Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(для студентов кафедры ИУ-9, 6-й курс)

Москва
27.03.2021

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения в частных производных в контесте уравнений математической физики. Конечномерные и бесконечномерные математические модели.

Типы уравнений математической физики:

а) дифференциальные — колебаний и диффузии, уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi.$$

б) системы дифференциальных уравнений — уравнения Максвелла

$$\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}(\mu\boldsymbol{H}) = 0,$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\boldsymbol{H})}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{I};$$

в) нелинейные — уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

и уравнение Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

г) интегральные — уравнения Вольтерра

$$\alpha u(t) + \beta\int\limits_0^t K(x,s)\,u(s)\,ds = f(t);$$

д) интегро-дифференциальные — уравнение переноса

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \boldsymbol{s}\operatorname{grad}\psi + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi}\int\limits_S \psi(x,\boldsymbol{s}',t)\,ds' + F.$$

1.1. Классификация квазилинейных уравнений

Квазилинейные и линейные дифференциальные уравнения. Преобразование уравнения при замене координат. Сохранение условия квазилинейности. Преобразование матрицы квадратичной формы: $\tilde{A} = JAJ^{\mathrm{T}}$, где A — старая матрица, $\tilde{A}$ — новая матрица, $J = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ — матрица Якоби замены переменных. Приведение к каноническому виду. Уравнение характеристик: $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)A\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = 0$. Характеристические поверхности (поверхности уровня функции u). Пример: волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u$, его уравнение характеристик $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = a^2(\operatorname{grad} u)^2$ и характеристический конус $a^2(t-t_0)^2 = |x-x_0|^2$. Случай двух переменных.

Дифференциальное уравнение называется линейным, если оно имеет вид

$$F(x, u, \partial^{\alpha_1}u, \ldots, \partial^{\alpha_k}u) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а функция F линейная по всем аргументам, кроме первого, т.е. имеет вид

$$a(x)u + b_{\alpha_1}(x)\partial^{\alpha_1}u + \ldots + b_{\alpha_k}(x)\partial^{\alpha_k}u = f(x).$$

В этих обозначениях символы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ обозначают мультииндексы, т.е. кортежи из индексов: $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{jn})$. Символ ∂^α обозначает частную производную: если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial^{\alpha_1}x_1 \partial^{\alpha_2}x_2 \ldots \partial^{\alpha_n}x_n}.$$

Сумму $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ всех компонент мультииндекса α обычно обозначают $|\alpha|$. Мультииндексы можно складывать и умножать на натуральные числа как обычные векторы. Так

$$\alpha + \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

Дифференциальное уравнение называется квазилинейным, если оно линейно только по старшим производным.

Мы ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений второго порядка. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x).$$

Оно однородное, если $f(x) \equiv 0$, иначе неоднородное. Квазилинейное уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}) = 0. \qquad (1.1)$$

Замечание. В теории дифференциальных уравнений, как и в теории уравнений математической физики, часто используют упрощенные обозначения частных производных, опуская штрих: например u_{x_1} вместо u'_{x_1}.

Напомним, что при непрерывности частных производных порядок дифференцирования несущественный, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Поэтому коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $a_{ji}(x)$ относятся к одинаковым величинам, и их можно считать равными. Совокупность этих коэффициентов можно записать в матрицу: $A(x) = \big(a_{ij}(x)\big)$, причем эта матрица, в силу равенства $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, оказывается симметрической.

Совокупность

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

линейного (квазилинейного) уравнения называется ***квадратичной формой*** этого уравнения, а матрица $A(x)$ — это ***матрица квадратичной формы***. Термины отражают не только внешнее сходство. Ассоциация здесь более глубокая.

Пусть дано квазилинейное уравнение (1.1). Сделаем замену независимых переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для этого рассмотрим отображение $y = \varphi(x)$, где φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемое отображение, причем существует обратное отображение, которое также дважды непрерывно дифференцируемое (в этом случае говорят, что φ — диффеоморфизм). Чтобы в дифференциальном уравнении перейти к новым независимым переменным y, надо пересчитать частные производные. Согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

Дифференцируя повторно, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u}{\partial y_k}\Big)\frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial u}{\partial y_k}\Big)\frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i}.$$

В первой сумме результата опять пересчитаем частные производные по переменным x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, \ldots, u_{y_n}) = 0.$$

Функция $\tilde{F}$ включает в себя и пересчитанную функцию F исходного уравнения, и возникающий довесок $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i}$.

В полученном представлении изменим порядок сумм:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, \ldots, u_{y_n}) = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\Bigg)\frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, \ldots, u_{y_n}) = 0.$$

Обозначив

$$\tilde{a}_{kl}(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \tag{1.2}$$

окончательно получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{kl}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{F}(y, u, u_{y_1}, \ldots, u_{y_n}) = 0.$$

Таким образом, при гладкой невырожденной замене в квазилинейном дифференциальном уравнении мы снова получаем квазилинейное дифференциальное уравнение, причем коэффициенты квадратичной формы изменяются согласно формуле (1.2).

Отметим, что совокупность частных производных $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ можно записать в матрицу, которая представляет собой матрицу Якоби J отображения $y = \varphi(x)$. С помощью этой матрицы представление (1.2) можно записать более кратко:

$$\tilde{A} = JAJ^{\mathrm{T}}. \tag{1.3}$$

Преобразование (1.3) близко к формуле преобразования матрицы квадратичной формы, но все таки отличается (последняя имеет вид $U^{\mathrm{T}}AU$). Тем не менее, рассматривая J^{T} как матрицу перехода при преобразовании квадратичной формы, можем сделать вывод, что существует такая матрица J, что новая матрица $\tilde{A}$ будет диагональной. Другими словами квадратичная форма квазилинейного дифференциального уравнения приводится к каноническому виду, причем при приведении к каноническому виду остаются неизменными: а) количество ненулевых диагональных элементов (определяет ранг матрицы); б) количество положительных и отрицательных диагональных элементов (сигнатура матрицы).

В соответствии с типом матрицы выделяют:

– эллиптические уравнения (матрица имеет полный ранг и знакоположительная);
– гиперболические уравнения (матрица имеет полный ранг и знакопеременная);
– параболические уравнения (матрица вырожденная).

Примеры:

– эллиптическое уравнение $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ — уравнение Лапласа;
– гиперболическое уравнение $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ — уравнение колебаний;
– параболическое уравнение $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ — уравнение теплопроводности.

Представленная классификация важна и отражает существенные свойства решений таких уравнений, но не все так гладко. Дело в том, что матрица J, приводящая к каноническому виду, в общем случае есть функция точки: $J = J(x)$. Однако не всякая функциональная матрица является матрицей Якоби некоторого отображения. Можно лишь гарантировать, что в данной точке матрицу уравнения можно привести к каноническому виду, но для каждой точки преобразование будет свое. Второй момент тоже важный. Тип дифференциального уравнения может меняться. Фактически для каждого дифференциального уравнения вся область существования разделяется на три подобласти: область эллиптичности, область гиперболичности и область параболичности.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение $u_{xx} + yu_{yy} = 0$. Оно уже в каноническом виде. Однако в полуплоскости $y > 0$ оно эллиптическое, в области $y < 0$ гиперболическое, а на прямой $y = 0$ параболическое.

Есть два важных частных случая, в которых преобразование к каноническому виду распространяется на всю область. Первый — случай постоянных коэффициентов $a_{ij}(x)$. В этом случае и матрица J будет постоянной. Такая матрица является матрицей Якоби линейного отображения $y = Ax$.

Второй случай не столь очевидный. Это случай двух независимых переменных.

Поставим задачу выбора такого преобразования $y = \varphi(x)$, при котором $\tilde{a}_{11} = 0$. Из формулы (1.2) заключаем, что это условие эквивалентно уравнению

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial y_1}{\partial x_j}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} = 0,$$

или

$$\Big(\frac{\partial y_1}{\partial x}\Big)A\Big(\frac{\partial y_1}{\partial x}\Big)^{\mathrm{T}} = 0.$$

Полученное уравнение называют ***уравнением характеристик***. Поверхности уровня $y_1 = C$ для решения y_1 уравнения характеристик называют ***характеристиками дифференциального уравнения***. Точнее, характеристика — это поверхность $y_1(x) = C$, во всех точках которой выполняется уравнение характеристик.

Пример 1.2. Для уравнения колебаний

$$u_{tt} = a^2\Delta u$$

(здесь $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ — оператор Лапласа) уравнение характеристик имеет вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = a^2(\operatorname{grad} u)^2.$$

Характеристикой является поверхность $a^2|t - t_0|^2 - |r - r_0|^2 = 0$, где $r = (x,\ y,\ z)$, поскольку функция $h(t, x) = a^2|t - t_0|^2 - |r - r_0|^2$ на этой поверхности удовлевоpяет уравнению характеристик.

Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда квазилинейное уравнение имеет вид

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(зависимость коэффициентов от независимых переменных здесь и далее для простоты опущена). Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$a_{11}u_x^2 + 2a_{12}u_x u_y + a_{22}u_y^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно частных производных первого порядка и (если есть решения) может быть разделено на два уравнения. Действительно, представив

$$a_{11}u_x^2 + 2a_{12}u_x u_y + a_{22}u_y^2 = (p_1u_x + q_1u_y)(p_2u_x + q_2u_y),$$

получим

$$p_1u_x + q_1u_y = 0, \quad p_2u_x + q_2u_y = 0. \tag{1.4}$$

Рассмотрим систему $\dot{x} = p_1(x, y)$, $\dot{y} = q_1(x, y)$, которую можно представить в виде $\dfrac{dx}{p_1} = \dfrac{dy}{q_1}$, или $q_1\,dx - p_1\,dy = 0$. Функция $g(x, y)$ называется первым интегралом, если $\dot{g} = g_x\dot{x} + g_y\dot{y} = 0$. Нетрудно увидеть, что уравнение $p_1u_x + q_1u_y = 0$ есть уравнение на первые интегралы рассматриваемой системы. С другой стороны, первые интегралы системы можно получить, представив решение уравнения $q_1\,dx - p_1\,dy = 0$ в виде $g(x, y) = C$. Таким образом, получение решений уравнений (1.4) в частных производных сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений

$$q_1\,dx - p_1\,dy = 0, \quad q_2\,dx - p_2\,dy = 0,$$

которые можно записать в виде одного уравнения

$$(q_1\,dx - p_1\,dy)(q_2\,dx - p_2\,dy) = 0.$$

Вспоминая происхождение коэффициентов p_i, q_i, приходим к уравнению

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) называется ***уравнением характеристик в дифференциалах***.

Выбрав два независимых решения уравнения характеристик (того или иного — неважно), получим замену ξ, η, которая приводит к матрице

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix},$$

в которой $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$. Таким образом, уравнение сводится к следующему:

$$2\tilde{a}_{12}u_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Его также называют каноническим (подобно тому, как есть каноническое уравнение гиперболы, приведенное к осям). Оно в ряде случаев решается аналитически.

1.2. Постановка задач математической физики

Направления исследования уравнений математической физики:

– исследование постановки задачи (классы функций, дополнительные условия);
– качественное исследование решений поставленных задач;
– методы аналитического или численного решения поставленных задач.

Методы исследования:

– анализ прикладного (физического) смысла задачи;
– методы функционального анализа;
– асимптотические методы;
– методы деформации (метод малого параметра).

Постановка задач математической физики:

– дифференциальное уравнение;
– начальные условия;
– граничные условия.
– класс функций, в котором ищется решение.

Типы задач:

– задача Коши (нет ГУ);
– краевая задача (нет НУ);
– смешанная, или начально-краевая задача.

Корректность постановки задачи по Адамару:

1) решение должно существовать в каком-то классе функций $\mathcal{M}_1$;
2) решение должно быть единственным в некотором классе функций $\mathcal{M}_2$;
3) решение должно непрерывно зависеть от данных задачи, где непрерывность понимается в каком-либо смысле.

Класс корректности — пересечение $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

Задача корректна по Адамару в классе $\mathcal{M}$, если она в этом классе имеет решение, и притом единственное, а кроме того решение непрерывно зависит от данных задачи (начальных и краевых условий).

Нормальная форма:

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i(t, x, u, D^{\alpha_1} u, D^{\alpha_2} u, \ldots), \quad i = \overline{1,\, N}, \tag{1.6}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$ — мультииндексы и $D^\alpha u = D_t^{\alpha_0} D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n} u$ для $\alpha = (\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$, причем $|\alpha_i| \leqslant k_i$ и $\alpha_0^{(i)} \leqslant k_i - 1$.

В нормальной форме находятся волновое уравнение и уравнение Лапласа — по любой переменной; уравнение теплопроводности — по любой пространственной переменной.

