

# Комплексный анализ

4 семестр, спец. ИУ9

## Литература

### Основная литература (ОЛ)

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного: Учебник: В 2-х ч. Ч. 1. – 4-е изд. – СПб.: Лань, 2004. – 336 с.
2. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. Учеб. Для вузов /Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 520с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. X).
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981.
4. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 2002. – 312 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973, – 736 с.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 444 с.

### Дополнительная литература (ДЛ)

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1967, – 304 с.
2. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1966. – 331 с.
3. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: Т.1, 2. – М.: Наука, 1968.
4. Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М.А. Евграфова. – М.: Наука, 1972, – 416 с.
5. Шабунин М., Половинкин Е., Карлов М. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006. – 362 с.
6. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. – М.: Мир, 2005. – 360 с.
7. Теория и практика конформных отображений: учеб. пособие / А.Н. Канатников, Е.Е. Красновский, В.Д. Морозова, К.Ю. Федоровский. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 88 с.

## ЛЕКЦИИ

### Модуль 1. Элементарная теория

*Лекции 1.* Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корней. Топология комплексной плоскости. Расширенная комплексная плоскость и её топология. Стереографическая проекция, сфера Римана. Понятие функции. Определение экспоненты. Предел функции. Непрерывность. Свойства пределов последовательностей и функций. Задачи на дом: [ОЛ-4]: 1.50, 1.55.

[ОЛ-1]: § 1, пп. 1-2; § 2, п. 5.

*Лекции 2.* Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Производная экспоненты. Определение голоморфной функции в области и в точке. Гармонические функции, их связь с голоморфными. Формальные производные. Свойства комплексной производной. Производная сложной и обратной функции. Производная по направлению. Геометрический смысл комплексной производной. Понятие конформного отображения. Дифференцируемость в бесконечности.

[ОЛ-1]: § 2, пп. 6-7.

*Лекции 3.* Дробно-линейные отображения (ДЛО) и их свойства. Геометрическая интерпретация (взаимно-однозначное отображение расширенной комплексной плоскости), конформность, групповое свойство.

[ОЛ-1]: § 3, п. 8.

*Лекции 4.* Геометрические свойства ДЛО: круговое свойство, сохранения симметричности относительно обобщенной окружности, свойство трёх точек.

[ОЛ-1]: § 3, пп. 9-10.

*Лекции 5.* Элементарные однозначные и многозначные функции. Их основные (максимальные) области конформности и однолиственности. Степенная функция и корень степени  $n$ . Экспонента и логарифм. Функция Жуковского. Тригонометрические, гиперболические и обратные тригонометрические функции. Общая степенная и показательная функции.

[ОЛ-1]: § 3, пп. 11-13.

*Лекции 6-7.* Основы теории конформных отображений (б/д). Пути и кривые в  $\mathbb{C}$ . Принцип сохранения области. Теорема Римана. Принцип соответствия границ и обратный принцип соответствия границ. Принцип симметрии Римана — Шварца.

[ОЛ-1]: § 1, п. 3; § 10, п. 34; § 11, п. 38; § 12, пп. 39-40.

## **Модуль 2. Ряды и контурные интегралы**

*Лекция 8.* Интеграл по комплексному переменному вдоль пути. Основные свойства интеграла. Независимость интеграла от выбора параметризации кривой. Интеграл вдоль кривой. Оценка интеграла. Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей.

[ОЛ-1]: § 1, п. 3; § 5, пп. 15-18.

*Лекция 9.* Комплексная первообразная. Теорема о существовании первообразной в односвязной области. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем.

[ОЛ-1]: § 5, пп. 18, 19.

*Лекция 10.* Ряды Тейлора. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля. Голоморфность суммы степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Единственность разложения в степенной ряд. Табличные разложения в ряд Маклорена. Интегральная формула Коши для производных. Теорема Морера. Эквивалентность голоморфности в смысле Римана, Коши и Вейерштрасса.

[ОЛ-1]: § 6, пп. 20, 21.

*Лекция 11.* Теорема о нулях голоморфных функций. Теорема об изолированности нуля из области голоморфности функции. Локальная теорема единственности, её следствия. Ряды Лорана, их правильные и главные части. Кольцо сходимости. Теорема Лорана. Теорема о единственности разложения в ряд Лорана и неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

[ОЛ-1]: § 6, п. 22; § 7, п. 24.

