

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 1

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 6u' + 9u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'_x|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = \frac{y-b}{8b}, \quad u'_x|_{x=a} = 0, \quad u'_y|_{y=0} = -\frac{1}{2a} \sin \frac{\pi x}{2a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{5\pi x}{2a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 2 \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = 3 \cos^2 \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \cos^3 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-r^2}, & r > 0, \quad \pi/4 < \varphi < 3\pi/4; \\ u|_{\varphi=\pi/4} = 0, \quad u'_\varphi|_{\varphi=3\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 2

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 6u' + 9u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = \frac{y(2b-y)}{4b^3}, \quad u|_{x=a} = 0, \quad u'_y|_{y=0} = -\frac{3}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a}, \quad u'_y|_{y=b} = \frac{1}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = 3 \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi - \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = 6 \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = \cos^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2 + 1}, & r > 0, \quad 3\pi/4 < \varphi < 5\pi/4; \\ u|_{\varphi=3\pi/4} = 0, \quad u|_{\varphi=5\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 3

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 6u' + 9u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = \frac{y-b}{8b}, \quad u|_{x=a} = 0, \quad u'_y|_{y=0} = -\frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi + \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 3 \cos^3 \varphi - \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-r^2+2}, & r > 0, \quad -3\pi/4 < \varphi < -\pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=-3\pi/4} = 0, & u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 4

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 2u' + 2u$, действующего на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=1} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = \frac{y-b}{2b}, \quad u'_x|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = 1, \quad u|_{y=b} = \cos \frac{\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = 4 \sin^3 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = 2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2 + 5}, & r > 0, \quad -\pi/4 < \varphi < \pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/4} = 0, & u|_{\varphi=\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 5

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 2u' + 2u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = \frac{y-b}{2b}, \quad u'|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = -\sin \frac{5\pi x}{2a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{\pi x}{2a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'|_{r=2} = 2 \cos^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos \vartheta + \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'|_{r=2} = \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = re^{-r^2}, & r > 0, \quad \pi/2 < \varphi < \pi; \\ u|_{\varphi=\pi/2} = 0, & u'|_{\varphi=\pi} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 6

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 2u' + 2u$, действующего на отрезке $[0, 4]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=4} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = \frac{y(y-2b)}{64b^2}, \quad u'_x|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = -\cos \frac{\pi x}{a}, \quad u'_y|_{y=b} = \frac{3}{a} \cos \frac{3\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \cos^3 \varphi - \cos^2 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \sin^2 \vartheta (1 + 3 \sin 2\varphi). \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^4 + 3}, & r > 0, \quad \pi < \varphi < 3\pi/2; \\ u|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u|_{\varphi=3\pi/2} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 7

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 2u' + 4u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = \frac{y(y-2b)}{32b^2}, \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = -\sin \frac{2\pi x}{a}, \quad u'|_{y=b} = \frac{1}{a} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'|_{r=3} = 3 \sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'|_{r=3} = \sin 2\vartheta \sin \varphi + \cos 2\vartheta. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{3}{r^2 + 1}, & r > 0, \quad -\pi/2 < \varphi < 0; \\ u'|_{\varphi=-\pi/2} = 0, \quad u'|_{\varphi=0} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 8

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 2u' + 4u$, действующего на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'|_{x=1} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = -\cos \frac{5\pi y}{2b}, \quad u'|_{x=a} = \frac{1}{2b} \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u'|_{y=0} = \frac{x(x-2a)}{64a^3}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = 2 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi - \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'|_{r=1} = 4 \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'|_{r=2} = \cos^3 \varphi + \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-r^2} \sin r, & r > 0, \quad -\pi < \varphi < -\pi/2; \\ u'|_{\varphi=-\pi} = 0, \quad u|_{\varphi=-\pi/2} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 9

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 2u' + 4u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = -\frac{1}{b} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 1, \quad u'_y|_{y=0} = \frac{x-a}{16a^2}, \quad u'_y|_{y=b} = 0.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = -4 \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \cos^2 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-r^2} \cos r, & r > 0, \quad \pi/4 < \varphi < 3\pi/4; \\ u|_{\varphi=\pi/4} = 0, \quad u|_{\varphi=3\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 10