Задача Коши для системы (1.6): найти решение системы, удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n; \quad k = \overline{0,\, k_i{-}1}, \quad i = \overline{1,\, N}. \tag{1.7}$$

Теорема 1.1 (Коши — Ковалевская). Если все функции $\varphi_{ik}(x)$ аналитичны в некоторой окрестности точки $x_0 \in G$, а функции Φ_i — в окрестности точки

$$(t_0,\ x_0,\ u(t_0, x_0), D^{\alpha_1} u(t_0, x_0), D_{\alpha_2} u(t_0, x_0), \ldots),$$

то существует такая окрестность точки $(t_0,\ x_0)$, в которой задача Коши в классе аналитических функций имеет решение, и притом единственное.

Пример 1.3 (*Пример Адамара*). Задача

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = -u_{xx};\\
&u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi_k(x) = \frac{1}{k}\sin kx.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Ее решение

$$u_k(t,x) = \frac{\operatorname{sh} kt}{k^2}\sin kx.$$

При $k \to \infty$ имеем $\psi_k(x) \rightrightarrows 0$. В то же время $u_k(x,t)$ при $k \to \infty$ не сходится к 0, если x не кратно π. #

Граничные условия связывают значения функции и ее производных на границе области. Вариантов таких условий много. Наиболее простые —- линейные. Остановимся на задачах для дифференциальных уравнений 2-го порядка.

В общем виде такое условие записывается в виде

$$\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{x\in\Gamma} = \varphi(x) \tag{1.9}$$

где α и β — функции, определенные на границе рассматриваемой области, удовлетворяющие условию $\alpha(x)^2 + \beta(x)^2 > 0$, а производная вычисляется по направлению внешней нормали.

Выделим два частных случая. При $\beta(x) \equiv 0$ можно считать, что $\alpha(x) \equiv 1$ (иначе на $\alpha(x)$ можно разделить). Получаем ***граничные условия I рода***

$$u\big|_{x\in\Gamma} = \varphi(x).$$

При $\alpha(x) \equiv 0$ можно считать, что $\beta(x) \equiv 1$. Получаем ***граничные условия II рода***

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x\in\Gamma} = \varphi(x).$$

Если $\beta(x)$ не обращается в нуль, то, разделив (1.9) на эту функцию, получим ***граничные условия III рода***

$$\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{x\in\Gamma} = \varphi(x).$$

На практике возможны задачи, в которых на разных частях границы ставятся граничные условия разного рода (например, на разных сторонах многоугольника на плоскости). В этом случае будем говорить о ***задаче со смешанными граничными условиями***.

Пример 1.4. Для одномерного уравнения теплопроводности граничные условия ставятся на двух концах рассматриваемого отрезка. В результате возникает $3 \cdot 3 = 9$ вариантов начально-краевой задачи, которые можно обозначить парами типов: I–I, I–II, I–III, II–I и т.д.

Разные типы граничных условий характеризуют разный характер взаимодействия с окружающей средой. Поясним это на примере уравнения теплопроводности. Условия I рода означают совпадение наружной температуры с внутренней. Условия II рода — это заданный поток тепла на границе. Наконец, условия III рода учитывают связь потока тепла с теплопроводностью границы области и могут быть записаны в виде

$$k\Big(u_{\text{внеш.}} - u\big|_{x\in S}\Big) = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x\in S}$$

(поток тепла у внутренней стороны границы пропорционален разности температур $u_{\text{внеш.}}$ снаружи и $u\big|_{x\in S}$ внутри).

2. ОДНОМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

2.1. Общее решение

Приведение к каноническому виду. Запись общего решения.

Одномерное волновое уравнение
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$
представляет собой редкий пример уравнения в частных производных, для которого можно выписать общее решение. Для этого достаточно его привести к каноническому виду.

Уравнение характеристик в дифференциалах имеет вид
$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0.$$
Решая его, находим замену переменных $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, которая преобразует волновое уравнение к виду $u_{\xi\eta} = 0$. Записав его в виде $(u_\xi)_\eta = 0$, заключаем, что $u_\xi = \varphi(\xi)$ (если частная производная функции равна нулю, то функция от этой переменной не зависит). Интегрируя по ξ, заключаем, что
$$u = \int \varphi(\xi)\, d\xi + \Psi(\eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta).$$

Итак, общее решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ имеет вид
$$u = \Phi(\xi) + \Psi(\eta),$$
где Φ и Ψ — произвольные дифференцируемые функции. Возвращаясь к исходным переменным, получаем общее решение уравнения (2.1):
$$u = \Phi(x + at) + \Psi(x - at). \tag{2.2}$$

2.2. Задача Коши

Постановка задачи Коши. Ее решение — формула Даламбера. Доказательство корректности постановки. Об обобщенных решениях

Задача Коши для уравнения (2.1) ставится следующим образом: найти функцию $u(t, x)$, дважды дифференцируемую при $t > 0$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по t в области $\{(t,\ x)\colon t \geqslant 0\}$, которая при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (2.1), а при $t = 0$ удовлетворяет заданным начальным условиям: $u(0, x) = \varphi(x)$, $u_t(0, x) = \psi(x)$, где φ и ψ — заданные непрерывные в $\mathbb{R}$ функции. Кратко такую задачу записывают следующим образом:
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ \ t > 0; \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{2.3}$$

Формула общего решения (2.2) позволяет записать в явном виде решение задачи Коши. Полагая $u(t, x) = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$, подставим это представление в начальные условия. получим систему двух уравнений:
$$\begin{cases} \Phi(x) + \Psi(x) = \varphi(x), \\ a\Phi'(x) - a\Psi'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение системы и складывая (после умножения на a) со вторым, находим

$$\Phi'(x) = \frac{a\varphi'(x) + \psi(x)}{2a}.$$

Интегрируем:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi\right) + C. \tag{2.4}$$

Возвращаясь к первому уравнению исходной системы, заключаем, что

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - \frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi\right) - C. \tag{2.5}$$

Таким образом,

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi. \tag{2.6}$$

Формулу (2.6) называют ***формулой Даламбера***.

Наши рассуждения означают следующее. Если $u(t,x) = \Phi(x+at) + \Psi(x-at)$ является решением поставленной задачи Коши, то функции Φ и Ψ удовлетворяют соотношениям (2.4) и (2.5), а решение задачи Коши, если существует, удовлетворяет условию (2.6). Нетрудно проверить, что формула (2.6) определяет решение задачи Коши при условии, что функция φ дважды непрерывно дифференцируема, а функция ψ непрерывно дифференцируема. Таким образом, решение задачи Коши единственно в классе $\mathcal{M}$ функций u, удовлетворяющих условиям:

- функция u дважды непрерывно дифференцируема в области $t > 0$;
- функция u непрерывна на множестве $t \geqslant 0$;
- u имеет частную производную u_t, непрерывную на множестве $t \geqslant 0$.

Решение задачи Коши существует при дополнительных требованиях на функции φ и ψ: первая должна быть дважды непрерывно дифференцируемой, вторая — непрерывно дифференцируемой.

Корректность постановки задачи Коши также предполагает, что отображение, которое паре функций $(\varphi,\ \psi)$ ставит в соответствие решение $u(t,x)$, в некотором смысле непрерывно. Для формулировки и обоснования утверждения о непрерывности отображения необходимо и область определения, и область значений снабдить топологией.

Ответ на вопрос о корректности задачи вытекает из следующей оценки:

$$|u(t,x)| \leqslant \frac{|\varphi(x+at)| + |\varphi(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} |\psi(\xi)|\,d\xi \leqslant \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2a}\,\|\psi\|_1,$$

откуда

$$\|u\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2a}\,\|\psi\|_1.$$

Замечание 2.1. Формула Даламбера дает некоторую функцию $u(t,x)$ в гораздо более широком классе начальных условий, но получаемая при этом функция не будет дифференцируемой и по формальным признакам решением задачи Коши не будет. Однако найденное таким образом «решение» будет иметь физический смысл и будет описывать реально происходящие физические процессы. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда класс функций, для которого ставится задача является неоправданно (с физической точки зрения) зауженным. Это указывает на недостаточно развитый математический аппарат. Необходимо либо менять формулировку задачи (например, переходя к интегральным соотношениям), либо расширять понимание термина «производная» так, чтобы можно было дифференцировать функции, в общепринятом смысле недифференцируемые. С математической точки зрения ситуацию можно трактовать так: отображение $\mathcal{R}$, которое паре функций $(\varphi,\ \psi)$ ставит в соответствие решение u, поставленной задачей определено на множестве $C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$, но имеет непрерывное продолжение $\tilde{\mathcal{R}}$ на множество $C(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$. Решение, которое дается продолженным отображением $\tilde{\mathcal{R}}$, называют ***обобщенным***, в то время как решение, полученное в изначальной постановке (т.е. с помощью отображения $\mathcal{R}$), ***классическим***. Если обобщенное решение удовлетворяет требуемым условиям гладкости (принадлежности заданному классу функций), то оно является классическим.

2.3. Метод распространяющихся волн

Интерпретация решения в случае нулевой начальной скорости. Нулевое положение и ненулевая скорость. Полуограниченная струна и метод отражений. Ограниченная струна.

Неограниченная струна. Формула Даламбера позволяет проанализировать свойства решений волнового уравнения Отметим, что решение задачи Коши (2.3) можно представить в виде суммы решений двух подзадач:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0; \\ v\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t\big|_{t=0} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0; \\ w\big|_{t=0} = 0, \quad w_t\big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

Первая из этих подзадач связана с начальным отклонением (положением), вторая — с начальными скоростями. Рассмотрим сначала первую подзадачу, полагая, что $\varphi(x) = \Lambda(x)$ (функция треугольного импульса, рис. 2.1). Отметим, что указанная функция не является дважды непрерывно дифференцируемой, так что в данном случае решение надо понимать в обобщенном смысле.

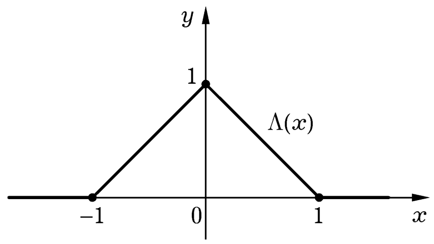

Рис. 2.1. Функция треугольного импульса $\Lambda(x)$

Согласно формуле Даламбера, имеем

$$v(t,x) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$$

При заданном значении t функция $v(t,x)$ получается суммированием двух смещений функции $\varphi(x)$ влево и вправо на величину at (рис. 2.2). С увеличением t два полуимпульса разбегаются со скоростью a.

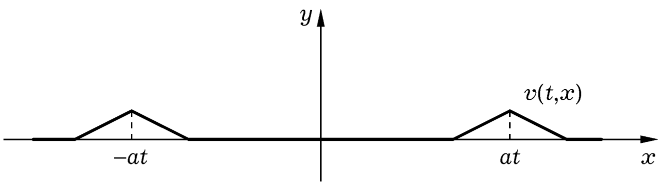

Рис. 2.2. Функция $v(t,x)$ в момент времени t

На плоскости (x,t) процесс разбегания можно представить следующим образом (рис. 2.3).

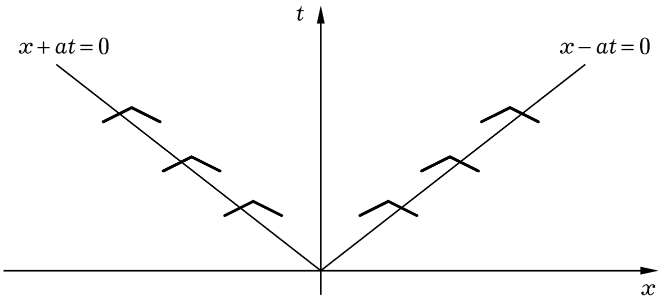

Рис. 2.3. График функции $v(t, x)$

Полуимпульсы смещаются вдоль двух характеристик $x - at = 0$ и $x + at = 0$. Рисунок наглядно представляет поверхность, которая является графиком функции $v(t, x)$.

Рассмотрим вторую подзадачу (2.7), полагая, что $\psi(x) = \mathrm{rect}(x)$ (функция прямоугольного импульса, рис. 2.4).

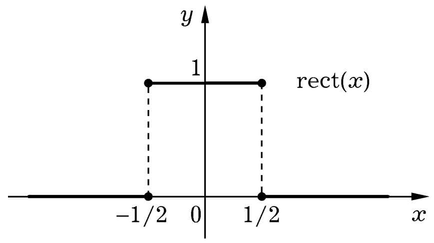

Рис. 2.4. Функция прямоугольного импульса $\mathrm{rect}(x)$

Согласно формуле Даламбера,

$$w(t, x) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Введем в рассмотрение функцию, являющуюся первообразной функции $\psi(x)$:

$$\psi_i(x) = \frac{1}{a} \int\limits_{0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi$$

(график функции $\psi_i(x)$ для случая $\psi(x) = \mathrm{rect}(x)$ представлен на рис. 2.5). Тогда

$$w(t, x) = \frac{\psi_i(x + at) - \psi_i(x - at)}{2}.$$

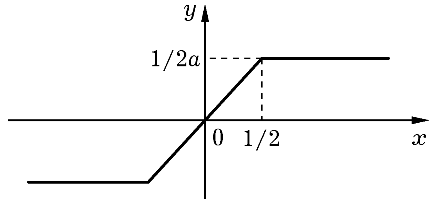

Рис. 2.5. Первообразная $\psi_i(x)$ функции $\psi(x) = \mathrm{rect}(x)$

С помощью функции $\psi_i(x)$ вычитанием двух ее смещений получаем функцию $w(t, x)$ при фиксированном t (рис. 2.6).

