Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 1

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(2,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$-x\,u_{xx} + 4x^3\,u_{yy} + (1+x^2)u_x + 2x^3\,u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(1,y) = y^2$, $u_x(1,y) = 0$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x+z)z\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + (x-1)(x-z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,0)$, $B(1,-2)$, $C(2,-1)$, $D(3,-1)$, $E(4,-2)$, $F(5,0)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x>0, \quad t>0;\\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda(x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -4-x, & -3 \leqslant x < -2;\\ x, & -2 \leqslant x \leqslant 2;\\ 4-x, & 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1-|x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 2

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect}\dfrac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 3]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(0,-1)$, $C(1,-1)$, $D(3,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 2(\sin x)u_{xy} + (\sin^2 x)u_{yy} + (\cos x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = y^2$, $u_x(0,y) = y^3$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x+z)z\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j} + (x-1)(x+z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 6]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(2,2)$, $D(3,3)$, $E(4,1)$, $F(6,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda^2(x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -4 \leqslant x < -2; \\ x, & -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ -1, & 2 < x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 3

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,0)$, $B(-1,2)$, $C(1,2)$, $D(2,0)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$y^4\, u_{xx} + 2y^2\, u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y}\, u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,1) = \dfrac{x^3}{3}$, $u_y(x,1) = 2x$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x+z)y\boldsymbol{i} + (2x^2 - y^2)\boldsymbol{j} + (1-x)(x+z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x + z = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $y = x$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 6]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(1,1)$, $C(2,1)$, $D(4,3)$, $E(5,3)$, $F(6,2)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \max\{0, 1 - x^2\},$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -3 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2, & 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 4

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect}\dfrac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\,3]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,0)$, $B(0,2)$, $C(1,2)$, $D(3,0)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$4y^2\,u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{4y}{1+y^2}\,u_x + \frac{2y}{1+y^2}u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,1) = x$, $u_y(x,1) = 0$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x+y)(y-1)\boldsymbol{i} + x(y+x)\boldsymbol{j} + (z-xy)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x+y=1$, $y=0$, $z=1$, $x+z=1$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\,5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(2,3)$, $D(3,3)$, $E(4,2)$, $F(5,0)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;\\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda(0.5(x-1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -3 \leqslant x < -1;\\ 1-|x|, & -1 \leqslant x \leqslant 1;\\ -2, & 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\,3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1-|x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 5

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,-2)$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$, $D(2,2)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$y^2\, u_{xx} - 2y\, u_{xy} + u_{yy} - u_x = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, $u_y(x,1) = 0$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = 2x^2y^3\boldsymbol{i} + (y+z)z\boldsymbol{j} + (1-x)(y+z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $y+z=1$, $x=1$, $y=0$, $z=0$, $z=x$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 8]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(2,4)$, $C(3,4)$, $D(6,1)$, $E(7,1)$, $F(8,2)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda(0.5(x+1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leqslant x \leqslant 1; \\ x-3, & 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 6

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2, 2)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D(2, -2)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} - 2(\cos x)u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + (\sin x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0, y) = 0$, $u_x(0, y) = y^2$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x^2 + 2y^2)\boldsymbol{i} + x(y + z)\boldsymbol{j} + (x - 1)(y + z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $y + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$, $y = x$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(2, 2)$, $D(3, 1)$, $E(4, 2)$, $F(5, 0)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x - 2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda(x - 0.5) + \Lambda(x + 0.5),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leqslant x < -1; \\ |x|, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-2,\ 2]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 7

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 4]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,0)$, $B(1,-2)$, $C(3,-2)$, $D(4,0)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$y^2\, u_{xx} - 2y\, u_{xy} + u_{yy} + u_x - \frac{2}{y}\, u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,1) = x^2$, $u_y(x,1) = x$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x+y)(1-y)\boldsymbol{i} + x(x+y)\boldsymbol{j} + (y^3 - x^3)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x + y = 1$, $x = 0$, $z = 0$, $z = y$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 7]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,0)$, $B(2,-2)$, $C(3,-1)$, $D(4,-2)$, $E(5,-2)$, $F(7,0)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{rect}(0.5x) + \operatorname{rect}(x+0.5)\big),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -4 \leqslant x < -2; \\ -x, & -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ -3, & 2 < x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 8