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 4u' + 4u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = -\cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u|_{x=a} = \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u'_y|_{y=0} = \frac{x-a}{2a^2}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 4 \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = 4 \sin^3 \vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = \sin^3 \varphi + 3 \cos \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2 + 1}, & r > 0, \quad 3\pi/4 < \varphi < 5\pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=3\pi/4} = 0, \quad u'_\varphi|_{\varphi=5\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 11

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 4u' + 4u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'_x|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = -\frac{1}{b} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u'_x|_{x=a} = \frac{1}{3b} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u|_{y=0} = \frac{x(2a-x)}{4a^2}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = \sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi + 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \sin^2 \vartheta (1 + \cos \vartheta \sin 2\varphi). \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-r^2+2}, & r > 0, \quad -3\pi/4 < \varphi < -\pi/4; \\ u|_{\varphi=-3\pi/4} = 0, & u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 12

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 4u' + 4u$, действующего на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=1} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = -\sin \frac{\pi y}{b}, \quad u'_x|_{x=a} = \frac{2}{b} \sin \frac{2\pi y}{b}, \quad u|_{y=0} = \frac{x(x-2a)}{32a^2}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 6, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=6} = 2 \cos^3 \varphi - 3 \cos^3 \varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = 2 \cos^3 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \cos^2 \varphi + 5 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\sin r}{r^2 + 1}, & r > 0, \quad -\pi/4 < \varphi < \pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/4} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 13

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 6u' + 8u$, действующего на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=1} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = -\frac{1}{2b} \sin \frac{\pi y}{2b}, \quad u'_x|_{x=a} = \frac{3}{2b} \sin \frac{3\pi y}{2b}, \quad u|_{y=0} = \frac{x(2a-x)}{4a^2}, \quad u'_y|_{y=b} = 0.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = 2 \cos^3 \varphi + 2 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = 2 \cos \vartheta + 3 \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = \cos^3 \varphi - \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = r^2 e^{-r^2}, & r > 0, \quad \pi/2 < \varphi < \pi; \\ u|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 14

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 6u' + 8u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'_x|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = -\sin \frac{\pi y}{2b}, \quad u|_{x=a} = \sin \frac{5\pi y}{2b}, \quad u|_{y=0} = \frac{x-a}{2a}, \quad u'_y|_{y=b} = 0.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = -\sin^3 \varphi - 2\sin^2 \varphi + 3\sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 3\cos^2 \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \cos^2 \varphi - 6\sin^3 \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^4 + 3}, & r > 0, \quad \pi < \varphi < 3\pi/2; \\ u'_\varphi|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u'_\varphi|_{\varphi=3\pi/2} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 15

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 6u' + 8u$, действующего на отрезке $[0, 4]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=4} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=a} = \frac{b-y}{16b^2}, \quad u'_y|_{y=0} = -\frac{3}{2a} \sin \frac{3\pi x}{2a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{\pi x}{2a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 4 \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \cos \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \cos^3 \varphi - \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2 + 1}, & r > 0, \quad -\pi/2 < \varphi < 0; \\ u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/2} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 16

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 4u' + 2u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = \frac{y(y-2b)}{4b^2}, \quad u'_y|_{y=0} = -\frac{1}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a}, \quad u'_y|_{y=b} = \frac{3}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = 2 \cos^3 \varphi - 4 \sin^3 \varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 2 \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = (r^2 + 1)e^{-r^2}, & r > 0, \quad -\pi < \varphi < -\pi/2; \\ u|_{\varphi=-\pi} = 0, \quad u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/2} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 17

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 4u' + 2u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = \frac{b-y}{8b}, \quad u'_y|_{y=0} = -\frac{4}{a} \sin \frac{4\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = 2 \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = \sin^2 \vartheta (\cos \vartheta + \cos 2\varphi). \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \cos^3 \varphi - \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = (r^3 + r)e^{-r^2}, & r > 0, \quad \pi/4 < \varphi < 3\pi/4; \\ u|_{\varphi=\pi/4} = 0, \quad u|_{\varphi=3\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 18

