

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ  
ПО КУРСУ "Дифференциально-геометрические методы"  
для магистров ФН-12, 2018 г. ЛЕКТОР: Четвериков В.Н.

1. Дифференциальные формы. Определение базиса модуля дифференциальных 1-форм. Леммы о дополнении и о функциональной зависимости. Задача построения базиса из точных 1-форм. Внешнее произведение  $p$ -формы и 1-формы. Лемма Пуанкаре и теорема Фробениуса на языке 1-форм и  $p$ -форм. Привести пример применения теоремы Фробениуса.
2. Два способа описания нелинейных отображений вход–выход. Уравнения отображения вход–выход и уравнения состояния. Задачи перехода от одного описания к другому. Построение уравнений отображения вход–выход методом исключения переменных состояния и методом приведения к нормальной формы. Привести пример.
3. Два способа описания нелинейных отображений вход–выход. Уравнения отображения вход–выход и уравнения состояния. Задача реализации: построение уравнений состояния по уравнениям отображения вход–выход. Вычисление модулей  $\mathcal{H}_k$  дифференциальных 1-форм. Теорема о реализациях отображений вход–выход. Привести пример.
4. Первые интегралы систем. Теорема о связи первых интегралов системы с управлением и модуля  $\mathcal{H}_\infty$ . Алгоритм вычисления первых интегралов систем. Привести пример.
5. Минимальные реализации систем управления. Определение и алгоритм вычисления минимальной реализации. Привести пример.
6. Определения достижимости, управляемости и наблюдаемости систем. Сформулировать ранговое условие управляемости и определения достижимых состояний и локально наблюдаемых систем. Связь введенных локальных и глобальных понятий. Сформулировать локальные условия достижимости, управляемости и наблюдаемости.
7. Динамическая обратная связь, динамически линеаризуемые и плоские системы с управлением. Их связь. Сформулировать теорему о проверке заданного выхода на плоскостность. Сформулировать теорему и алгоритм построения динамической обратной связи, линеаризующей плоскую систему. Привести примеры.
8. Сформулировать задачи терминального управления и стабилизации. Описать метод динамической обратной связи для решения этих задач. Привести пример.
9. Сформулировать задачу параметрической идентификации и два подхода к решению этой задачи. Преимущества и недостатки этих подходов.
10. Сформулировать определение обратимых систем справа и слева. Структурные коэффициенты системы с входом и выходом. Условия существования и построение обратных справа систем.
11. Нормальные формы систем вход–выход. Алгоритм построения нормальной формы.
12. Задачи автономного регулирования и изоляции помех. Формулировка условий разрешимости и алгоритмы решения.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Найти уравнения отображения вход–выход

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2, \end{cases} \quad y = x_2; \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 u + x_3, \end{cases} \quad y_1 = x_1 - x_2.$$

2. Построить реализацию отображения вход-выход

$$\text{a) } \ddot{y} = y^2 + \frac{\ddot{u}}{y}; \quad \text{b) } \ddot{y} = y - \dot{u} \cos y + \dot{y}u \sin y.$$

3. Найти минимальную реализацию отображения вход-выход

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad & \ddot{y} = y(\ddot{u} + \dot{u}^2), \quad y(0) = -1, \dot{y}(0) = 0, u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1. \\ \text{b) } \quad & \ddot{y} = \dot{u}(\sin y - 2) + u\dot{y} \cos y, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1, u(0) = -1. \end{aligned}$$

4. Проверить ранговое условие управляемости и найти область локальной управляемости для системы

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = x_1 u - x_2, \end{cases} \quad y = x_1; \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 u \\ \dot{x}_3 = x_1, \end{cases} \quad y = x_2 + x_3.$$

Проверить условие локальной наблюдаемости и найти область локальной наблюдаемости системы.

5. Проверить, что выход  $(y_1, y_2)$  системы является плоским. Построить динамическую обратную связь, линеаризующую эту плоскую систему.

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 u_2 \\ \dot{x}_2 = u_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = u_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_3, \\ y_2 = x_1 - x_2 u_1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 + 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_3 - x_1 x_2. \end{cases}$$

6. Построить нормальную форму системы

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 + u_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 x_2 - x_3; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 u_2 - x_1 + u_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_3. \end{cases}$$

Построить правообратную систему или показать, что она не существует.

7. Решить задачу автономного регулирования для системы

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 + u_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_2; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 + u_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = x_2. \end{cases}$$

8. Решить задачу изоляции помех  $(w)$  для системы

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 u_1 + u_2 \\ \dot{x}_3 = u_2 \\ \dot{x}_4 = x_2 u_2 + w, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 u_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 u_1 - x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 + x_3 w \\ \dot{x}_4 = x_2 - x_3 w, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_3 + x_4. \end{cases}$$