Видно, что, как и в первой подзадаче, происходит разбегание двух волн со скоростью a, но характер волн изменился. В пределе при $t \to +\infty$ получим постоянную функцию со значением $\dfrac{1}{2a}$.

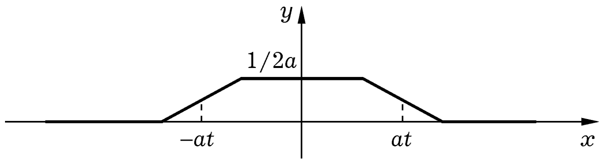

Рис. 2.6. Функция $w(t,x)$ в момент времени t

Полуограниченная струна. Рассмотрим следующую задачу, которую также называют задачей Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \ t > 0; \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x); u\big|_{x=0} = \mu(t). \end{cases} \tag{2.8}$$

Задачу (2.8) можно разложить в две задачи, сумма решений которых даст решение нашей задачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x > 0, \ t > 0; \\ v\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t\big|_{t=0} = \psi(x); \\ v\big|_{x=0} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad x > 0, \ t > 0; \\ w\big|_{t=0} = 0, \quad w_t\big|_{t=0} = 0; \\ w\big|_{x=0} = \mu(t). \end{cases} \tag{2.9}$$

Рассмотрим каждую задачу (обозначение неизвестной функции оставим традиционное — u).

Используя общее решение $v(t,x) = \Phi(x+at) + \Psi(x-at)$ и начальные условия, как и в случае неограниченной струны, получаем уравнения:

$$\begin{cases} \Phi(x) + \Psi(x) = \varphi(x), \\ \Phi'(x) - \Psi'(x) = \dfrac{1}{a}\psi(x). \end{cases}$$

Эти уравнения верны при $x > 0$. Как и в случае неограниченной струны, функции Φ и Ψ определяются соотношениями

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi, \quad \Psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi,$$

которые верны при $x > 0$. В формуле $v(t,x) = \Phi(x+at) + \Psi(x-at)$ в функции Φ использужся только положительные значения аргумента, а в функции Ψ и положительные, и отрицательные. Значит, функцию Ψ надо определить и при $x < 0$. Для этого используем граничное условие, согласно которому $\Phi(at) + \Psi(-at) = 0$, или

$$\Phi(x) + \Psi(-x) = 0, \quad x > 0.$$

Отсюда

$$\Psi(x) = -\Phi(-x) = -\frac{1}{2}\varphi(-x) - \frac{1}{2a}\int_0^{-x} \psi(\xi)\,d\xi, \quad x < 0.$$

Продолжая особым образом функции φ и ψ в отрицательную часть числовой оси, можно сохранить выражение для Ψ, указанное при $x > 0$. Действительно, если положить $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, $\psi(x) = -\psi(-x)$, $x < 0$, то получим

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi, \quad x < 0.$$

Соглашение о продолжении позволяет записать решение с помощью формулы Даламбера. Итак, полагая

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x)$$

(т.е. продолжая функции φ и ψ в отрицательную область нечетным образом), можем записать решение первой задачи (2.9) с помощью формулф Даламбера, т.е. в виде

$$v(t,x) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi, \quad x>0,\ \ t>0.$$

Формула Даламбера позволяет представить решение геометрически. Пусть функция $\varphi(x)$ представляет собой треугольный импульс с центром на положительной части действительной оси. Продолжим функцию нечетным образом. На рис. 2.7 продолжение показано пунктиром.

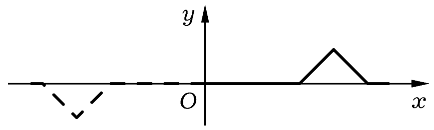

Рис. 2.7. Начальное положение $\varphi(x)$

Повторим процедуру построения функции $v(t,x)$ в фиксированный момент времени так же, как и в случае неограниченной струны. Мы видим, что сначала характер поведения такой же, как и у неограниченной струны: два полуимпульса разбегаются в разные стороны со скоростью a, виртуальная часть в отрицательной области на характер функции влияния не оказывает. (рис. 2.8, .a). Однако затем виртуальный импульс из отрицательной области меняется местами с реальным. Это означает, что левый полуимпульс отражается от границы, он переворачивается и начинает двигаться вправо вслед за правым полуимпульсом (рис. 2.8, *б*).

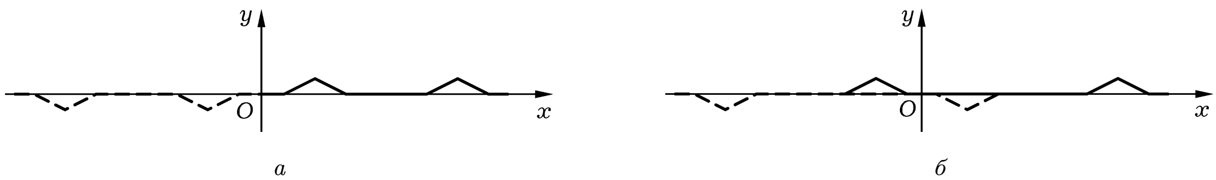

Рис. 2.8. Отражение волны от границы

На плоскости (x,t) отражение выглядит как отражение характеристики $x+at=c$ от оси Ot (рис. 2.9).

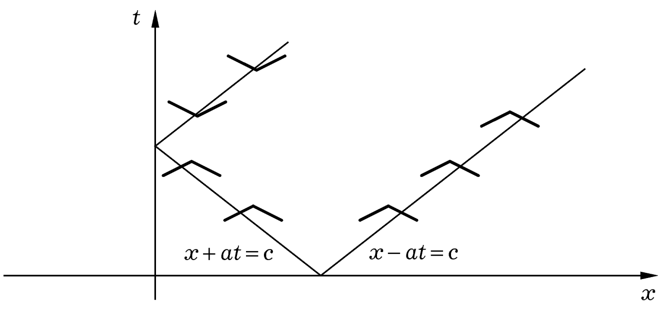

Рис. 2.9. Эффект отражения полуволны от границы

Рассмотрим вторую задачу (2.9). Записав решение в виде $w(t,x) = \Phi(x+at)+\Psi(x-at)$, из начальных условий заключаем, что $\Phi(x)=0$, $\Psi(x)=0$, $x>0$. Для описания решения необходимо определить функцию Ψ в отрицательной области, для чего используем граничное условие, которое в данной случае дает равенство $\Phi(at)+\Psi(-at)=\mu(t)$, или

$$\Phi(x)+\Psi(-x) = \mu\Big(\frac{x}{a}\Big), \quad x>0.$$

Учитывая, что $\varphi(x) = 0$, $x > 0$, окончательно получаем $\Psi(x) = \mu\Bigl(-\dfrac{x}{a}\Bigr)$, $x < 0$. Итак,

$$\Phi(x) = 0, \quad x > 0; \qquad \Psi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ \mu\Bigl(-\dfrac{x}{a}\Bigr), & x < 0. \end{cases}$$

Используя полученные представления окончательно получаем:

$$w(t,x) = \begin{cases} 0, & x - at > 0; \\ \mu\Bigl(t - \dfrac{x}{a}\Bigr), & x - at < 0. \end{cases}$$

В задаче (2.8) граничное условие есть условие I рода. При таком условии наблюдается эффект отражения волн от границы с переворачиванием. В случае граничного условия II рода выкладки близки к предыдущим. Но при этом функции φ и ψ следует продолжать в отрицательную область четным образом. При этом в первой задаче (с нулевым граничным условием) решение будет по-прежнему описываться формулой Даламбера, а во второй задаче получаем:

$$w(t,x) = \begin{cases} 0, & x - at > 0; \\ -\displaystyle\int\limits_0^{t-x/a} \mu(\xi)\, d\xi, & x - at < 0. \end{cases}$$

Четное продолжение функций φ и ψ означает, что при граничном условии II рода также проявляется эффект отражения волны от границы, но не происходит переворачивания.

2.4. Частные решения трехмерного волнового уравнения

Трехмерное волновое уравнение. Его запись в сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Bigl(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Bigr) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\Bigl(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\Bigr) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Решения с радиальной (сферической симметрией). Затухание.

Общее решение одномерного волнового уравнения дает некоторые частные решения и многомерного волнового уравнения. Например, предположив, что решение уравнения

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \tag{2.10}$$

не зависит от y и z, мы приходим к одномерному волновому уравнению, которое дает нам частные решения

$$u(t,x) = \Phi(x + at) + \Psi(x - at). \tag{2.11}$$

Полученное решение называется ***плоской волной***. Выполнив преобразование декартовой системы координат в пространстве, мы можем получить решение более общего вида

$$u = \Phi(\boldsymbol{rn} + at) + \Psi(\boldsymbol{rn} - at),$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, $\boldsymbol{n}$ — некоторый единичный вектор. То, что функция u, определяемая этой формулой есть решение волнового уравнения, можно убедиться непосредственно. Но в принципе формулу можно получить, записав формулу (2.11) в инвариантной форме, т.е. без непосредственного использования координат: достаточно сообразить, что $x = \boldsymbol{ri}$. А далее в результате преобразования получим нужную формулу, в которой $\boldsymbol{n}$ — это бывший координатный $\boldsymbol{i}$.

Замечание 2.2. Для того чтобы эти рассуждения были законными, нужно показать, что при замене декартовых координат вид дифференциального уравнения не изменится.

Дополнительно частные решения можно получить, полагая, что решение зависит лишь от $|\boldsymbol{r}|$ и не зависит от направления этого вектора. Такое требование просто записать, переходя в дифференциальном уравнении к сферическим пространственным координатам:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \, \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

С условием независимости функции от угловых координат уравнение упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Раскрывая скобки в правой части, приходим к следующему линейному урвнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2a^2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{2.12}$$

Его можно решить таким же образом, как и одномерное волновое уравнение. Но заметим, что

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Поэтому уравнение (2.12) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Его решением является

$$u(t, r) = \frac{1}{r} \Phi(r + at) + \frac{1}{r} \Psi(r - at). \tag{2.13}$$

Решение (2.13) уравнения (2.10) называется ***сферической волной***. В нем два слагаемых, первое — волна, фронт которой движется из бесконечности к началу координат, второе — волна, уходящая в бесконечность. Коэффициент $1/r$ указывает на затухание уходящей волны. Напротив, амплитуда приходящей волны растет (как гребень морской волны при приближению к берегу).

3. МЕТОД ФУРЬЕ

3.1. Поучительный пример

Рассмотрим смешанную задачу для одномерного уравнения колебаний — задачу малых колебаний ограниченной струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \;\; t > 0; \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x); \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Эту задачу можно решать примерно так же, как и задачу Коши для полуограниченной струны. Можно продолжить нечетным образом функции φ и ψ сначала на отрезок $[l,\, 2l]$, затем на отрезок $[2l,\, 3l]$ и так далее. После этого повторить процедуру повторения с левой стороны. При таком продолжении формула Даламбера даст решение задачи на отрезке $[0,\, l]$. Механизм продолжения фактически ознеачает, что для каждой точки, строя характеристики, мы должны подсчитать все отражения и после этого установить, из каких точек начальные условия формируют значение в данной точке. Предложенный вариант решения, хотя и возможен, не очень удобен с точки зрения реализации и, кроме того, не переносится на другие задачи. Нужен более универсальный способ.

Один из способов решения задачи (3.1) в литературе часто излагается следующим образом. Рассмотрим специальные решения дифференциального уравнения вида $u(t,x) = T(t)\,X(x)$, которые к тому же удовлетворяют граничным условиям, т.е. для функции $X(x)$ имеют место соотношения $X(0) = 0$, $X(l) = 0$.

Подставми $u = T(t)\,X(x)$ в дифференциальное уравнение:

$$T''(t)\,X(x) = a^2 T(t)\,X''|(x),$$

или, после деления на $a^2 T(t)\,X(X)$:

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

в последнем равенстве слева — функция переменного t, а справа — функция переменного x. В силу равенства обе они постоянны. Записав $X''(x)/X(x) = \lambda = \mathrm{const}$, приходим к дифференциальному

$$X'' - \lambda X = 0. \tag{3.2}$$

Это линейное димфференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое при любом λ имеет два линейно независимых решения. Однако несложно проверить, что среди всей этой массы решений граничным условиям удовлетворяют только функции $\sin\omega_n x$, где $\omega_n = \dfrac{n\pi}{l}$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$, а эти функциям соответствуют значения $\lambda_n = -\omega_n^2$.

Найдя значения λ_n, для каждого такого значения имеем еще одно дифференциальное уравнение: $\dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{T''}{T} = \lambda_n$, или

$$T'' - a^2 \lambda_n T = 0.$$

С учетом знака λ_n находим

$$T_n(t) = A_n \cos a\omega_n t + B_n \sin a\omega_n t,$$

где коэффициенты A_n И B_n пока не определены.