*Лекции 12-13.* Определение и классификация изолированных особых точек голоморфных функций. Характеризация их в терминах рядов Лорана. Теоремы об устранимой особой точке, о полюсе и о существенной особой точке. Определение и характеризация в терминах рядов Лорана изолированной особой точки в бесконечности. Вычисление вычета с помощью рядов Лорана. Свойства вычета в устранимой особой точке. Формула для вычисления вычета в полюсе. Теорема Коши о вычетах. Особая точка и вычет в бесконечности. Теорема Коши о полной сумме вычетов.

[ОЛ-1]: § 7, пп. 25, 26.

## **Модуль 3. Приложения ТФКП**

*Лекция 14.* Вычисление определенных и несобственных интегралов. Лемма Жордана. Теорема о логарифмическом вычете. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

[ОЛ-1]: § 5, п. 19; § 6, п. 23; § 11 п. 36.

*Лекция 15.* Принцип максимума модуля. Равномерная сходимости внутри области. Теоремы Вейерштрасса и следствие из нее для рядов: почленная дифференцируемость функциональных рядов. Целые и мероморфные функции. Теорема Сохоцкого. Малая и большая теорема Пикара (б/д). Принцип сохранения области.

[ОЛ-1]: § 7, пп. 25, 26; § 13 п. 42; § 11 пп. 34, 35.

*Лекция 16.* Аналитические продолжения. Элементы и их непосредственное аналитическое продолжение. Канонические элементы и их аналитическое продолжение вдоль пути, его единственность. Полная аналитическая функция (ПАФ) в смысле Вейерштрасса. Примеры  $\sqrt[n]{z}$  и  $\operatorname{Ln} z$ . Теорема о монодромии. Теорема Пуанкаре — Вольтера. Изолированные особые точки ПАФ, их классификация.

[ОЛ-1]: § 8, пп. 27, 28; § 9, пп. 29-30; § 10 п. 32; [ОЛ-5]: гл. 5, § 5, пп. 25, 26; [ОЛ-6]: гл. 10, § 1, 2.

## **Практические занятия**

### **Модуль 1. Элементарная теория**

*Занятия 1.* Операции над комплексными числами: сложение и вычитание, умножение и деление. Сопряженные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма записи. Возведение в степень и извлечение корня, формула Муавра. Множества в комплексной плоскости. Элементарные функции и их свойства.

Ауд.: [ОЛ-3]: 5, 9(б), 10(б), 12(в), 16(г), 23(а), 28(а); [ОЛ-4]: 1.64 (2,3), 1.58 (1,2,3).

Дома: [ОЛ-3]: 3, 8, 9(в,г), 10(в), 12(б), 21(а), 26; [ОЛ-4]: 1.64 (1), 1.50, 1.51(4), 1.55.

*Занятия 2.* Выделение действительной и мнимой части, модуля и аргумента функции комплексного переменного. Числовые выражения элементарных функций. Стереографическая проекция.

Ауд.: [ОЛ-4]: 1.66 (1), 1.49, 1.52, 1.51(1,6); [ОЛ-3]: 52 (а,в), 53 (а), 57 (а,в,д), 58 (г), 59 (а), 60 (а,д).

Дома: [ОЛ-4]: 1.65, 1.69, 1.66 (2); [ОЛ-3]: 52 (б,ж,е), 56, 57 (б,г,е), 58 (д), 59 (б), 60 (в,ж,е).

*Занятие 3.* Дифференцируемость функций комплексного переменного и восстановление голоморфной функции по ее действительной или мнимой части. Числовые и степенные ряды.

Ауд.: [ОЛ-3]: 76(а), 80(а,г), 146, 156, 81(а), 82(б); [ОЛ-4]: 1.132(1), 1.138.

Дома: [ОЛ-3]: 75(б), 76(б), 79, 80(б,в), 137, 141, 148, 149, 155, 81(б,в), 82(а,г); [ОЛ-4]: 1.133, 1.137, 3.40, 3.44.

*Занятие 4.* Дробно-линейные отображения и их свойства; применение ДЛЮ к конформным отображениям областей.

Ауд.: [ОЛ-4]: 2.17(2), 2.18(3), 2.16(1,3), 2.21(1), 2.24(1), 2.25(1), 2.28(1), 2.29.

