ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К РК

ПО КУРСУ "Дифференциально-геометрические методы теории управления"
для бакалавров ФН-12, 7-й сем., 2020 г. ЛЕКТОР: Четвериков В.Н.

1. *(12 баллов).* Определение и примеры внешних форм в линейном пространстве. Определить внешнее произведение внешних форм. Сформулировать его свойства. Доказать критерий линейной зависимости 1-форм.

2. *(12 баллов).* Определение и примеры внешних форм в линейном пространстве. Определить внешнее произведение внешних форм. Сформулировать его свойства. Доказать теорему о базисе пространства p-форм.

3. *(12 баллов).* Определить внутреннее произведение вектора и внешней формы. Доказать, что результатом внутреннего умножения является внешняя форма. Определить отображение внешних форм, индуцированного линейным отображением пространства. Сформулировать свойства индуцированного отображения.

4. *(12 баллов).* Определение гладкого отображения многообразий (областей пространства $\mathbb{R}^n$) и индуцированного отображения гладких функций, их свойства. Определение $\mathbb{R}$-алгебры и гомоморфизма $\mathbb{R}$-алгебр. Показать, что гладкие функции на многообразии образуют $\mathbb{R}$-алгебру, а индуцированное отображение есть гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр.

5. *(12 баллов).* Три подхода к определению касательного вектора, их эквивалентность. Касательные пространство и расслоение. Определить дифференциал отображения. Доказать формулу связи дифференциала и индуцированного отображения.

6. *(12 баллов).* Определение векторного поля и модуля. Показать, что векторные поля на многообразии образуют модуль над $\mathbb{R}$-алгеброй гладких функций. Сформулировать теорему о гладких отображениях векторных полей. Вывести следствие из нее для диффеоморфизмов.

7. *(12 баллов).* Определение интегральной кривой и фазового потока векторного поля. Сформулировать свойства фазового потока. Доказать теорему о связи действия на функции векторного поля и его фазового потока.

8. *(12 баллов).* Определения коммутатора векторных полей и алгебры Ли. Показать, что векторные поля образуют алгебру Ли. Сформулировать теорему о производной действия фазового потока одного векторного поля на второе векторное поле.

9. *(12 баллов).* Распределения на многообразии. Максимальные интегральные многообразия распределения. Регулярные, гладкие, инволютивные и интегрируемые распределения. Способы задания распределений. Модуль векторных полей, принадлежащих распределению. Сформулировать теорему Фробениуса на

языке векторных полей. Привести пример гладкого регулярного распределения, для которого через точку проходит два разных максимальных интегральных многообразия. Является ли это распределение инволютивным? Ответ обосновать.

10. *(12 баллов).* Сформулировать теорему Фробениуса на языке векторных полей. Построение инволютивного замыкания распределения. Первые интегралы векторного поля и распределения. Алгоритм построения максимальных интегральных многообразий распределения. Системы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка. Вывести из теоремы Фробениуса условия совместности таких систем.

11. *(12 баллов).* Кокасательное пространство и дифференциальные формы на многообразии. Операции над дифференциальными формами. Показать, что дифференциальные p-формы на многообразии образуют модуль над $\mathbb{R}$-алгеброй гладких функций. Описать базис этого модуля и его координатное представление. Определить отображение дифференциальных форм, индуцированное гладким отображением многообразий. Сформулировать его свойства.

12. *(12 баллов).* Дифференциальные формы на многообразии и операции над ними. Внутреннее произведение векторного поля и дифференциальной формы. Определить производную Ли дифференциальной формы вдоль векторного поля. Сформулировать свойства производной Ли. Доказать, что производная Ли дифференциальной формы есть дифференциальная форма.

13. *(12 баллов).* Сформулировать теорему существования и единственности дифференциала де Рама. Вывести координатную формулу для дифференциала 1-формы. Сформулировать свойства, связывающие дифференциал де Рама с операциями над дифференциальными формами.

