

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4-й семестр, БМТ (2020-21 уч.г.)

Экзамен

Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы

1. Дать определение квазилинейного дифференциального уравнения 2-го порядка. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы квазилинейного уравнения и дать классификацию квазилинейных уравнений.
2. Дать определение уравнения характеристик. Вывести уравнение характеристик в дифференциалах в двумерном случае.
3. Найти общее решение одномерного волнового уравнения. Вывести формулу Даламбера для задачи Коши для одномерного волнового уравнения. Показать, что эта задача корректна.
4. Описать решение краевой задачи для полуограниченной струны методом отражения волн (рассмотреть случай граничного условия I рода и II рода).
5. Дать определение поверхностного интеграла I рода. Установить его свойства. Вывести формулу для вычисления такого интеграла в случае поверхности, заданной параметрически. Рассмотреть частный случай поверхности, являющейся графиком функции.
6. Дать определение поверхностного интеграла II рода. Доказать формулу Стокса.
7. Дать определение поверхностного интеграла II рода. Доказать формулу Остроградского — Гаусса.
8. Дать определение векторной линии векторного поля и вывести уравнения векторной линии. Дать определение векторной трубки.
9. Дать определение линейного интеграла, циркуляции, потока векторного поля. Дать определение ротора и дивергенции векторного поля, описать их геометрический смысл. Записать формулу Стокса и формулу Остроградского — Гаусса в векторной форме.
10. Описать специальные виды векторных полей. Указать критерии потенциальности, соленоидальности векторного поля. Доказать, что любое (гладкое) векторное поле может быть разложено на потенциальное и соленоидальное.
11. Дать определение преобразования Фурье, сформулировать его свойства (линейность, подобие, запаздывание-смещение, доказать одно на выбор).
12. Дать определение преобразования Фурье, сформулировать его свойства (дифференцируемость, с доказательством). Описать взаимосвязь между гладкостью функции и скоростью убывания.
13. Дать определение обратного преобразования Фурье и доказать условия его существования (необходимые условия, условия на функцию-оригинал).
14. Дать определение свертки функций, указать условия ее существования, описать ее свойства. Доказать теорему о преобразовании Фурье свертки.
15. Описать косинус- и синус-преобразования Фурье, условия их существования.
16. Дать определение ряда по ортогональной системе в евклидовом пространстве. Вывести формулы Эйлера — Фурье.
17. Доказать неравенство Бесселя. Установить минимальное свойство ряда Фурье. Записать равенство Парсеваля и доказать критерий сходимости ряда Фурье к элементу.
18. Записать тригонометрический ряд. Сформулировать теорему о сходимости тригонометрического ряда. Записать ряд Фурье в комплексной форме и формулы для его коэффициентов.
19. Дать определение оператора Штурма — Лиувилля (включая область определения), установить его свойства (самосопряженность, неотрицательность собственных значений).
20. Доказать первую и вторую формулы Грина. Установить самосопряженность многомерного оператора Штурма — Лиувилля.

21. Привести общую схему метода Фурье. Показать применение этого метода на примере одномерного волнового уравнения.

22. Дать определения гамма- и бета-функций Эйлера. Установить 1-е и 2-е функциональные свойства. Сформулировать 3-е функциональное свойство.

23. Дать определение гармонической функции. Доказать теорему о среднем и Принцип максимума для гармонических функций. Установить условие, при котором задача Неймана (внутренняя) имеет решение.

24. Записать уравнение Бесселя. Установить вид его определителя Вронского. Получить формулу для ограниченного решения уравнения Бесселя.

25. Функции Бесселя и их свойства (дифференцирование, свойство ортогональности, формула для квадрата нормы).

26. Построить ортогональную систему собственных функций оператора Лапласа в круге (граничные условия I рода).

27. Записать уравнение Лежандра и найти все его ограниченные решения.

28. Дать определение многочленов Лежандра и установить их связь с уравнением Лежандра. Установить свойство ортогональности многочленов Лежандра и формулу для квадрата нормы многочленов Лежандра.

29. Записать присоединенное уравнение Лежандра. Дать определение присоединенных функций Лежандра, показать, что они являются решением присоединенного уравнения Лежандра.

30. Дать определение присоединенных функций Лежандра. Доказать, что система присоединенных функций Лежандра одного ранга образует полную ортогональную систему. Привести формулу для квадрата нормы присоединенной функции Лежандра.

31. Найти ортогональную систему собственных функций оператора Лапласа на сфере и в шаре.

32. Дать определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора. Найти фундаментальное решение оператора Лапласа.

33. Дать определение функции Грина для заданной краевой задачи. Получить интегральное представление решения краевой задачи для оператора Лапласа с помощью функции Грина.

34. Описать метод отражений для построения функции Грина в краевой задаче для оператора Лапласа. Привести примеры.

Типы задач

1. Приведение квазилинейного дифференциального уравнения к каноническому виду.
2. Преобразование Фурье кусочно-линейной функции.
3. Краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике.
4. Краевая задача для уравнения Лапласа в кольце.
5. Решение задачи Дирихле/Неймана в угловой области.

Типовой вариант билета

1. Дать определение квазилинейного дифференциального уравнения 2-го порядка. Вывести формулу преобразования матрицы квадратичной формы квазилинейного уравнения и дать классификацию квазилинейных уравнений.

2. Записать уравнение Лежандра и найти все его ограниченные решения.

3. Задача из комплекта № 2.

4. Задача из комплекта № 4.