Пример. Вычислим интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=2} e^{z^2} \frac{1+z}{z^2(1-z^2)}\, dz\ .$$

Внутри области $\{|z| < 2\}$ подынтегральная функция $f(z)$ имеет 3 особые точки: $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1$, вне — ни одной. Поэтому используем метод интегрирования по внешности. А именно, по теореме Коши о вычетах имеем

$$\oint\limits_{|z|=2} e^{z^2} \frac{1+z}{z^2(1-z^2)}\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{3} \operatorname{res} f(z_j)\ .$$

С другой стороны, по теореме Коши о полной сумме вычетов имеем $\sum_{j=1}^{3} \operatorname{res} f(z_j) + \operatorname{res} f(\infty) = 0$. Поэтому искомый интеграл равен $-2\pi i \operatorname{res} f(\infty)$.

Вычислим вычет в ∞. Для этого разложим функцию $f(z)$ в ряд в ∞. В окрестности ∞ имеем:

$$e^{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!}, \qquad \frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z^2(1-z^{-2})} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n},$$

где мы используем разные индексы суммирования (k и n), чтобы перемножить эти ряды на следующем шаге. А именно,

$$f(z) = -\frac{1+z}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n} = -\left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2k-2n}}{k!} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2k-2n-4}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2k-2n-3}}{k!}.$$

Найдем все слагаемые с z^{-1}. В ряде

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2k-2n-4}}{k!}$$

— это слагаемые, для которых $2k - 2n - 4 = -1$. Но таких нет, так как $2k - 2n - 4$ — четное число, а -1 — нечетное. В ряде

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2k-2n-3}}{k!}$$

— это слагаемые, для которых $2k - 2n - 3 = -1$, т.е. $n = k - 1$ и $k \geq 1$. Поэтому

$$c_{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}, \qquad \operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

и

$$\oint\limits_{|z|=2} e^{z^2} \frac{1+z}{z^2(1-z^2)}\, dz = -2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\ .$$