Записанная выше формула означает, что идти по пути ранга, не большего k, из i-й вершины в j-ю, можно либо «напрямую», минуя k-ю вершину (первое слагаемое), либо пройти сначала из i-й вершины в k-ю (исключая эту последнюю как промежуточную), потом «покрутиться» по упомянутым выше замкнутым путям сколько угодно раз, а может быть, и ни разу, после чего проследовать в j-ю вершину, опять-таки не «задевая» по пути k-ю.

При этом исходная матрица стоимостей по путям ранга 0, есть

$$C^{(0)} = A + E,$$

то есть все дуги и все пути нулевой длины (пути без промежуточных вершин).

Сейчас будет доказана теорема о том, что метод последовательного исключения неизвестных для решения системы (1) дает действительно наименьшее решение системы. Условно назовем этот метод методом Гаусса по аналогии с классическим методом решения числовых систем линейных уравнений. Мы увидим, что в процессе прямого хода алгоритма последовательно вычисляются стоимости путей возрастающих рангов, а в итоге значение неизвестной x_n определиться как стоимость прохождения из n-й вершины графа в заключительную вершину f, после чего обратный ход алгоритма даст стоимости прохождения в заключительную вершину из всех вершин графа, что и означает вычисление наименьшего решения системы (1).

Рассмотрим первый шаг «прямого хода» процедуры Гаусса. После подстановки выражения (2) во все уравнения системы (1) (начиная со второго) и приведения подобных членов получим:

$$\begin{aligned} x_k = (a_{k1}a*_{11}\, a_{12} + a_{k2})x_2 + \ldots + (a_{k1}a*_{11}\, a_{1k} + a_{kk})x_k + \ldots + \\ + (a_{k1}a*_{11}\, a_{1n} + a_{kn})x_n + (a_{k1}a*_{11}\, b_1 + b_k) \end{aligned} \qquad (3)$$

при $k = 2,\ldots,n$.

Обозначим через $a_{kj}^{(1)}, 2 \le k, j \le n$ коэффициент при x_j в k-ом уравнении. Ясно, что $a_{kj}^{(1)}$ есть не что иное, как стоимость прохождения из вершины q_k в вершину q_j по всем путям ранга, не большего 1, т.е. по всем путям, промежуточной вершиной которых может быть только вершина q_1. Свободный же член k-ого уравнения, обозначаемый $b_k^{(1)}$, есть стоимость прохождения из вершины q_k в вершину f по всем путям ранга, не большего 1.

По индукции легко доказать, что на $(n-1)$-ом шаге процедуры прямого хода получим уравнение относительно x_n:

$$x_n = a_{nn}^{(n-1)} x_n + b_n^{(n-1)},$$

где

$$a_{nn}^{(n-1)} = a_{n,n-1}^{(n-2)} (a_{n-1,n-1}^{(n-2)})^* a_{n-1,n}^{(n-2)} + a_{nn}^{(n-2)},$$

$$b_n^{(n-1)} = a_{n,n-1}^{(n-2)} (a_{n-1,n-1}^{(n-2)})^* b_{n-1}^{(n-2)} + b_n^{(n-2)}$$

суть стоимости прохождения из вершины q_n в нее же и в вершину f соответственно по всем путям ранга, не большего $n-1$.

Тогда наименьшее решение этого уравнения

$$x_n = (a_{nn}^{(n-1)})^* b_n^{(n-1)}$$

есть не что иное, как стоимость прохождения из вершины q_n в вершину f по всем путям ранга, не большего n, т.е. по всем путям. Но эта стоимость есть n-ая компонента наименьшего решения системы (1). Следовательно, в процессе вычислений «обратного хода» процедуры Гаусса мы получим наименьшие значения остальных неизвестных, т.е. метод последовательного исключения неизвестных действительно дает наименьшее решение системы (1).

Теорема 6. Метод последовательного исключения неизвестных как метод решения системы (1) дает наименьшее решение системы.

Замечания. 1. В выражении для стоимости по путям ранга не большего 1, так как матрица стоимостей по путям нулевого ранга равна $A+E$ должна стоять итерация суммы a_{11}+1, но она как нетрудно понять, совпадает с итерацией самого элемента a_{11}.

2. В приведенном выше доказательстве используется, конечно, и то, что вершина f не может быть промежуточной вершиной какого-либо пути – по построению нашего графа.