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 4u' + 2u$, действующего на отрезке $[0, 5]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=5} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b; \\ u'_x|_{x=0} = 0, & u'_x|_{x=a} = \frac{b-y}{2b^2}, & u|_{y=0} = -\cos \frac{2\pi x}{a}, & u|_{y=b} = 1. \end{cases}$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 5, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=5} = 2 \sin^3 \varphi - \sin \varphi + 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \cos^2 \varphi + 5 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2 + 1} e^{-r^2}, & r > 0, & 3\pi/4 < \varphi < 5\pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=3\pi/4} = 0, & u'_\varphi|_{\varphi=5\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 19

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 8u' + 12u$, действующего на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=1} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=a} = \frac{b-y}{2b^2}, \quad u|_{y=0} = \sin \frac{\pi x}{2a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{3\pi x}{2a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = 2 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 3 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = (r^2 - 2)e^{-r^2+2}, & r > 0, \quad -3\pi/4 < \varphi < -\pi/4; \\ u|_{\varphi=-3\pi/4} = 0, \quad u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 20

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 8u' + 12u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'_x|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=a} = \frac{y(2b-y)}{64b^3}, \quad u|_{y=0} = 1, \quad u'_y|_{y=b} = \frac{1}{a} \cos \frac{\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = 6 \sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi + 4 \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^2 \vartheta (1 + \sin 2\varphi). \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\sin r}{r^2 + 1}, & r > 0, \quad -\pi/4 < \varphi < \pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/4} = 0, \quad u|_{\varphi=\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 21

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 8u' + 12u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = \frac{y(2b-y)}{32b^2}, \quad u|_{y=0} = -\sin \frac{2\pi x}{a}, \quad u'_y|_{y=b} = \frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi + \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = 2 \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = 2re^{-r^2}, & r > 0, \quad \pi/2 < \varphi < \pi; \\ u|_{\varphi=\pi/2} = 0, & u|_{\varphi=\pi} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 22

1. Для дифференциального оператора $Lu = u''_8 u' + 20u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = -\cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u'_x|_{x=a} = \frac{1}{2b} \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u'_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = \frac{x(2a-x)}{32a^2}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = 4 \sin^3 \varphi - \sin \varphi - \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^3 \vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = \cos^3 \varphi + 12 \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{r^3 e^{-r^4}}{r^4 + 3}, & r > 0, \quad \pi < \varphi < 3\pi/2; \\ u'_\varphi|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u'_\varphi|_{\varphi=3\pi/2} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 23

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 8u' + 20u$, действующего на отрезке $[0, 4]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'_x|_{x=4} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = -\frac{2}{b} \cos \frac{2\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 1, \quad u'_y|_{y=0} = 0, \quad u'_y|_{y=b} = \frac{a-x}{16a^2}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 5, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=5} = -\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = \cos^3 \vartheta + \sin 2\vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=3} = \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{3}{r^2 + 1}, & r > 0, \quad -\pi/2 < \varphi < 0; \\ u|_{\varphi=-\pi/2} = 0, \quad u'_\varphi|_{\varphi=0} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 24

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 8u' + 20u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u|_{x=0} = -\cos \frac{3\pi y}{2b}, \quad u|_{x=a} = \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u'_y|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = \frac{a-x}{2a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 4 \cos^3 \varphi + 2 \sin^3 \varphi + \sin \varphi - 3 \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = \sin^2 \vartheta (2 \cos \vartheta + 3 \sin 2\vartheta). \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = re^{-r^2}, & r > 0, \quad -\pi < \varphi < -\pi/2; \\ u'_\varphi|_{\varphi=-\pi} = 0, \quad u|_{\varphi=-\pi/2} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 25

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 10u' + 26u$, действующего на отрезке $[0, 3]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=3} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = -\frac{3}{b} \sin \frac{3\pi y}{b}, \quad u'_x|_{x=a} = \frac{1}{b} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = \frac{x(x-2a)}{4a^2}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = 2 \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \sin \vartheta (\sin \vartheta + \cos \varphi). \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \cos^2 \varphi + 5 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-r^2} \sin r, & r > 0, \quad \pi/4 < \varphi < 3\pi/4; \\ u|_{\varphi=\pi/4} = 0, \quad u'_\varphi|_{\varphi=3\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 26

