

## Математический анализ, ИУ9, 1-й семестр

### Вопросы для подготовки к коллоквиуму "Введение в анализ"

1. Дать определения множества, его элементов, пустого и универсального множества. Опишите основные способы задания множеств. (2 балла)
2. Дать определение равенства множеств и определение подмножества. Сформулировать метод двух включений для доказательства теоретико-множественных равенств. (2 балла)
3. Дать определение основных операций над множествами. Сформулировать некоторые их свойства. (2 балла)
4. Дать определения отображения (функции), образа и прообраза подмножеств. (2 балла)
5. Дать определение инъекции, сюръекции и биекции. (2 балла)
6. Дать определение композиции и обратного отображения. (2 балла)
7. Доказать, что композиция биекций есть биекция. (2 балла)
8. Доказать, что биекция и только она имеет обратное отображение. (4 балла)
9. Дать определение логического высказывания. Сформулировать основные операции над высказываниями. (2 балла)
10. Сформулировать правило построения отрицания сложных логических высказываний, содержащих кванторы. Используя это правило, дать определение неограниченного числового множества. (2 балла)
11. Дать определение математической теоремы как логического высказывания. Сформулировать прямое доказательство теоремы и доказательство от противного. (2 балла)
12. Сформулировать принцип математической индукции. Используя его, доказать неравенство Бернулли. (4 балла)
13. Доказать формулу бинома Ньютона. (4 балла)
14. Сформулировать свойство полноты вещественных чисел. (2 балла)
15. Дать определение точной верхней и нижней грани числового множества. (2 балла)
16. Доказать теорему о точной грани. (4 балла)
17. Дать геометрическую интерпретацию вещественных чисел. (2 балла)
18. Доказать теорему о вложенных отрезках. (4 балла)
19. Дать определение мощности множества и счетного множества. Привести примеры. (2 балла)
20. Доказать теорему о мощности конечных множеств. (4 балла)
21. Доказать, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно. (4 балла)
22. Доказать, что объединение конечного или счетного семейства счетных множеств счетное. (4 балла)
23. Доказать, что множество рациональных чисел счетное. (4 балла)
24. Дать определение мощности континуум. Привести примеры. (2 балла)
25. Доказать, что множество действительных чисел отрезка  $[0, 1]$  не есть счетное множество. (4 балла)
26. Как сравниваются мощности множеств? Сформулировать теорему Кантора — Бернштейна. (2 балла)
27. Сформулировать теорему о сравнении мощности множества и мощности множества всех его подмножеств. Сформулировать следствие из нее. (2 балла)
28. Дать определения числовой последовательности и ее предела. (2 балла)
29. Доказать теорему о пределе постоянной последовательности. (2 балла)
30. Доказать теорему об ограниченности сходящейся последовательности. Привести пример использования этого факта. (4 балла)
31. Доказать теорему о единственности предела. (2 балла)
32. Дать определения монотонной и строго монотонной последовательности. (2 балла)
33. Доказать теорему о сходимости ограниченной монотонной последовательности. Привести пример ее применения. (4 балла)

34. Дать определения числа  $\epsilon$ , как предела последовательности рациональных чисел, доказав сходимость этой последовательности. (4 балла)
35. Дать определение частичного предела последовательности. (2 балла)
36. Доказать теорему Больцано - Вейерштрасса. (4 балла)
37. Дать определения верхнего и нижнего пределов последовательности. (2 балла)
38. Доказать теорему о существовании верхнего и нижнего пределов для ограниченной последовательности. (4 балла)
39. Доказать критерий Коши сходимости последовательности. Привести пример его применения. (4 балла)
40. Дать определение открытого покрытия подмножеств прямой. (2 балла)
41. Доказать теорему о конечном покрытии. (4 балла)
42. Дать определение предельной точки подмножества прямой. (2 балла)
43. Доказать теорему о предельной точке. (4 балла)
44. Дать определение компакта на прямой. (2 балла)
45. Дать определения внутренних и предельных точек множества. (2 балла)
46. Доказать теорему о внутренности открытых множеств. (4 балла)
47. Доказать теорему о замыкании замкнутых множеств. (4 балла)
48. Доказать теорему о замкнутости компакта. (4 балла)
49. Доказать теорему об ограниченности компакта. (4 балла)
50. Доказать теорему о компактности замкнутого ограниченного числового множества. (4 балла)