

Операционное исчисление и уравнения матем. физики
4-й семестр, БМТ (2020-21), РК 1
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы

1. Запишите линейное уравнение в частных производных 2-го порядка и квазилинейное уравнение 2-го порядка. Приведите формулу преобразования уравнения при замене независимых переменных.
2. Что такое канонический вид квазилинейного дифференциального уравнения 2-го порядка? Опишите типы квазилинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, приведите примеры разных типов уравнений.
3. Запишите уравнение характеристик квазилинейного дифференциального уравнения, уравнений характеристик в дифференциалах в случае двух независимых переменных. Что называют характеристикой квазилинейного дифференциального уравнения?
4. Найдите общее решение одномерного волнового уравнения. Дать геометрическую интерпретацию общего решения.
5. Приведите формулу Даламбера для решения одномерного волнового уравнения
6. Опишите типы задач математической физики (задача Коши, краевая, смешанная). Укажите типовые виды граничных условий.
7. Дайте определение поверхностного интеграла. Сформулируйте его свойства. Что такое поверхностный интеграл 2-го рода и каков его механический смысл?
8. Сформулируйте теорему Грина и теорему Стокса.
9. Сформулируйте теорему Остроградского — Гаусса.
10. Дайте определение циркуляции и потока векторного поля. Приведите векторную формулировку теоремы Стокса.
11. Опишите типы векторных полей. Дайте определение потенциала векторного поля.
12. Дайте определение преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье. Сформулируйте достаточные условия существования обратного преобразования Фурье.
13. Сформулируйте теоремы подобия, смещения и запаздывания для преобразования Фурье.
14. Сформулируйте свойства преобразования Фурье, связанные с дифференцированием.
15. Сформулируйте свойство преобразования Фурье о связи гладкости и скорости убывания на бесконечности.
16. Дайте определение свертки функций, опишите ее свойства. Сформулируйте свойство преобразования Фурье, связанное со сверткой.
17. Дайте определение ортогональной системы и ортонормированной системы в евклидовом пространстве. Дайте определение ряда Фурье по ортогональной системе. Что такое формулы Эйлера — Фурье?
18. Дать определение полной ортогональной системы и замкнутой ортогональной системы. Какова связь между этими понятиями?
19. Привести неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. При каких условиях первое переходит во второе?
20. Сформулируйте минимальное свойство ряда Фурье.

Типовой вариант билета

1. Приведите формулу Даламбера для решения одномерного волнового уравнения (4 балла)
2. Определите тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = 0,$$

приведите его к каноническому виду (5 баллов)

3. Для векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) = \{y; -x; yz\}$ найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию и ротор векторного поля, а также их значение в точке $M_0(-1; 3; 0)$; в) поток векторного поля через часть поверхности $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2$, ограниченную заданными поверхностями: $z = 0, z = y (y \geq 0)$ (5 баллов)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0, 6]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0, 1), B(1, 2), C(2, 1), D(4, -1), E(6, 1)$ (5 баллов)

5. Разложите в ряд Фурье по ортогональной системе $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{2} \right\}, n = 0, 1, \dots$, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2x - 2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Нарисуйте график функции и график суммы ряда. (5 баллов)