Найдя большое количество решений, удовлетворяющих однородным граничным условиям, ищем решение исходной задачи в виде их линейной комбинации, а точнее в виде ряда

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos a\omega_n t + B_n \sin a\omega_n t\big) \sin \omega_n x.$$

Предполагаем, конечно, что этот ряд является решением дифференциального уравнения, поскольку каждый член ряда — решение этого уравнения. Граничные условия выполняются, и остается обеспечить выполнение начальных условий. Подставив $t = 0$, получим

$$u\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n x = \varphi(x).$$

Аналогично равенство, полученное после дифференцирования ряда:

$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin \omega_n x = \psi(x).$$

Вдруг оказалось, что коэффициенты A_n и B_n связаны с разложением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд по синусам кратных углов. Коэффициенты такого разложения можно найти по формулам Эйлера — Фурье:

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \, \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad B_n = \frac{2}{l\omega_n} \int\limits_0^l \psi(x) \, \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 1, \, 2, \, \ldots$$

Изложенное решение оставляет несколько вопросов математического плана. Во-первых, не ясно, сходится ли ряд из найденных решений специального вида. Во-вторых, не ясно, является ли сумма ряда в действительности решением дифференциального уравнения, т.е. можно ли его дифференцировать почленно. В конкретном случае эти вопросы обходятся: полученный ряд можно проверить непосредственно, что он является решением задачи уже с соблюдением всех математических ограничений.

Однако главная проблема не в этих вопросах. Совершенно не ясно, где здесь специфика конкретного уравнения, а где общие принципы, позволяющие создать общий метод решения подобных задач. В частности, не ясно, всегда ли будет получаться ряд по ортогональной системе и отчего это зависит. Не ясно, что делать в случае, когда дифференциальное уравнение неоднородно.

Ситуацию в этом примере можно немного прояснить следующим образом. Рассмотрим линейный оператор $Lu = u''(x)$, областью определения которого являются функции, непрерывные на отрезке $[0, \, l]$, дважды непрерывно дифференцируемые на интервале $(0, \, l)$, удовлетворяющие установленным граничным условиям. Уравнение (3.2) является уравнением на собственные функции этого линейного оператора. Далее, формулы Эйлера — Фурье, как легко увидеть предстьавляют собой скалярные произведения в рамках евклидова пространства $L_2[0, l]$. Вычисление коэффициентов (координат разложения) через скалярное произведение работает (в конечномерном случае) в ортогональных базисах. Таким образом, речь идет о разложении искомого решения по собственным функциям некоторого линейного оператора, связанного с задачей, причем важны условия, при которых собствыенные функции образуют ортогональную систему.

Дальнейшее изложение здесь в основном посвящено краткой сводке нужных теоретических фактов из функциорнального анализа.

3.2. Ортогональные системы в гильбертовом пространстве

Гильбертово пространство. Понятие ортогональной системы. Ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Полные и замкнутые системы.

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, называют ***евклидовым***. В евклидовом пространстве действует ***евклидова норма*** $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})}$ (также ее называют сферической). С помощью нормы можно измерять степень близости векторов и на этой основе дать определение сходимости. Последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}$ векторов нормированного пространства сходится к вектору $\boldsymbol{x}$, если числовая последовательность $\{|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}|\}$ является бесконечно малой, т.е. сходится к нулю.

В конечномерном евклидовом пространстве верны многие теоремы математического анализа, касающиеся сходимости. В частности, верен ***критерий Коши***: последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она ***фундаментальна***, т.е. $\{|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m|\}$ стремится к нулю при $n,\ m \to +\infty$.

В бесконечномерных евклидовых пространствах критерий Коши может не иметь места. Если для нормаированного пространства L выполняется критерий Коши, т.е. любая фундаментальная последовательность сходится, то такое нормированное пространство называют ***полным***, или ***банаховым***. Если евклидово пространство, как нормированное с евклидовой нормой, является полным, его называют ***гильбертовым***. Обычно есть дополнительное требование, что гильбертово пространство бесконечномерно.

Есть еще одна особенность бесконечномерных нормированных пространств. В конечномерном случае используют термин «подпространство» для подмножеств линейного пространство, замкнутых относительно линейных операций. Каждое подпространство конечномерного нормированного пространства является замкнутым множеством, т.е. предельный переход не выводит за пределы такого множества. В бесконечномерном случае множество, замкнутое относительно линейных операций, может не быть замкнутым множеством в смысле топологическом (т.е. относительно предельного перехода). В связи с этим в функциональном анализе используют два термина:

– множество, замкнутое относительно линейных операций (алгебраически замкнутое), называют ***линейным многообразием***;

– множество, замкнутое и алгебраически, и топологически, называют ***линейным подпространством***.

Пример 3.1. Примером полного нормированного пространства является множество функций, непрерывных на отрезке $[a,\ b]$, с обычными операциями сложения и умножения на число и с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,\,b]} |f(x)|.$$

Его обозначают $C([a,\ b])$. Сходимость последовательности функций по указанной норме — это ***равномерная сходимость***.

В качестве множества в этом пространстве, алгебраически замкнутого, можно назвать совокупность всех многочленов. Это множество не является подпространством, поскольку, например, функция $\sin x$ есть сумма степенного ряда, сходящегося на любом отрезке равномерно. Более того, согласно известной теореме Вейерштрасса, любая функция, непрерывная на отрезке, является равномерным пределом некоторой последовательности многочленов. Это заключение означает, что множество всех многочленов ***всюду плотно*** в $C([a,\ b])$, т.е. замыкание этого множества совпадает с $C([a,\ b])$.

Итак, множество всех многочленов есть всюду плотное линейное многообразие в $C([a,\ b])$. Пример подпространства в $C([a,\ b])$ — множество всех непрерывных на $[a,\ b]$ функций, обращающихся в нуль в точке a (также в любой другой точке и на любом замкнутом подмножестве отрезка $[a,\ b]$).

Пример 3.2. Канонический пример гильбертова пространства — множество l_2 числовых последовательностей $\boldsymbol{x} = \{x_n\}$, удовлетворяющих условию

$$|\boldsymbol{x}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty.$$

Скалярным произведением в l_2 является

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

(ряд справа для любых последовательностей в l_2 сходится абсолютно).

В математической физике (и теории дифференциальных уравнений в частных производных) более существенную роль играет гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, определенных на измеримом пространстве Ω и суммируемых с квадратом:

$$|f|^2 = \int\limits_{\Omega} |f(x)|^2\, d\mu$$

(здесь μ — конечная или счетно-конечная мера на измеримом пространстве Ω). На множествах в $\mathbb{R}^n$ в качестве μ чаще всего используют меру Лебега. Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ определяется формулой

$$(f,\ g) = \int\limits_{\Omega} f(x)\, g(x)\, d\mu.$$

Особенностью этих пространств является то, что интеграл по мере не изменяется, если функцию изменить на множестве меры нуль. Чтобы избежать конфликта с 4-й аксиомой скалярного произведения, функции, различающиеся на множестве меры нуль, считают одинаковыми. Более строго говоря, элементом гильбертова пространства $L_2(\Omega)$ являются классы функций, построенные по отношению эквивалентности

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} g(x).$$

(«равны почти всюду», т.е. всюду, кроме некоторого множества меры нуль).

Как и в конечномерных евклидовых пространствах, в бесконечномерных большую роль играют ***ортогональные системы***, т.е. множества ненулевых элементов, в которых любые два ортогональны друг другу. Любой конечная подсистема ортогональной системы линейно независима (это ключевая теорема линейной алгебры). Поэтому в бесконечномерном евклидовом пространстве есть бесконечные ортогональные системы. Отметим, что такая система может быть даже несчетной. В связи с этим введем понятие ***сепарабильного нормированного пространства*** — такого нормированного пространства, в котором есть счетная всюду плотная последовательность. Рассмотренные выше линейные пространства $C[a,\ b]$, l_2, $L_2(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ являются сепарабильными. В сепарабильном евклидовом пространстве любая ортогональная система не более чем счетна. Мы будем рассматривать бесконечные, т.е. счетные ортогональные системы.

Рядом по ортогональной системе $\{e_n\}$ называют ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Такой ряд называется сходящимся, если его последовательность частичных сумм $\sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n e_n$ сходится. На ряды в евклидовом пространстве распространяются многие понятия теории числовых рядов.

Теорема 3.1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ в евклидовом пространстве E сходится к некоторому элементу $x \in E$, т.е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n,$$

то

$$\alpha_n = \frac{(x,\ e_n)}{|e_n|^2}. \tag{3.3}$$

◀ Обозначим через S_N частичную сумму ряда: $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_n e_n$. Тогда по условию $|x - S_N| \to 0$ при $N \to \infty$. Выберем произвольный номер k и зафиксируем. При $N > k$, учитывая представление частичной суммы, имеем

$$(x,\ e_k) = (x - S_N,\ e_k) + (S_N,\ e_k) = (x - S_N,\ e_k) + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\,(e_n,\ e_k) = (x - S_N,\ e_k) + \alpha_k|e_k|^2.$$

Отсюда

$$(x,\ e_k) - \alpha_k|e_k|^2 = (x - S_N,\ e_k)\,.$$

Устремив N к ∞, с помощью неравенства Коши — Буняковского находим, что правая часть равенства стремится к нулю:

$$|\,(x - S_N,\ e_k)\,| \leqslant |x - S_N||e_k|,$$

поскольку $x - S_N| \to 0$ при $N \to \infty$. Но левая часть вообще не зависит от N. Значит, она равна нулю, т.е.

$$(x,\ e_k) = \alpha_k|e_k|^2.$$

Это эквивалентно равенству (3.3), которое выполняется для любого k, поскольку этот номер выбирался произвольно. ▶

Из доказанной теоремы вытекает, что если элемент x представим как сумма ряда по ортогональной системе, то коэффициенты α_n этого ряда вычисляются по формуле (3.3). Основной наш вопрос — представление элементов евклидова пространства (функций) в виде ряда по ортогональной системе. В этом контексте мы сразу можем считать, что коэффициенты ряда получены для некоторого $x \in E$ по формуле (3.3) и остановиться на вопросе, сходится ли такой ряд и, если да, то сходится ли он к рассматриваемому элементу x.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n, \quad \alpha_n = \frac{(x,\ e_n)}{|e_n|^2},\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{3.4}$$

называют ***рядом Фурье*** элемента x, коээфициенты α_n такого ряда — ***коэффициентами Эйлера — Фурье***, а формулы, по которым вычисляются эти коэффициенты, ***формулами Эйлера — Фурье***.

Теорема 3.2. Для любого ряда Фурье (3.4) имеет место ***неравенство Бесселя***

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |e_n|^2 \leqslant |x|^2. \tag{3.5}$$

◀ Пусть S_N — частичная сумма ряда Фурье (3.4). Очевидно неравенство $|x - S_N|^2 \geqslant 0$. Однако при этом

$$|x - S_N|^2 = (x - S_N,\ x - S_N) = |x|^2 - 2\,(x,\ S_N) + (S_N,\ S_N) =$$
$$= |x|^2 - 2\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\,(x,\ e_n) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} \alpha_n\alpha_m\,(e_n,\ e_m) =$$
$$= |x|^2 - 2\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 |e_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 |e_n|^2 = |x|^2 - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 |e_n|^2.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 |e_n|^2 \leqslant |x|^2.$$

Последнее неравенство означает, что частичные суммы знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ ограничены сверху величиной $|x|^2$. Значит, ряд сходится, а его сумма также не превышает $|x|^2$. ▶

Замечание 3.1. Из доказательства неравенства Бесселя можно получить еще одно важное свойство. Согласно доказательству, для суммы $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n e_n$ с произвольными коэффициентами α_n имеем

$$|x - S_N|^2 = |x|^2 - 2\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\,(x,\ e_n) + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 |e_n|^2.$$

Правую часть равенства можно рассматривать как квадратичную функцию с переменными α_n. Нетрудно показать, что она имеет наименьшее значение при $\alpha_n = \dfrac{(x,\ e_n)}{|e_n|^2}$. Но величина $|x - S_N|$ показывает отклонение суммы S_N от элемента x. Таким образом, наименьшее отклонение частичных сумм ряда по ортогональной системе от элемента x будет в случае, когда этот ряд есть ряд Фурье элемента x. Это свойство известно как ***минимальное свойство ряда Фурье***.

Возвращаемся к вопросу, когда ряд Фурье сходится к своему элементу.

Теорема 3.3. Ряд Фурье (3.4) элемента x сходится к x тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |e_n|^2 = |x|^2, \tag{3.6}$$

т.е. когда неравенство Бесселя превращается в равенство.

◀ Согласно доказательству теоремы 3.2, имеем

$$|x - S_N|^2 = |x|^2 - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 |e_n|^2. \tag{3.7}$$

Сходимость ряда Фурье к x означает, что $|x - S_N| \to 0$ при $N \to \infty$. В этом случае в силу (3.7)

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 |e_n|^2 \to |x|^2 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Наоборот, если имеем место (3.6), то $|x - S_N| \to 0$ при $N \to \infty$, т.е. ряд Фурье сходится к x. ►

Равенство (3.6) известно как ***Равенство Парсеваля***.

