

Интегральные преобразования и уравнения матем. физики
4-й семестр, БМТ (2020-21), РК 2
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы

1. Дайте определение тригонометрического ряда Фурье. Что означает сходимость ряда в среднем квадратичном? Сформулируйте теорему Дирихле для тригонометрических рядов.
2. Дайте определение плотного линейного оператора, самосопряженного линейного оператора. Укажите основное свойство собственных векторов самосопряженного оператора.
3. Запишите общую схему метода Фурье для решения задач математической физики.
4. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля. Сколько вариантов задачи существует в одномерном случае?
5. Запишите уравнение Бесселя. Сколько функций содержит фундаментальная система решений этого уравнения?
6. Дайте определение функции Бесселя I рода. Запишите формулы для норм функций Бесселя.
7. Дайте определение функций Бесселя II рода. Укажите характер ее поведения в нуле.
8. Опишите собственные функции оператора Лапласа в круге.
9. Дайте определение Гамма-функции Эйлера. Запишите основное функциональное свойство этой функции.
10. Дайте определение Бета-функции Эйлера. Запишите уравнение связи Гамма-функции и Бета-функции.
11. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля для шара. Опишите вид собственных функций для этой задачи.
12. Запишите уравнение Лежандра. Опишите все ограниченные решения этого уравнения.
13. Дайте определение многочлена Лежандра. Сформулируйте свойство ортогональности этих многочленов.
14. Запишите присоединенное уравнение Лежандра. Дайте определение присоединенных функций Лежандра.
15. Запишите квадраты норм многочленов Лежандра и присоединенных функций Лежандра.
16. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулируйте основные свойства гармонической функции.
17. Запишите общую постановку краевой задачи для уравнения Лапласа. Перечислите виды граничных условий и типы краевых задач.
18. Приведите формулировку задачи Неймана для уравнения Лапласа (внутренней) в пространстве. Сформулируйте свойства решения этой краевой задачи.
19. Сформулируйте определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора. Запишите фундаментальные решения уравнения Лапласа в пространстве и плоскости.
20. Дайте определение функции Грина краевой задачи для уравнения Лапласа. Запишите интегральное представление решения такой задачи с помощью функции Грина.
21. Опишите метод отражений для построения функции Грина.

Типовой вариант билета

1. Запишите уравнение Бесселя. Сколько функций содержит фундаментальная система решений этого уравнения? (4 балла)

2. Проверьте, является ли функция $u(x, y, z) = \frac{x(y^2 - z^2)}{(y^2 + z^2)^2} + \frac{y(x^2 - z^2)}{(x^2 + z^2)^2}$ гармонической. Если является, то укажите, в какой области. (5 баллов)

3. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (7 баллов):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u|_{x=a} = \cos \frac{7\pi y}{2b}, \quad u'_y|_{y=0} = \sin \frac{5\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{3\pi x}{a}.$$

4. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце (7 баллов):

$$\Delta u = 0, \quad 2 < r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$
$$u|_{r=2} = \sin 3\varphi, \quad u'_r|_{r=3} = 2 \cos^2 \varphi.$$

5. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (7 баллов):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 0, \quad 3\pi/4 < \varphi < 5\pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=3\pi/4} = e^{-r} \cos r, & u|_{\varphi=5\pi/4} = \frac{1}{1+r^2}. \end{cases}$$