Рассмотренное доказательство позволяет понять, что «метод Гаусса» решения систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах есть модификация метода вычисления матрицы стоимостей размеченного орграфа через вычисление матриц стоимостей по путям различных рангов. Кроме того, понятно, что метод распространяется на полукольца с итерацией.

Заключение

Основной результат статьи – доказательство теоремы, согласно которой метод последовательного исключения неизвестных при решении систем линейных уравнений в полукольцах с итерацией (в частности, в замкнутых полукольцах) дает наименьшее решение системы. В процессе доказательства устанавливается связь между этим методом («методом Гаусса» для полуколец) и методом вычисления матрицы стоимостей для размеченного орграфа путем последовательного вычисления матриц стоимостей по путям возрастающих рангов. Оказывается, что эти два метода являются разными модификациями одного и того же алгоритма. В установлении такой связи состоит научная новизна результатов статьи.

Помимо изложенного в статье предлагается также методически обоснованная последовательность изложения элементов теории полуколец, а именно, доказываются важные свойства так называемой бесконечной суммы, на которых основана разрешимость линейных уравнений и систем линейных уравнений в полукольцах с итерацией, затем доказывается замкнутость полукольца с итерацией относительно решений линейных систем. Некоторые доказательства пересмотрены и существенно упрощены. В некоторых случаях более подробно рассматриваются детали, обычно опускаемые в учебных руководствах. В этом состоит методическое значение полученных результатов.

Список литературы

1. Варанкина В.И., Вечтомов Е.М. Функциональная алгебра и полукольца: результаты исследований 2016 года // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2017. № 19. С. 36-53.
2. Чермных В.В. Полукольцо натуральных чисел как базовая модель изучения полуколец // Вестник Вятского гос. гуманитарного ун-та. 2012. Т. 3. № 1. С. 62-65.
3. Izhakian Z., Knebusch M., Rowen L. Categories of layered semirings // Communications in Algebra. 2015. Vol. 43. No. 5. Pp. 1807-1836. DOI: 10.1080/00927872.2013.878838
4. Beasley L.B., Seok-Zun Song. Linear operators that preserve term ranks of matrices over semirings // Bull. of the Malaysian Math. Sciences Soc. 2014. Vol. 37. No. 3. Pp. 719-725. Режим доступа: http://math.usm.my/bulletin/pdf/v37n3p10.pdf (дата обращения 2.04.2018).
5. Katsov Y., Tran Giang Nam, Zumbragel J. On simpleness of semirings and complete semirings // J. of Algebra and its Applications. 2014. Vol. 13. No. 6. 29 p. DOI: 10.1142/S0219498814500157
6. Шматков В.Д. Изоморфизмы и автоморфизмы матричных алгебр над полукольцами // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19. № 6. С. 251-260. Режим доступа: www.mathnet.ru/links/eeeec85f67f4c531f513eb891d5cb796/fpm_1623.pdf (дата обращения 02.04.2018).
7. Вечтомов Е.М. Полукольца и их применения // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2014. № 16. С. 67-72.
8. Вечтомов Е.М., Варанкина В.И. Полукольца и их применения. III // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2015. № 17. С. 54-66.
9. Алешников С.И., Болтнев Ю.Ф., Език З., Ишанов С.А, Куих В. Формальные языки и автоматы VII: формальные ряды деревьев (часть I) // Вестник Балтийского федерального ун-та им. И. Канта. Сер.: Физико-матем. и техн. науки. 2011. № 10. С. 5-32.
10. Алешников С.И., Болтнев Ю.Ф., Език З., Ишанов С.А, Куих В. Формальные языки и автоматы V: пары полукольцо-полумодуль Конвея и конечные автоматы // Вестник Балтийского федерального ун-та им. И. Канта. Сер.: Физико-матем. и техн. науки. 2009. № 10. С. 6-42.
11. Никулина Н.С. Полукольцо перечисления всех простых путей в орграфе // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. № 13. С. 132-136.
12. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: учебник. 5-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 744 с.
13. Вечтомов Е.М., Петров А.А. Полукольца с идемпотентным умножением // Вестник Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2011. № 14. С. 21-32.