Из неравенства Бесселя вытекает, что частичные суммы ряда Фурье всегда образуют фундаментальную последовательность. Действительно,

$$|S_N - S_{N+p}|^2 = \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} \alpha_n e_n \right|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+p} \alpha_n^2 |e_n|^2.$$

Отсюда вытекает, что фундаментальность последовательности $\{S_N\}$ равносильна фундаментальности последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 |e_n|^2$, т.е. сходимости этого ряда, а он всегда сходится.

Из условия фундаментальности последовательности частичных сумм можно сделать заключение о сходимости ряда в случае, когда выполняется критерий Коши, т.е. когда евклидово пространство полно и является гильбертовым.

Теорема 3.4. В гильбертовом пространстве любой ряд Фурье сходится. #

Рассмотрим элемент $x \in E$ в гильбертовом пространстве E и пусть x_0 — сумма его ряда Фурье. Положим $y = x - x_0$. Оказывается, что y ортогонален каждому элементу системы $\{e_n\}$. Действительно,

$$(y,\ e_k) = (x - x_0,\ e_k) = (x,\ e_k) - (x_0,\ e_k) = \alpha_k |e_k|^2 - \alpha_k |e_k|^2 = 0.$$

Здесь равенство $(x,\ e_k) = \alpha_k |e_k|^2$ верно по определению (коэффициенты ряда являются коэффициентами Эйлера — Фурье элемента x), а равенство $(x_0,\ e_k) = \alpha_k |e_k|^2$ вытекает из теоремы 3.1.

Если $y \neq 0$, то этот элемент можно добавить к ортогональной системе, т.е. расширить ортогональную систему, а в результате в ряд Фурье будет добавлено новое слагаемое, связанное с y. Получается, что ряд Фурье не сходился к своему элементу потому, что в ортогональной системе были учтены не все составляющие.

Ортогональная система называется ***полной***, если она не является частью какой-либо другой ортогональной системы, т.е. из условия $y \perp e_n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, вытекает, что $y = 0$.

Если в гильбертовом пространстве ортогональная система $\{e_n\}$ является полной, то любой ряд Фурье по этой системе сходится к своему элементу.

Мы получили свойство-критерий того, что любой элемент представим рядом по ортогональной системе: во-первых, евклидово пространство должно быть полным (гильбертовым), а во-вторых, ортогональная система должна быть полной.

Замечание 3.2. Следует обратить внимание на то, что термин «полный» используется в двух разных смыслах: для евклидова пространства — выполнение критерия Коши, для ортогональной системы — невозможность ее пополнения.

Условие полноты ортогональной системы на самом деле не является простым для проверки. Кроме того, требуется еще полнота самого евклидова пространства. Есть еще один критерий представимости любого элемента рядом по ортогональной системе.

Ортогональную систему $\{e_n\}$ в евклидовом пространстве E назовем ***замкнутой***, если множество конечных линейных комбинаций элементов ортогональной системы всюду плотно в E.

Если система $\{e_n\}$ замкнута, то для любого элемента x и для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такую линейную комбинацию $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n e_n$ с некоторыми коэффициентами α_n, что $|x - S_N| < \varepsilon$. Но в силу минимального свойства этому же неравенству удовлетворяет и частичная сумма ряда Фурье элемента x, причем не только сумма, соответствующая индексу N, но и все последующие (опять-таки в силу минимального свойства все последующие частичные суммы дают меньшее отклонение: частичная сумма S_N ряда Фурье может рассматриваться как линейная комбинация

$N+p$ элементов ортогональной системы и в этом качестве проигрывает частичной сумме S_{N+p}). Это значит, что ряд Фурье сходится к элементу x.

Наоборот, если каждый элемент есть сумма своего ряда Фурье, то система $\{e_n\}$ замкнута, поскольку всюду плотное множество образуют всевозможные частичные суммы рядов Фурье.

Теорема 3.5. В гильбертовом пространстве ортогональная система замкнута тогда и только тогда, когда она полна.

◀ Условие полноты следует из условия замкнутости в любом евклидовом пространстве. Действительно, если $y \perp e_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то ряд Фурье элемента y имеет все коэффициенты, равные нулю. Такой ряд, естественно, сходится к нулю. Но из рассуждений выше вытекает, что для замкнутой системы любой элемент есть сумма своего ряда Фурье. Значит, $y = 0$. Тем самым полнота доказана.

Если пространство гильбертово, а ортогональная система полна, то каждый элемент есть сумма своего ряда Фурье. В этом случае ортогональная система замкнута. ▶

Замечание 3.3. Условие замкнутости ортогональной системы равносильно тому, что любой ряд Фурье сходится к своему элементу, а это, согласно теореме 3.3, равносильно тому, что для любого элемента x имеет место равенство Парсеваля. Последнее условие часто используют для определения понятия замкнутости, т.е. говорят, что система замкнута, если для любого элемента выполняется равенство Парсеваля.

3.3. Тригонометрические ряды

Тригонометрическая система в $L^2[-l,l]$. Ортогональность. Разложение в тригонометрический ряд. Проблема поточечной сходимости.

Пример ортогональных систем дают тригонометрические ряды.

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2([-l, l])$ и в нем ортогональную систему 1, $\cos\dfrac{\pi x}{l}$, $\sin\dfrac{\pi x}{l}$, $\cos\dfrac{2\pi x}{l}$, $\sin\dfrac{2\pi x}{l}$, ... Эта система является ортогональной. Например,

$$\int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l}\,\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\Bigl(\sin\frac{(m+n)\pi x}{l} - \sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\Bigr)dx = 0.$$

Квадраты норм:

$$\int\limits_{-l}^{l} 1\cdot dx = 2l, \qquad \int\limits_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int\limits_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = l.$$

Ряд по этой ортогональной системе записывают в форме

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(A_n\cos\frac{n\pi x}{l} + B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigr)$$

и называют ***тригонометрическим рядом***.

Такой ряд можно составить как ***ряд Фурье*** функции $f(x)$, суммируемой на отрезке $[-l, l]$, для чего коэффициенты нужно вычислить по формулам Эйлера — Фурье:

$$A_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad B_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \ n = 1, 2, \ldots \quad (3.8)$$

Согласно варианту теоремы Вейерштрасса, в $L_2([-l,\,l])$ всюду плотны ***тригонометрические многочлены*** — частичные суммы тригонометрических рядов. Значит, тригонометрическая система замкнута в $L_2([-l,\,l])$, а любой ряд Фурье сходится к своей функции в $L_2([-l,\,l])$, т.е.

$$\int\limits_{-l}^{l}\left|f(x)-\frac{A_0}{2}-\sum_{n=1}^{N}\Bigl(A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\right|^2dx\to 0\quad\text{при}\quad N\to\infty.$$

Условие сходимости на самом деле непростое и отнюдь не гарантирует сходимости ряда Фурье к своей функции в каждой точке. Можно лишь утверждать, что любая функция может быть восстановлена по своему ряду Фурье с точностью до значений на множестве меры нуль. Как это сделать, пока не ясно.

Можно сформулировать дополнительные условия, при которых ряд Фурье сходится к своей функции поточечно. Например, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|A_n|+|B_n|)$ сходится, то тригонометрический ряд сходится равномерно. Из равномерной сходимости вытекает сходимость его к той же функции в $L_2([-l,\,l])$. Значит, равномерно он сходится к своей функции, которую можно представить как непрерывную функцию. Сформулированное условие несложно проверить по известным коэффициентам. Например, так будет, если $A_n=O\Bigl(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Bigr)$, $B_n=O\Bigl(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Bigr)$.

Другой вариант условий — на исходную функцию.

Теорема 3.6 (Дирихле). Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-l,\,l]$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ кусочно непрерывна, т.е. имеет на $[-l,\,l]$ конечное число точек разрыва и все они первого рода;

2) $f(x)$ кусочно монотонна, т.е. отрезок $[-l,\,l]$ можно так разделить на конечное число подотрезков, что на каждом из этих подотрезков функция монотонна;

3) в каждой точке разрыва выполняется равенство

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

т.е. значение функции в точке разрыва равно полусумме односторонних пределов функции в этой точке, а в концах отрезка — равенство

$$f(-l)=f(l)=\frac{f(l-0)+f(-l+0)}{2}.$$

Тогда в каждой точке отрезка выполняется равенство

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigr),$$

где коэффициенты A_n, B_n вычислены по формулам Эйлера — Фурье (3.8). #

Условия 1) и 2) в сформулированной теореме Дирихле называют ***условиями Дирихле***. Эти условия взаимосвязаны. Так из кусочной монотонности вытекает отсутствие точек разрыва второго рода (правда, монотонная функция может иметь на отрезке счетное число точек разрыва). При наличии условия 1) условие 2) может быть сформулировано как существование конечного числа точек локального экстремума. Но в целом эти условия носят глобальный характер, поскольку характеризуют поведение функции на отрезке в целом. Существуют и локальные условия.

Теорема 3.7 (Дини). Пусть функция $f(x)$ интегрируема (по Лебегу) на отрезке $[-l,\,l]$, а в каждой точке $x_0\in[-l,\,l]$ выполняются условия:

– существуют односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$;

– существуют односторонние производные

$$f'(x_0-0)=\lim_{h\to-0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h},\qquad f'(x_0+0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}.$$

Тогда

$$f(x_0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos\frac{n\pi x_0}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x_0}{l}\Big),$$

где коэффициенты A_n, B_n вычислены по формулам Эйлера — Фурье (3.8).

Условия существования односторонних производных являются ослабленным вариантом так называемых ***условий Дини***.

Теорема Дирихле и теорема Дини позволяют делать заключения о поточечной сходимости ряда Фурье по свойствам функции.

Тригонометрический ряд можно записывыть в различной форме. Например, его можно представить как суперпозицию простых гамоник. Действительно, рассмотрим выражение

$$A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Величины

$$a_n=\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}},\quad b_n=\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}$$

представляют собой координаты единичного двумерного вектора, т.е. для некоторого угла θ_n будем иметь $a_n=\sin\theta_n$, $b_n=\cos\theta_n$. С использованием этих представлений получаем

$$A_n\cos\frac{n\pi x}{l}+B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\sqrt{A_n^2+B_n^2}\Big(\sin\theta_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\cos\theta_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Big)=$$
$$=\sqrt{A_n^2+B_n^2}\sin\Big(\frac{n\pi x}{l}+\theta_n\Big).$$

Полагая $d_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$, $\nu_n=\dfrac{n}{2l}$, получаем представление тригонометрического ряда в виде

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(2\pi\nu_n x+\theta_n).$$

В этом представлении величину $d_0=\dfrac{A_0}{2}$ называют ***постоянной составляющей***, n-й член ряда — n-й ***гармоникой***, величины d_n, ν_n и θ_n — ***амплитудой***, ***частотой*** и ***начальной фазой*** n-й гармоники.

3.4. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Непрерывные и ограниченные операторы. Норма. Собственные значения и собственные векторы. Понятие спектра. Дискретный и непрерывный спектры. Самосопряженные операторы. Неограниченные операторы.

В конечномерном нормированном пространстве любой линейный оператор является непрерывным. В бесконечномерном случае это не так.

Определение 3.1. Линейный оператор $A\colon E\to E$ в линейном нормированном пространстве называется ***ограниченным***, если для некоторой постоянной $C>0$ выполняется условие

$\|Ax\| \leqslant C\|x\|$, $x \in E$. Точная нижняя грань таких значений C называется нормой ограниченного оператора.

Норму ограниченного оператора A можно вычислить по формуле

$$\|A \mid = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Линейный оператор непрерывен, если для любого x_0 и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ при $\|x - x_0\| < \delta$. Непрерывность линейного оператора в некоторой точке x_0 означает, что он непрерывен и в любой другой точке. Поэтому условие непрерывности можно формулировать лишь для точки $x_0 = 0$: линейный оператор A непрерывен, если любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|Ax\| < \varepsilon$ при $\|x\| < \delta$.

Довольно очевидно, что ограниченный оператор является непрерывным: в определении непрерывности достаточно установить $\delta = \varepsilon/\|A\|$.

Лемма 3.1. Непрерывный оператор в нормированном пространстве является ограниченным.

◀ Пусть линейный оператор A непрерывен. Выберем $\varepsilon = 1$ и по нему выберем соответствующее значение $\delta > 0$. Если $\|x\| = \delta/2$, то, согласно условию непрерывности, имеем $\|Ax\| < \varepsilon = 1$. Для произвольного $y \in E$

$$Ay = \frac{2\|y\|}{\delta} A\Big(\frac{\delta y}{2\|y\|}\Big).$$

Полагая $x = \dfrac{\delta y}{2\|y\|}$;, заключаем, что $\|x\| = \dfrac{\delta}{2}$. Поэтому

$$\|Ay\| = \frac{2\|y\|}{\delta}\|Ax\| \leqslant \frac{2}{\delta}\|y\| = C\|y\|. \qquad ▶$$

Таким образом, в нормированном пространстве понятия ограниченности и непрерывности линейного оператора эквивалентны. Различие понятий в том, что условие ограниченности базируется на норме, в то время как условие непрерывности можно ввести в гораздо более общей ситуации, когда нормы нет, но определено понятие окрестности точки, т.е. в топологическом линейном пространстве.