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect}\dfrac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(2,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - u_x + (\sin x - \cos x - 1)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = 3y$, $u_x(0,y) = 5$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = 2x^2z\boldsymbol{i} + (y+z)^2\boldsymbol{j} + x(y+z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=0$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 9]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(3,4)$, $C(4,3)$, $D(5,3)$, $E(7,1)$, $F(9,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{rect}(x-0.5) + \operatorname{rect}(0.5x)\big),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -4 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2, & 2 < x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 9

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,0)$, $D(5,2)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 2(\sin x)u_{xy} + (\sin^2 x)u_{yy} - u_x - (\sin x - \cos x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = y^2$, $u_x(0,y) = y$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x+y)z\boldsymbol{i} + (1-x)(x+y)\boldsymbol{j} + 2x^2y^3\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x+y=1$, $y=0$, $z=0$, $z=x$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 9]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,0)$, $B(3,3)$, $C(4,2)$, $D(5,2)$, $E(6,3)$, $F(9,0)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{(x-1)^2}{4}\right) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0$; 1; 1.5; 2; 2.5; 3; 5. (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -4 \leqslant x < -2; \\ x, & -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2, & 2 < x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 10

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 4]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,-1)$, $B(1,1)$, $C(3,1)$, $D(4,-1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 2(\cos x)u_{xy} - (\sin^2 x)u_{yy} - (\sin x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = y^2$, $u_x(0,y) = 1$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x^2 - 2y^3)\boldsymbol{i} + x(y+z)\boldsymbol{j} + y(y+z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=0$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 9]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(3,4)$, $C(4,3)$, $D(5,3)$, $E(8,0)$, $F(9,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;\\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{(x+1)^2}{4}\right) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5$. (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & -3 \leqslant x \leqslant 1;\\ 1, & 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 11

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect}\dfrac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,0)$, $D(5,2)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 2x^2\, u_{xy} + x^4\, u_{yy} + u_x + (x^2 + 2x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = y^2$, $u_x(0,y) = y$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x+y)z\boldsymbol{i} + (1-x)(x+y)\boldsymbol{j} + 2x^2y^3\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x + y = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $z = x$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,3)$, $B(1,1)$, $C(2,0)$, $D(3,0)$, $E(4,1)$, $F(5,3)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda^2(0.5(x-1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0$; 1; 1.5; 2; 2.5; 3; 5. (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -3 \leqslant x < -1; \\ 1 - |x|, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 12

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect}\dfrac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 4]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,-1)$, $B(1,1)$, $C(3,1)$, $D(4,-1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$4y^3\, u_{xx} - y\, u_{yy} + 2y^3\, u_x + (1+y^2)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,1) = x^2$, $u_y(x,1) = 0$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x^2+2y^2)\boldsymbol{i} + x(y+z)\boldsymbol{j} + (x-1)(y+z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=0$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 7]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$, $D(3,0)$, $E(4,2)$, $F(7,2)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda^2(0.5(x+1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leqslant x \leqslant 1; \\ 3-x, & 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1-|x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 13

1. Для функции $\varphi(x) = \mathrm{rect}(x-1)$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(2,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$9y^5\, u_{xx} - y\, u_{yy} + 18y^5\, u_x + (2-6y^3)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,1) = 0$, $u_y(x,1) = x$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (y^2\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + (x+1)(y+z)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 8]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(3,3)$, $D(4,3)$, $E(5,4)$, $F(8,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x>0, \quad t>0;$$
$$u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda(x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leqslant x < -1; \\ |x|, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-2,\ 2]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\mathrm{rect}\, x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1-|x|\}; \qquad \mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 14