14. *(12 баллов).* Кораспределения на многообразии и их связь с распределениями. Модуль дифференциальных 1-форм, принадлежащих кораспределению. Вывести вариант теоремы Фробениуса на языке дифференциальных форм, используя вариант на языке векторных полей и инфинитезимальную формулу Стокса.

15. *(12 баллов).* Кораспределения и распределения на многообразии. Идеал распределения и характеризация его элементов. Сформулировать и вывести варианты теоремы Фробениуса на языке идеала распределения и на языке внешнего произведения 1-форм, порождающих распределение.

Примеры задач РК

1. *(14 баллов).* Пусть $f = (f^1, f^2, f^3)$ — базис сопряженного пространства $(\mathbb{R}^3)^*$,

линейное отображение $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задано матрицей:

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 9 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Дана форма $\varphi = f^1 - 3f^2 + f^3$. Найдите $F^*\varphi$.

2. *(14 баллов).* Пусть в точке $P = (2, \frac{\pi}{2}, 2)$ задан вектор $\vec{\xi}$ своими компонентами в цилиндрической системе координат:

$$\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial r} + 3\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z}.$$

Найдите его координаты в декартовой системе координат.

3. *(14 баллов).* Вычислить коммутатор векторных полей

$$X = z\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}.$$

4. *(14 баллов).* Найти фазовый поток векторного поля X:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

5. *(14 баллов).* Найти инволютивное замыкание распределения, порожденного векторными полями:

$$X = z\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial z}.$$

6. *(14 баллов).* Определить вид векторного поля в цилиндрической системе координат:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

7. *(14 баллов).* Распределение порождено векторными полями

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Определить первые интегралы и максимальные интегральные многообразия этого распределения.

8. *(14 баллов).* Пусть задано отображение $F : u = x^2 + y, v = y - x$ пространства $\mathbb{R}^2$. Вычислить $F^*\omega$ для дифференциальной формы $\omega = v\mathrm{d}u + 5u\mathrm{d}v$.

9. *(14 баллов).* Вычислить значение дифференциальной формы $\omega = z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ на касательных векторах
$$\vec{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \vec{v}_2 = -\frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}$$
в точке $P = (3, -1, 1)$.

10. *(14 баллов).* Найти внутреннее произведение $X\rfloor\omega$ векторного поля X и дифференциальной формы ω:
$$X = \frac{\partial}{\partial x} + (x+z)\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \omega = z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z.$$

11. *(14 баллов).* Вычислить дифференциал де Рама дифференциальной формы
$$\omega = (y^2 z)\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}z + \mathrm{d}t.$$

12. *(14 баллов).* Задано отображение $F : u = x^2 + y, v = y - x$ пространства $\mathbb{R}^2$. Непосредственным вычислением убедиться, что $F^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(F^*\omega)$ для дифференциальной формы $\omega = v\mathrm{d}u + 5u\mathrm{d}v$.

13. *(14 баллов).* Используя формулу Картана $X(\omega) = X\rfloor(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(X\rfloor\omega)$, вычислить производную Ли $X(\omega)$ дифференциальной формы ω вдоль векторного поля X, если
$$X = \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \omega = z\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y - \mathrm{d}z.$$

14. *(14 баллов).* Используя формулу $X(Y\rfloor\omega) = [X, Y]\rfloor\omega + Y\rfloor X(\omega)$, вычислить $Y\rfloor X(\omega)$ для векторных полей X и Y и 1-формы ω:
$$X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \omega = x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y.$$

15. *(14 баллов).* Используя инфинитезимальную формулу Стокса, вычислить $X(Y\rfloor\omega) - Y(X\rfloor\omega)$ для векторных полей X, Y и дифференциальной формы ω, если
$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = (x+y)\frac{\partial}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \omega = x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y.$$
Результат проверить непосредственным вычислением $X(Y\rfloor\omega) - Y(X\rfloor\omega)$.

16. *(14 баллов).* Доказать, что система дифференциальных уравнений в частных производных несовместна:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y - 1. \end{cases}$$