В бесконечномерном линейном пространстве есть линейные операторы, не являющиеся непрерывными (или ограниченными).

Пример 3.3. Рассмотрим множество бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ (под дифференцируемостью в концах отрезка понимается существование односторонней производной). Введем норму $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a\, b]} |f(x)|$. Получим нормированное пространство. В этом пространстве действует линейный оператор D, который каждой функции ставит в соответствие ее производную: $D[f](x) = f'(x)$. Этот оператор не является ограниченным. Действительно, Функции $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, имеют, по крайней мере начиная с некоторого номера, норму, равную 1. В то же время функции $D[f_n](x) = n \cos nx$ имеют норму, равную n. Ясно, что неравенство $\|D[f_n]\| \leqslant C\|f_n\|$ ни при каком C для всех n не выполняется.

В полном нормированном пространстве типично, что линейный оператор, не являющийся непрерывным, определен не на всем линейном пространстве, а на некотором линейном многообразии, которое называют ***областью определения линейного оператора***. Будем область определения линейного оператора A обозначать $D(A)$. Поскольку $D(A)$ — линейное многообразие, его замыкание — подпространство, которое, рассматриваемое как самостоятельное, будет полным нормированным пространством. Можно изначально ограничиваться этим подпространством, что позволяет считать, что $D(A)$ всюду плотно в рассматриваемом полном нормированном пространстве. В этом случае говорят, что ***линейный оператор A плотно определен***.

Плотно определенный оператор в гидьбертовом пространстве будем называть ***самосопряженным***, если $(Ax,\, y) = (x,\, Ay)$ для любой пары элементов $x,\, y \in d(A)$.

Комплексное число λ называется ***регулярным*** для линейного оператора A: $E \to E$, если линейный оператор $A - \lambda I$ биективен (т.е. взаимно однозначен и сюръективен), причем обратный оператор является ограниченным. Множество всех регулярных значений называют ***резольвентным множеством***. Дополнение в $\mathbb{C}$ к резольвентному множеству называется ***спектром линейного оператора***.

Таким образом, число λ относится к спектру, если оператор $A - \lambda I$ не имеет ограниченного обратного. Последнее может быть по нескольким причинам. Во-первых, линейный оператор $A - \lambda I$ может не быть инъективным, т.е. иметь ненулевое ядро. В этом случае существует ненулевой вектор x, для которого $(A - \lambda I)x = 0$, или $Ax = \lambda x$, называемый собственным вектором, при этом λ — собственное значение. Во-вторых, этот оператор может не быть эпиморфизмом (сюръективным). Наконец, обратный оператор существует, определен на всем линейном пространстве, но не ограничен. В первом случае число $\lambda \in \mathbb{C}$ относят к ***дискретному спектру***, а в двух последних случаях — к ***непрерывному спектру***.

Линейные операторы, которые мы будем рассматривать, имеют чисто дискретный спектр, т.е. непрерывный спектр отсутствует.

В случае самосопряженных линейных операторов верна теорема, используемая в линейной алгебре.

Теорема 3.8. Собственные векторы, отвечающие разным действитешльным собственным значениям, ортогональны.

◀ Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_1,\, x_2 \neq 0$. Тогда

$$(Ax_1,\, x_2) = \lambda_1 (x_1,\, x_2) \quad \text{и} \quad (Ax_1,\, x_2) = (x_1,\, Ax_2) = \lambda_2 (x_1,\, x_2)\,.$$

Поэтому $\lambda_1 (x_1,\, x_2) - \lambda_2 (x_1,\, x_2) = 0$, откуда $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1,\, x_2) = 0$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(x_1,\, x_2) = 0$. ▶

Именно самосопряженные операторы являются поставщиками ортогональных систем. Отметим, что если собственное число λ является кратным, т.е. размерность ядра оператора $A - \lambda I$ (собственное подпространство линейного оператора) больше единицы, то этому собственному числу λ соответствует несколько линейно независимых векторов, причем нет никаких оснований считать априори, что эти векторы ортогональны. Для обеспечения этого свойства надо, выбрав в собственном подпространстве систему независимых векторов, провести процесс ортогонализации.

3.5. Оператор Штурма — Лиувилля

Оператор $\mathcal{L}u = -(pu_x)_x + qu$. Его многомерое обобщение. Условие самосопряженности. Положительная определенность. Теорема о полноте собственных функций: собственные значения оператора $\mathcal{L}$ имеют конечную кратность и не имеют конечных предельных значений; ортогональная система собственных функций полна в L^2.

Рассмотрим следующую смешанную задачу

$$\begin{aligned} &c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(t,x), \quad x \in G, \quad t > 0; \\ &\Big(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\Big|_S = \mu(t,x). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь $S = \partial G$ — граница области G, по предположению являющаяся гладкой.

Эта задача описывает процесс распространения тепла или процесс диффузии в неоднородной среде. В правой части дифференциального уравнения есть дифференциальный оператор $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu$, который связан с дифференцированием по пространственным переменным, но не зависит от дифференцирования по времени. Область его определения есть некоторый класс функций, определенных в G. Очевидно, что эти функции должны быть дважды непрерывно дифференцируемы в G, а для связи с граничными условиями должны быть непрерывны в замкнутой области $\overline{G}$. Наша задача изучить свойства этого линейного оператора. Сначала остановимся на одномерном случае.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\frac{\partial}{\partial x}\Big) + qI, \tag{3.10}$$

взяв в качестве его области определения множество функций $C^2(G) \cap C(\overline{G})$, где в данном случае $G = [0,\ l]$ — отрезок. Проверим его на самосопряженность. Проверка базируется на интегрировании по частям:

$$(\mathcal{L}u,\ v) = \int\limits_0^l \big(-(pu_x)_x v + quv\big)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^l \big(-(pu_x)_x v\big) + \int\limits_0^l quv\,dx = -pu_x v\Big|_0^l + \int\limits_0^l pu_x v_x\,dx + \int\limits_0^l quv\,dx =$$

$$= p(uv_x - u_x v)\Big|_0^l + \int\limits_0^l \big(-u(pv_x)_x + quv\big)\,dx = p(uv_x - u_x v)\Big|_0^l + (u,\ \mathcal{L}v)\,.$$

Для выполнения равенства $(\mathcal{L}u,\ v) = (u,\ \mathcal{L}v)$ нужно, чтобы выполнялось равенство

$$p(uv_x - u_x v)\Big|_0^l = 0,$$

или

$$\left(p\begin{vmatrix} u & v \\ u_x & v_x \end{vmatrix}\right)\Bigg|_0^l = 0. \tag{3.11}$$

Рассмотрим значение определителя при $x = 0$. Равенство этого определителя нулю означает, что его строки пропорциональны, т.е. $\alpha u(0) + \beta u_x(0) = 0$ и $\alpha v(0) + \beta v_x(0) = 0$. Другими словами, условие (3.11) будет выполнено, если функции u и v удовлетворяют однородным граничным условиям общего вида.

Оператор $\mathcal{L}$ с областью определения, составленной из функций u класса $C^2(0,l) \cap C^1[0,l]$, удовлетворяющих условиям $\alpha_1 u(0) - \beta_1 u_x(0) = 0$ и $\alpha_2 u(l) + \beta_2 u_x(l) = 0$, называется ***оператором Штурма — Лиувилля***. Задача на соственные функции этого оператора называется ***задачей Штурма — Лиувилля***. Здесь $\alpha_i,\ \beta_i \geqslant 0,\ \alpha_i + \beta_i > 0,\ i = 1, 2$. Таким образом, задача Штурма — Лиувилля состоит в нахождении ненулевых функций, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{cases} -(pu_x)_x + qu = \lambda u, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u_x(0) = 0, \quad \alpha_2 u(l) + \beta_2 u_x(l) = 0. \end{cases}$$

Замечание. Обратим внимание на разные знаки в граничных условиях на левом и правом концах отрезка. Эти условия получены редукцией граничного условия задачи (3.9) общего вида. Производная по направлению внешней нормали в этом условии есть частная производная в точке l и минус частная производная в точке 0. Это и приводит к разным знакам в граничных условиях.

Рассмотрим оператор
$$\mathcal{P}u = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$
в классе функций $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, $G \in \mathbb{R}^3$. Роль интегрирования по частям в трехмерном случае играет формула Остроградского — Гаусса. Так как
$$\operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) = v \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + p \operatorname{grad} u \ \operatorname{grad} v,$$
то
$$\int\limits_G \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) v \, d\tau = \int\limits_G \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) \, d\tau - \int\limits_G p \operatorname{grad} u \ \operatorname{grad} v \, d\tau =$$
$$= \iint\limits_S pv \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{n} \, dS - \int\limits_G p \operatorname{grad} u \ \operatorname{grad} v \, d\tau = \iint\limits_S pv \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, dS - \int\limits_G p \operatorname{grad} u \ \operatorname{grad} v \, d\tau.$$

Формулу
$$\int\limits_G \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) v \, d\tau = \iint\limits_S pv \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, dS - \int\limits_G p \operatorname{grad} u \ \operatorname{grad} v \, d\tau$$
называют ***первой формулой Грина***.

Поменяв в первой формуле Грина местами переменные u и v и взяв разность двух формул, получим формулу
$$\int\limits_G \big(\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) v - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} v) u\big) \, d\tau = \iint\limits_S p\Big(v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) \, dS,$$
которую называют ***второй формулой Грина***.

Согласно второй формуле Грина,
$$(\mathcal{P}u, \ v) - (u, \ \mathcal{P}v) = \iint\limits_S p\Big(u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) \, dS.$$
Если функции u и v удовлетворяют однородному граничному условию
$$\Big(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\Big|_S = 0, \tag{3.12}$$
то
$$u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \begin{vmatrix} u & v \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \end{vmatrix} = 0,$$
поскольку граничное условие можно трактовать как условие пропорциональности строк определителя.

Таким образом, оператор $\mathcal{P}$ с областью определения, которая составлена из функций класса $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, удовлетворяющих граничному условию (3.12), является самосопряженным.

Из первой формулы Грина также следует, что
$$(\mathcal{P}u, \ u) = -\int\limits_G \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) v \, d\tau + \int\limits_G qu^2 \, d\tau = -\iint\limits_S pu \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, dS + \int\limits_G p (\operatorname{grad} u)^2 \, d\tau + \int\limits_G qu^2 \, d\tau.$$
Если функция u удовлетворяет однородным граничным условиям I или II рода, то
$$-\iint\limits_S pu \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \, dS = 0,$$

так что в этом случае

$$(\mathcal{P}u,\ u) = \int\limits_G p(\operatorname{grad} u)^2\, d\tau + \int\limits_G qu^2\, d\tau \geqslant 0,$$

причем $(\mathcal{P}u,\ u) = 0$ при $u \neq 0$ возможно лишь в случае $q \equiv 0$ и граничных условий II рода; тогда равенство будет выполняться для постоянных функций u.

Предположим, выполняются условия (3.12), где $\alpha,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta > 0$. Тогда на границе S области

$$(\alpha+\beta)u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \alpha u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \beta u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = -\beta\Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)^2 - \alpha u^2.$$

Следовательно,

$$-\iint\limits_S pu\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\iint\limits_S \Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)^2 dS + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\iint\limits_S u^2\, dS \geqslant 0$$

и $(\mathcal{P}u,\ u) \geqslant 0$, причем $(\mathcal{P}u,\ u) = 0$ лишь при условиях

$$\int\limits_G p(\operatorname{grad} u)^2\, d\tau = 0, \quad \int\limits_G qu^2\, d\tau = 0, \quad \iint\limits_S \bigg(\beta\Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)^2 + \alpha u^2\bigg) dS = 0.$$

Опуская математические нюансы, связанные с попеременным обращеием в нуль в парах p и q, α и β, заключаем, что условие $(\mathcal{P}u,\ u) = 0$ возможно для ненулевой функции только лишь при $q \equiv 0$ и $\alpha \equiv 0$, т.е. лишь для частного случая оператора $\mathcal{P}$ $(q = 0)$ с граничными условиями II рода. При этом функция оказывается постоянной.

Условие $(\mathcal{P}u,\ u) > 0$ при $u \neq 0$ означает, что все собственные значения положительны. Действительно, если $\mathcal{P}v = \lambda v$, то из условия $(\mathcal{P}u,\ u) > 0$ заключаем, что $\lambda\,(v,\ v) > 0$ и $\lambda > 0$. Если же $(\mathcal{P}u,\ u) = 0$ для некоторого $u \neq 0$, то u — собственная функция, отвечающая собственному значению 0. Такие, если есть, образуют одномерное подпространство (постоянные функции все кратны функции $u \equiv 1$). Следовательно, $\lambda = 0$ может быть собственным значением, но лишь при $q = 0$, $\alpha = 0$ и в этом случае оно простое.