14. Блюмин С.Л., Жбанов С.А. Идемпотентная математика: некоторые предпосылки и приложения // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2011. № 2(24). С. 41-45.
15. Чупраков Д.В. Криптографические алгоритмы над абстрактными полукольцами // Электронные информационные системы. 2016. № 3(10). С. 90-96.
16. Николаев Д.А. Динамические системы с двумерным параметром над идемпотентными полукольцами для моделирования движения мультиагентных систем // Системы управления и информационные технологии. 2012. Т. 48. № 2. С. 22-26.
17. Вечтомов Е.М. Курс по выбору «Функциональная алгебра и полукольца» для аспирантов-математиков // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2-2. С. 318.
18. Kuich W. Automata and languages generalized to ω-continuous semirings // Theoretical Computer Science. 1991. Vol. 79. No. 1. Pp. 137-150. DOI: 10.1016/0304-3975(91)90147-T
19. Белоусов А.И. О методике изложения некоторых разделов теории формальных языков: леммы о разрастании // Инженерный вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 12. С. 1020-1031. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/828263.html (дата обращения: 23.12.15).

Mechanical Engineering & Computer Science
Electronic journal
http://www.technomagelpub.ru

Mechanical Engineering and Computer Science, 2018, no. 03, pp. 35–50.
DOI: **10.24108/0318.0001379**
Received: 28.02.2018

On Some Properties of Semi-rings

A.I. Belousov[1,*]
[*]al_belous@bk.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: semiring, closed semiring, semiring with iteration, cost matrix of labeled oriented graph, infinite sum, automaton over a semiring, rank of a path

The main objective of this paper is to prove a theorem according to which a method of successive elimination of unknowns in the solution of systems of linear equations in the semi-rings with iteration gives the really smallest solution of the system. The proof is based on the graph interpretation of the system and establishes a relationship between the method of sequential elimination of unknowns and the method for calculating a cost matrix of a labeled oriented graph using the method of sequential calculation of cost matrices following the paths of increasing ranks.

Along with that, and in terms of preparing for the proof of the main theorem, we consider the following important properties of the closed semi-rings and semi-rings with iteration.

We prove the properties of an infinite sum (a supremum of the sequence in natural ordering of an idempotent semi-ring). In particular, the proof of the continuity of the addition operation is much simpler than in the known issues, which is the basis for the well-known algorithm for solving a linear equation in a semi-ring with iteration.

Next, we prove a theorem on the closeness of semi-rings with iteration with respect to solutions of the systems of linear equations. We also give a detailed proof of the theorem of the cost matrix of an oriented graph labeled above a semi-ring as an iteration of the matrix of arc labels.

The concept of an automaton over a semi-ring is introduced, which, unlike the usual labeled oriented graph, has a distinguished "final" vertex with a zero out-degree.

All of the foregoing provides a basis for the proof of the main theorem, in which the concept of an automaton over a semi-ring plays the main role.

The article's results are scientifically and methodologically valuable. The proposed proof of the main theorem allows us to relate two alternative methods for calculating the cost matrix of a labeled oriented graph, and the proposed proofs of already known statements can be useful in presenting the elements of the theory of semi-rings that plays an important role in mathematical studies of students majoring in software technologies and theoretical computer science.