Дома: [ОЛ-4]: 2.17(1), 2.18(1,2), 2.16(2), 2.20, 2.21(3), 2.24(2), 2.25(3), 2.30.

*Занятие 5.* Применение элементарных функций к конформным отображениям областей. Перевод различных областей в верхнюю полуплоскость посредством конформных однолистных отображений.

Ауд.: [ОЛ-4]: 2.86(2), 2.91(1), 2.93, 2.99, 2.104(1),

2.158, 2.160, 2.163(1), 2.166, 2.169, 2.116.

Дома: [ОЛ-4]: 2.87(1), 2.89, 2.96, 2.100, 2.104(2), 2.117, 2.157, 2.159, 2.164, 2.167.

*Занятие 6.* Подготовка к рубежному контролю.

Ауд.: [ОЛ-4]: 1.132(1), 3.42, 3.46, 3.49; [ОЛ-3]: 185, 150, 152, 154.

Дома: [ОЛ-4]: 1.131, 1.132(2), 1.137, 2.90(1), 2.103, 2.116, 2.165, 2.173; [ОЛ-3]: 186, 147, 151, 153.

*Занятие 7.* Рубежный контроль по модулю.

## Модуль 2. Ряды и контурные интегралы

*Занятие 8.* Интегрирование функций комплексного переменного. Теорема и формула Коши. Вычисление интегралов с их помощью.

Ауд.: [ОЛ-3]: 89, 91, 103, 116, 118, 130, 134, 131, 122, 126.

Дома: [ОЛ-3]: 90, 99(а,б), 104, 108, 119, 123, 125, 127, 129.

*Занятие 9.* Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана.

Ауд.: [ОЛ-3]: 158, 165, 181, 215, 202, 219.

Дома: [ОЛ-3]: 164, 167, 178, 216, 203, 220.

*Занятие 10-11.* Нули голоморфных функций. Особые точки и их классификация. Вычеты, их вычисление. Вычисление интегралов при помощи вычетов.

Ауд.: [ОЛ-3]: 222(а), 223(б), 227, 235(а), 236(б), 237(а), 240(а), 241(б), 253, 255, 259, 270, 271.

Дома: [ОЛ-3]: 223(а), 228, 234, 235(б,в), 236(а), 237(б), 240(б,в), 241(а,в), 245, 252, 254, 256, 272, 273.

*Занятие 12.* Вычет в бесконечной точке. Вычисление интегралов при помощи вычетов внутри и снаружи области.

Ауд.: [ОЛ-3]: 249, 251, 263, 267, 274, 278, 285, 287; [ОЛ-4]: 4.117, 4.116;

Задача:  $\int \lim_{|z|=2} \frac{z^{13}-1}{(z^7-1)} dz$

Дома: [ОЛ-3]: 260, 264, 268, 280, 282, 286, 288; [ОЛ-4]: 4.118, 4.122, 4.119;

Задача:  $\int \lim_{|z+1|=3} \frac{z^{17}+3}{(z^9+1)} dz$

*Занятие 13.* Рубежный контроль по модулю.

## Модуль 3. Приложения ТФКП

*Занятие 14.* Вычисление вещественных интегралов, содержащих тригонометрические функции, и интегралов по вещественной прямой с помощью леммы Жордана.

Ауд.: [ОЛ-3]: 289, 291, 299, 301, 310, 319, 322, 324.

Дома: [ОЛ-3]: 293, 295, 297, 302, 308, 309, 321, 325.

*Занятие 15.* Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Ауд.: [ОЛ-3]: 331, 332, 336, 343, 346, 349, 350.

Дома: [ОЛ-3]: 333, 334, 335, 344, 345, 347, 348, 351.

*Занятие 16.* Рубежный контроль по модулю.

## КОНТРОЛЬНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ

**Модуль 1. Элементарная теория** (1–7 недели).

Рубежный контроль по модулю 1 (7 неделя).

**Модуль 2. Ряды и контурные интегралы** (8–13 недели).

Рубежный контроль по модулю 2 (13 неделя).

**Модуль 3. Приложения ТФКП** (14–17 недели).

Рубежный контроль по модулю 3 (16 неделя).

Кафедра  
Ответственный по кафедре  
Автор документа  
Телефон

ФН-12  
А.Н. Канатников  
Я.А. Киндеркнехт, В.Н. Четвериков  
(499) 263-62-88