3.6. Метод Фурье

Метод Фурье — исходные требования: а) разделение области по переменным; б) разделение оператора; в) условие самосопряженности.

Рассмотренный в разд. **3.1** пример относится к сфере общего метода решения краевых задач, основанного на операторном подходе к ним. Отметим, что в этом примере переменные t и x варьируются в независимых пределах (именно это позволило рассматривать решения вида $T(t)X(x)$). Кроме того, последовательность функций $X_n(x)$ оказалась ортогональной, что позволило получить формулы вычисления коэффициентов. Эта последовательтность возникает как последовательность собственных функций некоторого линейного оператора.

Сформулируем общие принципы метода решения, называемого ***методом Фурье***, или ***методом разделения переменных***. Запишем задачу в общем виде $Lu = f$, $x \in \Omega$. Пусть выполнены следующие условия:

1) область Ω задачи можно представить в виде декартова произведения $\Omega = \Omega_y \times \Omega_z$, где y и z — две составляющие вектора x, т.е. $x = (y,\ z)$;

2) линейный оператор L можно представить в виде суммы $L = L_y + L_z$, где оператор L_y связан с дифференцированием только по переменным группы y, а оператор — группы z;

3) оператор L_z является самосопряженным при соответствующем выборе его области определения (множество функций, определенных на Ω_z и удовлетворяющих однородным граничным условиям);

4) ортогональная система $\{Z_n\}$ собственных функций оператора L_z является полной.

При этих условиях решение $u(y,z)$ рассматриваемой задачи можно разложить в ряд Фурье по полной ортогональной системе $\{Z_n\}$:

$$u(y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) Z_n(z).$$

Здесь группа переменных y рассматривается как группа фиксированных параметров, а функция $u(y,z)$ при фиксированных параметрах y — как функция группы переменных z. Возможность такого представления вытекает из полноты системы собственных функций. Функции $Y_n(y)$ играют роль такого разложения и подлежат определению. Умножим дифференциальное уравнение скалярно на собственную функцию $Z_n(z)$:

$$(L_y u,\ Z_n) + (L_z u,\ Z_n) = (f,\ Z_n)\,.$$

Предположим, что оператор L_y коммутирует со скалярным произведением (это дифференцирование собственного интеграла по параметру). Кроме того, учтем, что L_z самосопряженный:

$$L_y\,(u,\ Z_n) + (u,\ L_z Z_n) = (f,\ Z_n)$$

Но $L_z Z_n = \lambda_n Z_n$, так как Z_n — собственная функция для L_z. Поэтому

$$L_y\,(u,\ Z_n) + \lambda_n\,(u,\ Z_n) = (f,\ Z_n)\,.$$

Обозначив $(u,\ Z_n) = Y_n$, $(f,\ Z_n) = f_n$, для каждого индекса n получим операторное (т.е. дифференциальное) уравнение

$$L_y Y_n + \lambda_n Y_n = f_n$$

Таким образом, исходная задача размерности $m_y + m_z$ (m_y — размерность Ω_y, m_z — размерность Ω_z) свелась к серии задач меньшей размерности m_y. Каждая такая задача позволяет найти один коэффициент разложения решения в ряд Фурье. Найдя все коэффициенты, найдем и решение задачи.

Пример 3.4. Рассмотрим задачу (3.1). В данном случае

$$Lu = u_{tt} - a^2 u_{xx}.$$

Можно выделить $L_t u = u_{tt}$ — дифференцирование по переменное t, а также $L_x = -u_{xx}$ — дифференцирование по переменной x (коэффициент a^2 в данном случае не играет роли). Оператор L_x — частный случай оператора $\mathcal{L}$ (3.10) при $p = 1$, $q = 0$. Он является самосопряженным, если его область определения функции класса $C^2([0,\ l])$, удовлетворяющие однородным граничным условиям. При этом он положительно определенный, т.е. его собственные числа все положительны. Решая задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} -u'' = \omega^2 u, \\ u(0) = 0, \quad u(l) = 0, \end{cases}$$

где $\omega^2 = \lambda$ — собственное значение, находим

$$X_n(x) = \sin \omega_n x, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Представим решение $u(t,x)$ в виде ряда

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Подставляем ряд в дифференциальное уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n''(x),$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n(x) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\omega_n^2 X_n(x).$$

Получили два равных разложения по полной ортогональной системе. Следовательно, коэффициенты этих разложений одинаковы:

$$T_n''(t) = -a^2\omega_n^2 T_n(t),$$

или

$$T_n''(t) + a^2\omega_n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Подставим ряд в начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)X_n(x) = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)X_n(x) = \psi(x).$$

Следовательно, значения $T_n(0)$ и $T_n'(0)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $psi(x)$, т.е.

$$T_n(0) = \varphi_n = \frac{(\varphi,\, X_n)}{\|X_n\|^2}, \quad T_n'(0) = \psi_n = \frac{(\psi,\, X_n)}{\|X_n\|^2}.$$

В результате для коэффициентов $T_n(t)$ нашего ряда получили задачу

$$\begin{cases} T_n'' + a^2\omega_n^2 T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n. \end{cases}$$

Это задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, причем линейного с постоянными коэффициентами. Ее решение находим стандартными методами:

$$T_n(t) = \varphi_n \cos a\omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin a\omega_n t.$$

В итоге

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\varphi_n \cos a\omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin a\omega_n t\Big) \cos \omega_n x,$$

или с учетом выражения для ω_n

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\varphi_n \cos \frac{an\pi t}{l} + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \frac{an\pi t}{l}\Big) \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Осталось заменить коэффициенты φ_n и ψ_n разложения функций из начальных условий.

Замечание 3.4. Использованная в примере подстановка ряда в дифференциальное уравнение и начальные условия формально не обоснована, но этот прием приводит к тем же результатам, что и скалярное умножение, показанное в общей схеме. При этом манипулирование рядом технически несколько проще.

Замечание 3.5. Простейшая задача Штурма — Лиувилля (т.е. при $p = 1$, $q = 0$) может иметь девять модификаций в зависимости от используемых на концах отрезка граничных условий. Эти модификации удобно обозначать парой родов граничных условий. Например, II-I обозначает вариант, в котором на левом конце установлено условие II рода, а на правом — условие I рода. Из девяти модификаций выделим четыре с условиями только I и II рода. Для этих четырех модификаций легко записать систему собственных функций, руководствуясь следующими правилами:

а) если на левом конце условие I рода, то это синусы, иначе косинусы;

б) если условия на двух концах одинаковые, то это функции кратных углов, иначе полукратных углов.

Например, для задачи типа II-I имеет косинусы полукратных углов $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а для задачи II-II — косинусы кратных углов $\cos\frac{n\pi x}{l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Кроме того, следует иметь в виду, что косинусы кратных углов начинаются с $n = 0$ (постоянная функция), а синусы — с $n = 1$.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В курсе математического анализа доказывается, что если функция абсолютно интегрируема и удовлетворяет условиям Дирихле, то

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos w(x-\xi)\,d\xi. \tag{4.1}$$

Условиями Дирихле называются следующие:

1) $f(x)$ кусочно непрерывна, т.е. на каждом отрезке она имеет лишь конечное число точек разрыва и все они первого рода;

2) $f(x)$ кусочно монотонна, т.е. каждый отрезок может быть разделен на конечное число частичных отрезков, на которых функция монотонна.

Предполагается, что функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, нормализована: в точках разрыва выполняется равенство

$$f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Формула (4.1) называется ***интегралом Фурье***.

Интеграл Фурье можно преобразовать следующим образом. Во-первых, внутренний интеграл является четной функцией параметра ω, так что его можно записать так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos w(x-\xi)\,d\xi. \tag{4.2}$$

Во-вторых, в силу нечетности внутреннего интеграла по ω

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin w(x-\xi)\,d\xi = 0. \tag{4.3}$$

Правда, внешний интеграл, как функция от ω может быть не интегрируемым. Поэтому его значение следует понимать специальным образом — как предел симметричного интеграла:

$$\lim_{T\to+\infty}\int\limits_{-T}^{T} d\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin w(x-\xi)\,d\xi$$

Это значение называют ***главным значением интеграла*** и обозначают

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin w(x-\xi)\,d\xi$$

Умножив (4.3) на мнимую единицу и сложив с (4.2), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{iw(x-\xi)}\,d\xi. \tag{4.4}$$

где внешний интеграл берется в смысле главного значения.

Формулу (4.4) можно разделить на две независимые части:

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-iw\xi}\,d\xi, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{iwx}\,d\omega.$$

Первая из них определяет ***преобразование Фурье***, вторая — ***обратное преобразование Фурье***.

Преобразование Фурье в действительности гораздо глубже и шире тех рассуждений с интегралом Фурье, приведенных выше. Эти рассуждения лишь показывают, что функцию можно преобразовать определенным образом, а затем восстановить по результату преобразования. Другими словами, отображение $f(x) \mapsto F(\omega)$ является однозначным для некоторого класса функций.

Преобразование Фурье — представитель широкого класса ***интегральных преобразований*** имеющих вид

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\omega, x)f(x)\,dx.$$

На функцию $K(\omega, x)$ накладываются различного рода ограничения, в частности, эта функция должна обеспечивать инъективность отображения. Вопрос, для какого класса функций можно рассматривать данное интегральное преобразование. Преобразование Фурье можно рассматривать для самых различных классов функций.

4.1. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций

Нетрудно заметить, что преобразование Фурье определено для любой функции в $L_1(\mathbb{R})$. Действительно, если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|f(x)e^{-i\omega x}| = |f(x)|$, что гарантирует существование интеграла, выражающего преобразование Фурье, для любого значения параметра ω.

Мы будем обозначать через $\mathcal{F}[f]$ преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$, так что $\mathcal{F}[f](\omega)$ обозначает значение преобразования Фурье в точке ω:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Также будем использовать обозначение $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$.

Обратимость преобразования Фурье вытекает из следующего утверждения.

Теорема 4.1. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \equiv 0,$$

то $f(x) = 0$ п.в.

◀ Выберем некоторый параметр $\xi > 0$ и рассмотрим функцию

$$\varphi_\xi(x) = \int\limits_{x}^{x+\xi} f(t)\,dt.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_\xi(x) e^{-i\omega x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{0}^{\xi} f(x+t) e^{-i\omega x} dt = \int\limits_{0}^{\xi} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-i\omega x} dx = \int\limits_{0}^{\xi} e^{i\omega t} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy = 0.$$

Перестановка пределов возможна, поскольку функция $f(x+t)e^{-i\omega x}$ суммируема на множестве $x \in \mathbb{R}$, $t \in [-\xi,\ \xi]$; можно применить теорему Фубини.

Таким образом, функция $\varphi_\xi(x)$ удовлетворяет тому же условию, что и $f(x)$. Однако функция $\varphi_\xi(x)$ абсолютно непрерывна, и для нее имеет место интеграл Фурье, из которого следует, что $\varphi_\xi(x) \equiv 0$. Тем самым доказано, что для любых x и $\xi > 0$

$$\int\limits_{x}^{x+\xi} f(t)\, dt = 0.$$

отсюда вытекает, что $f(t) = 0$ п.в. ►

Следствие 4.1. Если у функций f, $g \in L_1(\mathbb{R})$ преобразования Фурье совпадают, то $f(x) = g(x)$ п.в.

Теорема 4.2. Если последовательность $\{g_n\}$ сходится в $L_1(\mathbb{R})$, то последовательность $\{\mathcal{F}[g_n]\}$ сходится в $\mathbb{R}$ равномерно.

◄ Утверждение вытекает из оценки

$$\|\mathcal{F}[f]\|_\infty \leqslant \|f\|_1. \qquad ►$$

Теорема 4.3. Для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ ее преобразование Фурье является ограниченной непрерывной функцией, сходящейся к 0 в бесконечности.

