

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РУБЕЖНОМУ КОНТРОЛЮ ПО МОДУЛЮ  
III “КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ” КУРСА “МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ” для  
ИУ-9, 3 семестр, лектор Четвериков В.Н.

**Теория.**

1. Дать определение меры Жордана, измеримого плоского множества, множества меры нуль. Сформулировать и доказать критерий измеримости плоского множества. *(3 балла)*
2. Дать определение меры Жордана, измеримого множества, множества меры нуль в  $\mathbb{R}^n$ . Сформулировать свойства меры Жордана. Доказать свойства полуаддитивности верхней и нижней меры Жордана и теорему сложения. *(3 балла)*
3. Дать определение двойного интеграла. Сформулировать свойства двойного интеграла. Доказать теорему о среднем. *(3 балла)*
4. Дать определение сумм Дарбу для двойного интеграла, перечислить их свойства. Сформулировать и доказать критерий существования двойного интеграла. *(3 балла)*
5. Сформулировать критерий существования двойного интеграла в терминах сумм Дарбу. Сформулировать и доказать теорему об интегрируемости непрерывной функции на измеримом компакте. *(3 балла)*
6. Сформулировать критерий существования двойного интеграла в терминах сумм Дарбу. Сформулировать и доказать теорему об интегрируемости функции непрерывной на измеримом компакте всюду, кроме множества меры нуль. *(3 балла)*
7. Сформулировать и доказать теорему о сведении двойного интеграла к повторному. *(3 балла)*
8. Дать определение диффеоморфизма областей  $\mathbb{R}^n$ . Доказать неравенство нулю якобиана диффеоморфизма. Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле. Вывести формулу перехода к полярным координатам в двойном интеграле. *(3 балла)*
9. Дать определение диффеоморфизма областей  $\mathbb{R}^n$ . Доказать неравенство нулю якобиана диффеоморфизма. Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле. Вывести формулу перехода к цилиндрическим координатам в тройном интеграле. *(3 балла)*
10. Дать определение диффеоморфизма областей  $\mathbb{R}^n$ . Сформулировать теорему о замене переменных в кратном интеграле. Вывести формулу перехода к сферическим координатам в тройном интеграле. *(3 балла)*

11. Сформулировать и доказать формулу замены переменных в двойном интеграле. (3 балла)
12. Дать определение исчерпания множества и несобственного кратного интеграла. Сформулировать и доказать теорему о несобственном интеграле от интегрируемой функции по измеримому множеству. (3 балла)
13. Дать определение исчерпания множества и несобственного кратного интеграла. Сформулировать и доказать теорему о несобственном интеграле от неотрицательной функции. Сформулировать признак сравнения. (3 балла)
14. Дать определение абсолютной сходимости несобственного кратного интеграла. Сформулировать теорему о связи абсолютной сходимости и сходимости несобственного кратного интеграла. Привести схему ее доказательства. Доказать, что из абсолютной сходимости следует сходимость. (3 балла)
15. Расстановка пределов в несобственном интеграле по прямоугольной неограниченной области. Сформулировать и доказать теорему о перестановке пределов в несобственном повторном интеграле. (3 балла)

### Примеры задач.

1. В повторном интеграле  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$  а) изменить порядок интегрирования; б) перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным (3 балла).
2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:  $z = x^2 + y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$ . (3 балла)