ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ ПО МОДУЛЮ IV “КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ” КУРСА “МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ”,

для ИУ9, 3 семестр, лектор Четвериков В.Н., 2014 г.

1. *(3 балла)* Дать определение криволинейного интеграла первого рода. Показать, что масса неднородной нити равна криволинейному интегралу первого рода. Сформулировать и доказать теорему о сведéнии криволинейного интеграла первого рода к обыкновенному определенному интегралу.

2. *(3 балла)* Дать определение криволинейного интеграла второго рода. Показать, что работа переменной силы на криволинейном пути равна криволинейному интегралу второго рода. Сформулировать и доказать теорему о связи криволинейных интегралов первого и второго рода.

3. *(3 балла)* Дать определение криволинейного интеграла второго рода. Показать, что работа переменной силы на криволинейном пути равна криволинейному интегралу второго рода. Сформулировать и доказать теорему о сведéнии криволинейного интеграла второго рода к обыкновенному определенному интегралу.

4. *(4 балла)* Сформулировать и доказать теорему (формулу) Грина для односвязной области.

5. *(4 балла)* Сформулировать и доказать теорему (формулу) Грина для многосвязной области.

6. *(4 балла)* Сформулировать и доказать теорему об условиях независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования.

7. *(4 балла)* Сформулировать и доказать формулу Ньютона–Лейбница для криволинейного интеграла на плоскости. Вычисление криволинейного интеграла по замкнутому контуру с помощью циклических постоянных.

8. *(3 балла)* Дать определения параметрически заданной поверхности, криволинейных координат на поверхности. Вывести формулу для вычисления нормального вектора к параметрически заданной поверхности.

9. *(3 балла)* Вывести формулу для вычисления площади параметрически заданной поверхности. Рассмотреть также частный случай поверхности, заданной уравнением $z = z(x, y)$.

10. *(3 балла)* Дать определение поверхностного интеграла первого рода. Показать, что масса искривленной пластины равна поверхностному интегралу первого рода. Сформулировать и доказать теорему о сведéнии поверхностного интеграла первого рода к двойному.

11. *(3 балла)* Дать определения двусторонней и односторонней поверхности, ориентации двусторонней поверхности. Определить поверхностный интеграл второго рода. Показать, что количество жидкости, протекающей через поверхность, равна поверхностному интегралу второго рода.

12. *(3 балла)* Сформулировать и доказать теорему о взаимосвязи поверхностных интегралов первого и второго рода.

13. *(4 балла)* Сформулировать и доказать теорему (формулу) Остроградского–Гаусса о связи поверхностного интеграла с тройным.

14. *(4 балла)* Сформулировать и доказать теорему (формулу) Стокса о связи криволинейного интеграла с поверхностным.

15. *(4 балла)* Сформулировать и доказать теорему об условиях независимости криволинейного интеграла в пространстве от пути интегрирования.

16. *(3 балла)* Дать определение векторных линий и векторных трубок векторного поля. Вывести уравнения векторных линий. Дать определение потока и дивергенции векторного поля. Сформулировать инвариантное описание дивергенции. Дать определение циркуляции и ротора векторного поля. Сформулировать инвариантное описание ротора. Найти ротор постоянного векторного поля и векторного поля вращения вокруг оси.

17. *(3 балла)* Дать определение оператора Гамильтона и векторных дифференциальных операторов второго порядка. Дать определение специальных векторных полей. Сформулировать их свойства. Вывести формулу для градиента в триортогональной системе координат.

18. *(3 балла)* Дать определение криволинейных координат, координатной сетки, триортогональной системы координат, коэффициентов Ламе триортогональной системы координат. Показать, что цилиндрическая и сферическая системы координат являются триортогональными. Вычислить их коэффициенты Ламе. Вывести формулу для градиента в цилиндрической и сферической системах координат.

Задачи.

1. *(3 балла).* Найти поток векторного поля $\vec{F}(x,y,z) = (8x-\sin z)^2 y\tilde{\mathbf{i}} + e^x z^2\tilde{\mathbf{j}} - 2xyz\tilde{\mathbf{k}}$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую конечный объём V, заданный пересечением поверхностей $z = 2x^2+2y^2$, $z = 2$, $y = 2x$, $y = 0$ $(x \geq 0\ ,\ y \geq 0)$.

2. *(3 балла).* Найти поток векторного поля $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\tilde{\mathbf{i}} + (x^2+y^2)\tilde{\mathbf{j}} + (x+1)(z+1)\tilde{\mathbf{k}}$ через поверхность $\Sigma\ :\ x - z = 1$, вырезаемую плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

3. *(3 балла).* Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}(x,y,z) = yz^2\,\tilde{\mathbf{i}} + 2xz^2\,\tilde{\mathbf{j}} + (y^2 z)\,\tilde{\mathbf{k}}$ по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей $x^2+y^2 = 4$, $z = 2x^2+2y^2$.

4. *(3 балла).* Найти работу силы $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\tilde{\mathbf{i}} + y\tilde{\mathbf{j}} + (x+y+z)\tilde{\mathbf{k}}$ при перемещении материальной точки вдоль прямой из точки $A(0,0,0)$ в точку $B(1,1,1)$.