

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РК-2 ПО ТЕМЕ  
“ИНТЕГРАЛЫ С ПАРАМЕТРОМ, РЯДЫ ФУРЬЕ”  
для ИУ-9, 3 семестр, лектор Четвериков В.Н., 2020 г.

1. Для функции двух аргументов дать определение равномерной сходимости (по одному из аргументов). Сформулировать и доказать критерий Коши равномерной сходимости функции по одному из аргументов.
2. Для функции двух аргументов сформулировать и доказать теорему о перестановке предельных переходов.
3. Сформулировать и доказать теорему о переходе к пределу под знаком собственного интеграла с параметром.
4. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности собственного интеграла с параметром.
5. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании собственного интеграла по параметру.
6. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании собственного интеграла по параметру.
7. Сформулировать определение равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром. Сформулировать и доказать критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром.
8. Сформулировать и доказать признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром.
9. Сформулировать и доказать признак Дини равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром.
10. Сформулировать и доказать признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром.
11. Сформулировать и доказать признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром.
12. Сформулировать и доказать теорему о переходе к пределу под знаком несобственного интеграла с параметром.
13. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности несобственного интеграла с параметром.
14. Сформулировать и доказать теорему о дифференцируемости несобственного интеграла с параметром.

15. Сформулировать и доказать теорему о собственном интегрировании несобственного интеграла с параметром.
16. Сформулировать и доказать теорему о несобственном интегрировании несобственного интеграла с параметром.
17. Дать определение гамма- и бета-функций Эйлера. Описать их свойства и связь. Вывести формулу для вычисления  $\Gamma(n + 1)$ .
18. Дать определения ортогональной и ортонормированной систем векторов евклидова пространства. Определить скалярное произведение в пространстве интегрируемых на отрезке функций. Сформулировать и доказать минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье по ортогональной системе (решение задачи о наилучшей аппроксимации).
19. Сформулировать и доказать теорему о сходимости по норме ряда по ортонормированной системе. Сформулировать и доказать теорему о неравенстве Бесселя. Сформулировать и доказать теорему о равенстве Парсеваля.
20. Определить понятия полноты и замкнутости ортогональных систем векторов. Доказать, что из замкнутости ортогональной системы следует ее полнота. Дать определение полного евклидова пространства. Доказать, что интегрируемые на отрезке функции образуют неполное евклидово пространство. Дать определение гильбертова пространства. Доказать, что в гильбертовом пространстве любая полная ортогональная система замкнута.
21. Сформулировать теорему Вейерштрасса об аппроксимации многочленами. Показать, что многочлены Лежандра образуют ортогональную систему в пространстве интегрируемых на отрезке функций.
22. Сформулировать теорему Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими многочленами. Доказать ортогональность тригонометрической системы. Показать, что тригонометрический ряд Фурье есть ряд по ортогональной системе в пространстве интегрируемых на отрезке функций.
23. Сформулировать и доказать теорему о равномерной сходимости тригонометрического ряда. Вывести формулы для коэффициентов ряда Фурье по косинусам (синусам) на произвольном отрезке.
24. Сформулировать и доказать две теоремы о связи дифференцируемости суммы тригонометрического ряда Фурье с порядком малости его коэффициентов.
25. Сформулировать и доказать теорему о замкнутости тригонометрической системы в пространстве интегрируемых на отрезке функций.
26. Вывести формулу связи частичных сумм тригонометрического ряда Фурье с ядром Дирихле. Сформулировать и доказать свойства ядра Дирихле.

27. Сформулировать и доказать лемму Римана и теорему Дини о сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
28. Дать определения кусочно-непрерывных и кусочно-гладких на отрезке функций. Сформулировать и доказать основную теорему о сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Сформулировать следствие о локальности тригонометрического ряда Фурье. Вывести комплексную форму записи тригонометрического ряда Фурье.
29. Сформулировать теорему об интегральной формуле Фурье. Привести схему ее доказательства. Вывести формулу Фурье в комплексной форме. Дать определение прямого и обратного преобразования Фурье. Сформулировать и доказать теорему о дифференцировании оригинала.