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect}(x-1)$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(2,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - 2u_x + (2\sin x + 2 - \cos x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = \dfrac{y^2}{2}$, $u_x(0,y) = 1$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (y+z)y\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + (y^3 - x^3)\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x + y = 1$, $x = 0$, $z = 0$, $z = y$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[1,\ 8]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(1,1)$, $B(3,3)$, $C(4,2)$, $D(5,3)$, $E(6,3)$, $F(8,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda^2(x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -4 \leqslant x < -2; \\ -x, & -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ -2, & 2 < x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 15

1. Для функции $\varphi(x) = \operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 3]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(0,-1)$, $C(1,-1)$, $D(3,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$-x\,u_{xx} + 4x^3\,u_{yy} + (1-4x^2)u_x + 8x^3\,u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(1,y) = y$, $u_x(1,y) = 3$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = (x+z)y\boldsymbol{i} + z(x+y)\boldsymbol{j} + 2x^2y\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x+y=1$, $y=0$, $z=0$, $z=x$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 9]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,-2)$, $B(1,-3)$, $C(2,-3)$, $D(5,0)$, $E(7,-2)$, $F(9,-2)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx}, \quad x>0, \quad t>0;\\
&u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \max\{0, 1-x^2\},$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0$; 1; 1.5; 2; 2.5; 3; 5. (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -4 \leqslant x \leqslant 2;\\ 8-2x, & 2 < x \leqslant 4,\end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1-|x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 16

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,0)$, $B(-1,2)$, $C(1,2)$, $D(2,0)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$y^2\, u_{xx} - 2y\, u_{xy} + u_{yy} - \frac{1}{y}\, u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,1) = x$, $u_y(x,1) = x^2$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = 2x^2y\boldsymbol{i} + xz^2\boldsymbol{j} - 2xyz\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 7]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$, $D(5,2)$, $E(6,1)$, $F(7,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda(0.5(x-1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -3 \leqslant x < -2; \\ \dfrac{|x|}{2}, & -2 \leqslant x < 2; \\ 1, & 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 17

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect}\frac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 3]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,0)$, $B(0,2)$, $C(1,2)$, $D(3,0)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. *(1 балл)*

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} + 2u_x - (2 + \cos x + 2\sin x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = 2y$, $u_x(0,y) = 1$. *(1 балл)*

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + x^2z\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. *(1 балл)*

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(2,3)$, $D(3,2)$, $E(4,2)$, $F(5,0)$ *(1 балл)*

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda(0.5(x+1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ *(1 балл)*

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -4 - x, & -3 \leqslant x < -2; \\ x, & -2 \leqslant x < 1; \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. *(1 балл)*

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 18

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,-2)$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$, $D(2,2)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 2x^2\, u_{xy} + x^4\, u_{yy} + 2x\, u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = y$, $u_x(0,y) = y^2$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 1$ $(z \geqslant 1)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 9]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(2,3)$, $C(3,3)$, $D(4,4)$, $E(8,0)$, $F(9,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda(x - 0.5) + \Lambda(x + 0.5),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -3 - x, & -4 \leqslant x < -2; \\ x, & -2 \leqslant x < 2; \\ -1, & 2 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 19

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,2)$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$, $D(2,-2)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 2x^2\, u_{xy} + x^4\, u_{yy} - u_x + (2x - x^2)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = \sin y$, $u_x(0,y) = y$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j} + xz^2\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 9]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,-1)$, $B(1,-1)$, $C(2,0)$, $D(5,-3)$, $E(7,-3)$, $F(9,-1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;\\ &u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{rect}(0.5x) + \operatorname{rect}(x+0.5)\big),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & -4 \leqslant x < -2;\\ -x, & -2 \leqslant x < 2;\\ -2, & 2 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 20

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 4]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,0)$, $B(1,-2)$, $C(3,-2)$, $D(4,0)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$y^2\, u_{xx} + 2y\, u_{xy} + u_{yy} + (1-y)u_x - u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,0) = x^2$, $u_y(x,0) = x$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j} + y^2z\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 9]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,-1)$, $B(2,1)$, $C(3,0)$, $D(5,2)$, $E(8,-1)$, $F(9,-1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(\operatorname{rect}(x-0.5) + \operatorname{rect}(0.5x)\big),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -3 \leqslant x < 0; \\ x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 2, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 21