References

1. Varankina V.I., Vechtomov E.M. Functional algebra and semirings: the research results 2016. *Matematicheskij vestnik pedagogicheskikh vuzov i universitetov Volgo-Viatskogo regiona* [Mathematical Herald of Teacher Training Universities and Universities of the Volga-Vyatka region], 2017, no.19, pp. 36-53 (in Russian).
2. Chermnykh V.V. Semiring of natural numbers as a base model for studying semirings. *Vestnik Viatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* [Herald of Vyatka State Humanities Univ.], 2012, vol. 3, no. 1, pp. 62-65 (in Russian).
3. Izhakian Z., Knebusch M., Rowen L. Categories of layered semirings. *Communications in Algebra*, 2015, vol. 43, no. 5, pp. 1807-1836. DOI: 10.1080/00927872.2013.878838
4. Beasley L.B., Seok-Zun Song. Linear operators that preserve term ranks of matrices over semirings. *Bull. of the Malaysian Math. Sciences Soc.*, 2014, vol. 37, no. 3, pp. 719-725. Available at: http://math.usm.my/bulletin/pdf/v37n3p10.pdf, accessed 02.04.2018.
5. Katsov Y., Tran Giang Nam, Zumbragel J. On simpleness of semirings and complete semirings. *J. of Algebra and its Applications*, 2014, vol. 13, no. 6. 29 p. DOI: 10.1142/S0219498814500157
6. Shmatkov V.D. Semiring isomorphisms and automorphims of matrix algebras. *J. of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 221, no. 3, pp. 479-485. DOI: 10.1007/s10958-017-3239-1
7. Vechtomov E.M. Semirings and their applications. *Matematicheskij vestnik pedagogicheskikh vuzov i universitetov Volgo-Viatskogo regiona* [Mathematical Herald of Teacher Training Universities and Universities of the Volga-Vyatka region], 2014, no. 16, pp. 67-72 (in Russian).
8. Vechtomov E.M., Varankina V.I. Semirings and their applications.III. *Matematicheskij vestnik pedagogicheskikh vuzov i universitetov Volgo-Viatskogo regiona* [Mathematical Herald of Teacher Training Universities and Universities of the Volga-Vyatka region], 2015, no. 17, pp. 54-66 (in Russian).
9. Aleshnikov S.I.,Boltnev Yu.F., Ezik Z., Ishanov S.A., Kuich W. Formal languages and automata VII: Formal tree series (Part I). *Vestnik Baltijskogo federal'nogo universiteta im. I. Kanta. Ser.: Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Herald of I.Kant Baltic Federal Univ. Ser.: Physical, mathematical and technical sciences], 2011, no. 10, pp. 5-32 (in Russian).
10. Aleshnikov S.I.,Boltnev Yu.F., Ezik Z., Ishanov S.A., Kuich W. Formal languages and automata V: Conway semiring-semimodule pairs and finite automata. *Vestnik Baltijskogo federal'nogo universiteta im. I. Kanta. Ser.: Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* [Herald of I.Kant Baltic Federal Univ. Ser.: Physical, mathematical and technical sciences], 2009, no. 10, pp. 6-42 (in Russian).

11. Nikulina N.S. Semicircular enumeration of all simple paths in a digraph. *Matematicheskij vestnik pedagogicheskikh vuzov i universitetov Volgo-Viatskogo regiona* [Mathematical Herald of Teacher Training Universities and Universities of the Volga-Vyatka region], 2011, no. 13, pp. 132-136 (in Russian).
12. Belousov A.I., Tkachev S.B. *Diskretnaia matematika* [Discrete mathematics]: a textbook. 5th ed. Moscow: Bauman MSTU Publ., 2015. 744 p. (in Russian).
13. Vechtomov E.M., Petrov A.A. Semirings with idempotent multiplication. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Herald of Syktyvkar Univ. Ser.: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2011, no. 14, pp. 21-32 (in Russian).
14. Blyumin S.L., Zhbanov S.A. Idempotent mathematics: some of the prerequisities and application. *Vesti vysshykh uchebnykh zavedenij Chernozem'ia* [News of Higher Educational Institutions of the Chernozem Region], 2011, no. 2(24), pp. 41-45 (in Russian).
15. Chuprakov D.V. Cryptographic algorithms above the abstract semirings. *Elektronnye informatsionnye sistemy* [Electronic Information Systems], 2016, no. 3(10), pp. 90-96 (in Russian).
16. Nikolaev D.A. Dynamic systems with two-dimensional parameter over idempotent semirings for modelling the motion of multi-agent systems. *Sistemy upravleniia i informatsionnye tekhnologii* [Management Systems and Information Technology], 2012, vol. 48, no. 2, pp. 22-26 (in Russian).
17. Vechtomov E.M. Optional course "Functional algebra and semirings" for postgraduate students-mathematicians. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia* [Modern Problems of Science and Education], 2015, no. 2-2, p. 318 (in Russian).
18. Kuich W. Automata and languages generalized to ω-continuous semirings. *Theoretical Computer Science*, 1991, vol. 79, no. 1, pp. 137-150. DOI: 10.1016/0304-3975(91)90147-T
19. Belousov A.I. On the method of presentation of some sections of the theory of formal languages: the extension Lemma. *Inzhenernyj vestnik MGTU im. N.E. Baumana* [Engineering Bulletin], 2015, no. 12, pp. 1020-1031. Available at: http://engbul.bmstu.ru/doc/828263.html, accessed 23.12.2015 (in Russian).