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 10u' + 26u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u'|_{x=0} = 0$, $u|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'|_{x=0} = \frac{y^2}{b^2}, \quad u|_{x=a} = 0, \quad u'|_{y=0} = \frac{3}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a}, \quad u'|_{y=b} = \frac{1}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = \sin^3 \varphi + 2 \sin^2 \varphi - 3 \sin \varphi - \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = 1 + \sin 2\vartheta \sin \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'|_{r=2} = \cos^3 \varphi - 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2 + 1}, & r > 0, \quad 3\pi/4 < \varphi < 5\pi/4; \\ u|_{\varphi=3\pi/4} = 0, \quad u|_{\varphi=5\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 27

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' + 10u' + 26u$, действующего на отрезке $[0, 5]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'_x|_{x=5} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = \frac{b^2 - y^2}{8b^2}, \quad u|_{x=a} = 0, \quad u'_y|_{y=0} = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{2\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi + 3 \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^2 \vartheta (3 + \cos 2\varphi). \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=1} = \cos^2 \varphi + 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-r^2+2}, & r > 0, \quad -3\pi/4 < \varphi < -\pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=-3\pi/4} = 0, & u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 28

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 10u' + 25u$, действующего на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=1} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = \frac{y(b-y)}{2b^2}, \quad u'_x|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = 1, \quad u|_{y=b} = \cos \frac{\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 5, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=5} = 4 \sin^3 \varphi + \sin^2 \varphi - \sin \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=2} = 4 \sin^3 \vartheta \cos \varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \sin^2 \varphi - 3 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^2 + 5}, & r > 0, \quad -\pi/4 < \varphi < \pi/4; \\ u'_\varphi|_{\varphi=-\pi/4} = 0, & u|_{\varphi=\pi/4} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 29

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 10u' + 25u$, действующего на отрезке $[0, 2]$ с граничными условиями $u'_x|_{x=0} = 0$, $u|_{x=2} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=a} = \frac{1}{b} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad u'_y|_{y=0} = \frac{x^2 - a^2}{16a^2}, \quad u'_y|_{y=b} = 0.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = 4 \cos^3 \varphi + 2 \sin^3 \varphi + 2 \cos \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 3, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=3} = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=2} = \cos^3 \varphi + 2 \sin \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = e^{-r^2}, & r > 0, \quad \pi/2 < \varphi < \pi; \\ u|_{\varphi=\pi/2} = 0, & u'_\varphi|_{\varphi=\pi} = 0. \end{cases}$$

Интегральные преобразования и уравнения математической физики

4 сем., БМТ, 2020–21 уч.г.

Домашнее задание 2 (модуль 2)

(min: 6 баллов, max: 10 баллов)

ВАРИАНТ 30

1. Для дифференциального оператора $Lu = u'' - 10u' + 25u$, действующего на отрезке $[0, 4]$ с граничными условиями $u|_{x=0} = 0$, $u'_x|_{x=4} = 0$, найти: а) собственные функции и собственные значения; б) весовую функцию скалярного произведения, при которой система собственных функций ортогональна. (2 балла)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (2 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u'_x|_{x=0} = \frac{y(y-b)}{2b^2}, \quad u'_x|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = \cos \frac{2\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = \cos \frac{\pi x}{a}.$$

3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=1} = 4 \cos^3 \varphi - 4 \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (2 балла):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < 4, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u'_r|_{r=4} = 2 \cos^3 \vartheta + \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi. \end{cases}$$

5. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ u|_{r=4} = \sin^2 \varphi + 6 \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

6. Постройте функцию Грина краевой задачи для уравнения Пуассона в угловой области и запишите решение задачи в интегральной форме (1 балл):

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r^4 + 3}, & r > 0, \quad \pi < \varphi < 3\pi/2; \\ u|_{\varphi=\pi} = 0, \quad u|_{\varphi=3\pi/2} = 0. \end{cases}$$