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect}\frac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(2,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$-x\,u_{xx} + 9x^5\,u_{yy} + (2-6x^3)u_x + 18x^5\,u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениеюю Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(1,y) = 0$, $u_x(1,y) = y$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $4 = x^2 + y^2$, $z = 1$, $z = 5$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 10]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,3)$, $B(2,3)$, $C(4,1)$, $D(5,2)$, $E(7,0)$, $F(10,3)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{(x-1)^2}{4}\right) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leqslant x < -2; \\ -x, & -2 \leqslant x < 1; \\ 2, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 22

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,0)$, $D(5,2)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$y^2\,u_{xx} + 2y\,u_{xy} + u_{yy} + (1+y)u_x + u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,0) = -x$, $u_y(x,0) = \sin x$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = xy^2\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} - 2xy\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, $x = 0$ $(x \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 7]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(4,2)$, $D(5,1)$, $E(6,1)$, $F(7,0)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{(x+1)^2}{4}\right) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6, & -3 \leqslant x < -2; \\ 2, & -2 \leqslant x < 1; \\ 3-x, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1-|x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 23

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 4]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,-1)$, $B(1,1)$, $C(3,1)$, $D(4,-1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} + u_x + (1 - \cos x - \sin x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0, y) = y$, $u_x(0, y) = 0$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y^2z\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $y^2 = x^2 + z^2$, $y = 2$, $x = 0$, $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 7]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0, 0)$, $B(1,-1)$, $C(2,-1)$, $D(3,-2)$, $E(5,-2)$, $F(7, 0)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda^2(0.5(x-1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -3 \leqslant x < -2; \\ 2 - |x|, & -2 \leqslant x < 2; \\ 1, & 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 24

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect}\dfrac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(3,0)$, $D(5,2)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$y^2\, u_{xx} + 2y\, u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,0) = x^3$, $u_y(x,0) = -x$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x = 1$ $(x \geqslant 1)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 10]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,3)$, $B(0,5)$, $C(4,1)$, $D(5,2)$, $E(7,0)$, $F(10,3)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ &u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x-2), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x) = \Lambda^2(0.5(x+1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5x),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -4 \leqslant x < -2; \\ x+2, & -2 \leqslant x < 2; \\ 2, & 2 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 25

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect}\dfrac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 4]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,-1)$, $B(1,1)$, $C(3,1)$, $D(4,-1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$(\sin^2 y)u_{xx} + 2(\cos y)u_{xy} - u_{yy} - (\sin y)u_x = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,0) = x^2$, $u_y(x,0) = 1$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = xz^2\boldsymbol{i} - y^2z\boldsymbol{j} + xy^2\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x = y^2 + z^2$, $x = 2$, $z = 0$ $(z \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[2,\ 14]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(2,3)$, $B(4,1)$, $C(5,2)$, $D(7,0)$, $E(12,5)$, $F(14,3)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;\\ &u\big|_{x=0} = \mu(t-1), \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\mu(t) = \Lambda(t),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 0.5;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -3 \leqslant x < -1;\\ 2, & -1 \leqslant x < 1;\\ x-3, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 26

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect}(x-1)$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(2,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} - 2x\,u_{xy} + x^2\,u_{yy} - u_x + (x-1)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(0,y) = y$, $u_x(0,y) = y^2$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = xy^2\boldsymbol{i} - x^2y\boldsymbol{j} + x^2z\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 2$, $x = 0$, $y = x$ $(x,\ y \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[1,\ 8]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(1,1)$, $B(3,3)$, $C(4,3)$, $D(5,2)$, $E(6,3)$, $F(8,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = \mu(t-1), \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\mu(t) = \Lambda^2(t),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 0.5;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -3 - x/2, & -4 \leqslant x < -2; \\ x, & -2 \leqslant x < 2; \\ 3 - x/2, & 2 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-4,\ 4]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 27

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(2,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$(3+\sin^2 y)u_{xx} - 2(\cos y)u_{xy} - u_{yy} + (\sin y)u_x = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,0) = x$, $u_y(x,0) = x^2$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = 2y^2\boldsymbol{i} + x^2 z\boldsymbol{j} - 2yz\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, $y = 0$, $y = x$ $(x,\ y \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 9]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(4,3)$, $D(5,3)$, $E(6,4)$, $F(9,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = \mu(t-1), \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\mu(t) = \max\{0, 1 - t^2\},$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 0.5;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -3 \leqslant x < -1; \\ x+1, & -1 \leqslant x < 0; \\ x-1, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 28

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect}\dfrac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\,3]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(0,-1)$, $C(1,-1)$, $D(3,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$9y^5\,u_{xx} - y\,u_{yy} + 6y^5\,u_x + (2+2y^3)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,1) = 2x$, $u_y(x,1) = 0$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + y^2z\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $x^2 = y^2 + z^2$, $x = 1$, $y = x$, $y = -x$ $(y \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\,8]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,2)$, $B(1,1)$, $C(4,1)$, $D(6,3)$, $E(7,3)$, $F(8,2)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = \mu(t-1), \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\mu(t) = \Lambda(0.5(t-1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5t),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 0.5;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -3 \leqslant x < -1; \\ 2, & -1 \leqslant x < 1; \\ 3 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\,3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 29

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect} x$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 2]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(2,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$(\cos^2 y)u_{xx} - 2(\sin y)u_{xy} - u_{yy} + (1 - \cos y + \sin y)u_x + u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(x,0) = x^2$, $u_y(x,0) = 0$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = yz^2\boldsymbol{i} - x^2z\boldsymbol{j} + xy^2\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $z = x^2 + y^2$, $z = 1$, $y = 0$, $y = x$ $(x \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 5]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(2,3)$, $D(3,2)$, $E(4,1)$, $F(5,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = \mu(t-1), \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\mu(t) = \Lambda(0.5(t+1)) \cdot \operatorname{rect}(0.5t),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 0.5;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 3;\ 5$. (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -3 \leqslant x < -1; \\ 2 - x, & -1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1 - |x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 1 (модуль 1)

(min: 4 балла, max: 6 баллов)

ВАРИАНТ 30

1. Для функции $\varphi(x) = -\operatorname{rect}\frac{x}{2}$ и функции $\psi(x)$, которая вне отрезка $[-2,\ 3]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(-2,1)$, $B(0,-1)$, $C(1,-1)$, $D(3,1)$: а) построить их графики; б) вычислить свертку $\varphi * \psi$; в) построить график свертки. (*1 балл*)

2. Определить тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 2x\,u_{xy} + x^2\,u_{yy} + u_x + (1+x)u_y = 0,$$

привести его к каноническому виду, записать общее решениею Найти решение задачи Коши для этого дифференциального уравнения с начальными условиями $u(1,y) = y^2$, $u_x(1,y) = 0$. (*1 балл*)

3. Найти поток векторного поля $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2z\boldsymbol{k}$ через поверхность S: $y^2 = x^2 + z^2$, $y = 2$, $x = 0$, $x = z$ $(x \geqslant 0)$, ограничивающую конечный объем. Результат проверить по формуле Остроградского — Гаусса. (*1 балл*)

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0,\ 6]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(2,3)$, $D(3,3)$, $E(5,1)$, $F(6,1)$ (*1 балл*)

5. Для задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{x=0} = \mu(t-1.5), \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u'_t\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$\mu(t) = \Lambda(t-0.5) + \Lambda(t+0.5),$$

нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0;\ 0.5;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 3;\ 5.$ (*1 балл*)

6. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x+6, & -3 \leqslant x < -2; \\ -x, & -2 \leqslant x < 1; \\ 3-x, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

заданную на отрезке $[-3,\ 3]$, в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье. (*1 балл*)

Примечание.

$$\operatorname{rect} x = \eta\Big(\frac{1}{2} - |x|\Big); \qquad \Lambda(x) = \max\{0,\ 1-|x|\}; \qquad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$