◄ Ограниченность преобразования Фурье следует из оценки

$$|\mathcal{F}[f](\omega)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-i\omega t}|\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt.$$

Нетрудно показать, что простейшая ступенчатая функция — характеристическая функция отрезка — имеет непрерывное преобразование Фурье, которое в бесконечности сходится к нулю. Множество ступенчатых функций, каждая из которых может быть представлена как линейная комбинация характеристических функций, всюду плотно в $L_1(\mathbb{R})$, т.е. каждая функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ есть предел некоторой последовательности $\{\varphi_n\}$ ступенчатых функций. Но тогда $\mathcal{F}[f]$ есть равномерный предел последовательности $\{\mathcal{F}[\varphi_n]\}$ непрерывных функций, стремящихся в бесконечности к нулю. При равномерном пределе и непрерывность, и стремление к нулю сохраняются. ►

Теорема 4.4 (теорема подобия). Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f(x) \overset{\mathcal{F}}{\to} F(\omega)$. Тогда $f(\alpha x)$ также суммируема и

$$f(\alpha x) \overset{\mathcal{F}}{\to} \frac{1}{|\alpha|} F\Big(\frac{\omega}{\alpha}\Big), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

◄ Утверждение вытекает из правила замены переменной:

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)\, e^{-i\omega x} dx = \Big| \alpha x = z \Big| = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i(\omega/alpha)z} dz.$$

Эта выкладка дана в предположении $\alpha > 0$. В случае $\alpha < 0$ дополнительно меняются пределы интегрирования, что дает смену знака в окончательном результате. ►

Теорема 4.5 (теорема смещения). Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$. Тогда $f(x)e^{i\lambda x}$ также суммируема и

$$e^{i\lambda x} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

◀ Суммируемость функции $f(x)e^{i\lambda x}$ очевидна. Формула вытекает из равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, e^{-i\omega x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i(\omega-\lambda)x} dx. \qquad ▶$$

Теорема 4.6 (теорема запаздывания). Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$. Тогда $f(x\alpha)$ также суммируема и

$$f(x-\alpha) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\alpha\omega} F(\omega), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

◀ Суммируемость функции $f(x-\alpha)$ очевидна. Формула получается путем замены переменной:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha)\, e^{-i\omega x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\omega(y+\alpha)} dx = e^{-i\omega\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i\omega y} dx. \qquad ▶$$

Теорема 4.7 (дифференцирование оригинала). Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ на каждом отрезке абсолютно непрерывна, так что почти всюду определена функция f', и $f' \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega).$$

◀ Абсолютная интегрируемость в данном случае означает, что

$$f(x) = \int\limits_{0}^{x} f'(x)\, dx + C.$$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-i\omega} dx = f(x)\, e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx.$$

Остается показать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Существование интеграла от $f'(x)$ по числовой оси означает, что $f(x)$ имеет предел при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Из суммируемости f вытекает, что оба указанных предела нулевые. ▶

Следствие 4.2. Если $f \in C^k(\mathbb{R})$, причем все функции f, f', …, $f^{(k)}$ суммируемы на $\mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, то

$$f^{(k)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^k F(\omega).$$

Теорема 4.8 (дифференцирование изображения). Если функции $f(x)$ и $xf(x)$ суммируемы, $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, то функция $F(\omega)$ дифференцируема и

$$-ixf(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F'(\omega).$$

◀ Пусть $-ixf(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega)$. Тогда

$$\int\limits_0^\omega G(\nu)\,d\nu = \int\limits_0^\omega d\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-ixf(x))\,e^{-i\nu x}dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_0^\omega (-ixf(x))\,e^{-i\nu x}d\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(e^{-i\omega x}-1\right)dx = F(\omega) - F(0).$$

Так как функция $G(\omega)$ непрерывна (как Фурье-образ суммируемой функции), функция $F(\omega)$, как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции, дифференцируема и $F'(\omega) = G(\omega)$. ▶

Замечание 4.1. Суммируемость функции $xf(x)$ не обеспечивает суммируемость $f(x)$: если существуют пределы $\lim\limits_{x\to\pm 0} xf(x) \ne 0$, то функция $f(x)$ в окрестности нуля имеет поведение типа $1/x$ и не является суммируемой. Конкретный пример: $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$.

Следствие 4.3. Если функции $f(x)$ и $x^k f(x)$ суммируемы, $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, то $F(\omega)$ k раз дифференцируема и

$$(-ix)^k f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^{(k)}(\omega).$$

Следствия 4.2 и 4.3 устанавливают связь между гладкостью и скоростью убывания функции и ее Фурье-образа. Из следствия 4.2 вытекает, что если функция f k раз непрерывно дифференцируема, то для ее Фурье-образа верна оценка

$$F(\omega) = o\Big(\frac{1}{\omega^k}\Big) \quad \omega \to \infty.$$

С другой стороны, если для локально интегрируемой функции

$$f(x) = o\Big(\frac{1}{x^{k+2}}\Big), \quad x \to \infty,$$

то $x^k f(x)$ суммируема и Фурье-образ функции f является k раз непрерывно дифференцируемой функцией.

Рассмотрим класс $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых быстроубывающих функций. Это класс функций $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которых при любых k и m выполняется неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k f^{(m)}(x)\right| < +\infty.$$

Установленная связь показывает, что преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в себя.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,g(x-\xi)\,d\xi. \tag{4.5}$$

Двукратный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|\,|g(x-\xi)|\,d\xi dx$$

существует, поэтому применима теорема Фубини, согласно которой интеграл (4.5) сходится при почти всех x и дает суммируемую на $\mathbb{R}$ функцию. Эта функция называется ***сверткой функций*** f и g, обозначение $f * g$.

Теорема 4.9. Если $f,\, g \in L_1(\mathbb{R})$, $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\Omega)$, $g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\Omega)$, то

$$(f * g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)\, G(\omega).$$

т.е. преобразование Фурье переводит операцию свертки функций в произведение.

◀ Доказательство строится на изменении порядка интегрирования:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, e^{-i\omega x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, e^{-i\omega x} d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, g(x-\xi)\, e^{-i\omega x} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi)\, e^{-i\omega(x-\xi} dx = F(\omega)\, G(\omega).$$

Изменение порядка интегрирования базируется на применении теоремы Фубини. ▶

4.2. Преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$

Теорема 4.10 (теорема Планшереля). Если $f_1,\, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то в $L_2(\mathbb{R})$

$$(\mathcal{F}[f_1],\, \mathcal{F}[f_2]) = 2\pi\, (f_1,\, f_2)\,. \tag{4.6}$$

◀ Это доказательство строится на изменении порядка интегрирования, причем используется как прямое преобразование Фурье, так и обратное. Пусть $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, $g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega)$. Тогда

$$(F,\, G) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \overline{G(\omega)}\, d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, e^{i\omega x} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, f(x)\, dx = 2\pi\, (f,\, g)\,.$$

Изменение порядка, а также применение обратного преобразования Фурье законно, так как и функции f и g, и функции F и G бесконечно гладкие и быстроубывающие. ▶

Доказанная теорема связывает преобразование Фурье с пространством $L_2(\mathbb{R})$. В этом пространстве функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ образуют всюду плотное линейное многообразие. На этом многообразии преобразование Фурье сохраняет (с точностью до числового множителя) скалярное произведение, а значит, евклидову норму, т.е. представляет собой непрерывный линейный оператор. Следовательно, он распространяется на все пространство $L_2(\mathbb{R})$. При этом для продолженного оператора равенство (4.6) останется верным.

Остается вопрос, как вычисляется преобразование Фурье на функциях из $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 4.11. Продолжение преобразования Фурье с $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ задается формулой

$$F(\omega) = \lim_{T\to+\infty} \int\limits_{-T}^{T} f(x)\, e^{-i\omega x} dx. \tag{4.7}$$

◀ Сначала докажем эту формулу в случае, когда функция f финитна, т.е. равна нулю вне некоторого отрезка $[-T,\, T]$. В этом случае интеграл по числовой оси сводится к интегралу по отрезку, а функцию можно рассматривать как элемент $L_2[-T,\, T]$. Функция является пределом

L_2-последовательности $\{f_n\}$ бесконечно дифференцируемых функций равных нулю вне $[-T,\,T]$. Такие функции принадлежат $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, так что для них определено преобразование Фурье. Из сходимости $f_n \to f$ в $L_2[-T,\,T]$ следует сходимость $f_n \to f$ в $L_1[-T,\,T]$ и, следовательно в $L_1(\mathbb{R})$, поскольку на отрезке $[-T,\,T]$

$$\|\varphi\|_{L_1} = \int\limits_{-T}^{T} |\varphi(\xi)|\,d\xi \leqslant \left(\int\limits_{-T}^{T} |\varphi(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-T}^{T} d\xi\right)^{1/2} = \sqrt{2T}\,\|\varphi\|_{L_2}.$$

Поэтому последовательность преобразований Фурье $F_n = \mathcal{F}[f_n]$ сходится равномерно к функции

$$F = \mathcal{F}[f](\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

(преобразование Фурье функции f в пространстве $L_1(\mathbb{R})$). В то же время последовательность $\{F_n\}$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к некоторой функции $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$. Вопрос в том, совпадают ли функции F и Φ (естественно, в смысле «почти всюду»). Проблема в том, что ни одна из двух видов сходимости не вытекает из другой. Однако обе сходимости влекут за собой сходимость по мере. Поэтому обе функции — один и тот же предел последовательности по мере. Следовательно, они совпадают почти всюду.

Итак, утверждение доказано для финитных функций. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$ — произвольная функция. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \chi_{[-n,n]}(x)\,f(x)$ (здесь $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A). Тогда $f_n \to f$ в $L_2(\mathbb{R})$. Следовательно, последовательность $\mathcal{F}[f_n]$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к преобразованию Фурье функции f в $L_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} f(x)e^{-\omega x}dx.$$

В действительности, предельный переход можно выполнить по любой последовательности отрезков, исчерпывающих числовую ось, т.е. верна формула (4.7). ►

Замечание 4.2. Суммируемость функции на числовой оси соответствует абсолютной сходимости несобственного интеграла. Формула (4.7) соответствует условной сходимости несобственного интеграла (симметричный вариант пределов интегрирования — деталь несущественная). Кроме того, доказанная теорема не утверждает существование предела в (4.7) для всех $\omega \in \mathbb{R}$ — он существует лишь почти всюду.

Функции Эрмита. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ — «почти» ортогональный оператор, Поскольку любой конечномерный ортогональный оператор в комплексном случае приводится к диагональному виду с диагональными элементами вида $e^{i\varphi}$ (по модулю равными 1), естественно предположить, что это может быть верно и для преобразования Фурье. Это приводит к задаче поиска собственных функций преобразования Фурье. Однако уравнение $\mathcal{F}[f] = \lambda f$ — это интегральное уравнение и решать его непосредственно непонятно как. Возможный вариант такой. Надо найти дифференциальный оператор L, перестановочный с $\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{F}L = L\mathcal{F}$. Оператор L будет определен не на всем пространстве L_2, а только на некотором всюду плотном линейном многообразии (например, на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Если f — собственная функция L с собственным значением λ, то

$$L\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}L[f] = \mathcal{F}[\lambda f] = \lambda\mathcal{F}[f].$$

Таким образом, $\mathcal{F}[f]$ — также собственная функция L, причем с тем же собственным значением. Естественно предполагать, что f будет собственной функцией $\mathcal{F}$, во всяком случае это так, если собственному значению λ отвечает одномерное собственное подпространство.

Такой оператор удается построить, рассматривая свойства преобразования Фурье. Несложно заметить, что двойное дифференцирование преобразование Фурье переводит в умножение на $-x^2$ (x — независимая переменная), а умножение на $-x^2$ — снова в двойное дифференцирование. Поэтому преобразование Фурье сохраняет дифференциальный оператор $Lu = u'' - x^2 u$. Рассмотрим задачу на собственные функции этого оператора:

$$u'' - x^2 u = \lambda u.$$

Сделаем замену переменных $u = we^{-x^2/2}$. Придем к уравнению

$$w'' - 2xw' - (\lambda + 1)w = 0.$$

Анализ уравнения подсказывает: можно искать решения w в виде многочленов. В самом деле, запишем решение в виде степенного ряда: $w = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$. Подставив в дифференциальное уравнение, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\alpha_{k+2}x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} k\alpha_k x^k - (\lambda+1)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k = 0,$$

откуда

$$(k+2)(k+1)\alpha_{k+2} = (2k + \lambda + 1)\alpha_k.$$

Можно процесс разделить на четные и нечетные степени, рассматривая для каждого λ два решения, которые, очевидно будут линейно независимыми. Эти два решения дадут фундаментальную систему решений дифференциального уравнения при заданном λ.

Если $2n + \lambda + 1 = 0$ для некоторого n, то процесс расчета коэффициентов оборвется в том смысле, что начиная с номера n они будут нулевыми, т.е. при указанном условии получим многочлен. Его коэффициенты удобнее считать со старших к младшим:

$$\alpha_{n-k-2} = -\frac{(n-k)(n-k-1)}{2(k+2)}\alpha_{n-k}, \quad k = 0,\, 2,\, \ldots$$

Положив $\alpha_n = 1$, находим

$$\alpha_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2\cdot 2}, \quad \alpha_{n-4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4},$$
$$\alpha_{n-6} = -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6}, \quad \ldots$$

Несложно записать общую формулу с помощью факториалов:

$$\alpha_{n-2m} = \frac{n!}{2^{2m}(n-2m)!\,m!} = \frac{C_{2m}^n (2m)!}{2^m (2m)!!} = \frac{C_{2m}^n (2m-1)!!}{2^m}.$$

Таким образом, мы получили систему собственных функций $w_n(x)e^{-x^2/2}$ оператора L. Очевидно, что все они принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и, более того $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Система функций $w_n(x)e^{-x^2/2}$ ортогональная, поскольку это собственные функции оператора L и соответствующие собственные значения разные. Эта система замкнутая. Действительно, в $L_2(\mathbb{R})$ всюду плотны непрерывные финитные функции. Если g — такая функция, то и $g(x)e^{x^2/2}$ непрерывная финитная. Можно построить последовательность многочленов $p_m(x)$, сходящуюся к $g(x)e^{x^2/2}$ равномерно. Тогда последовательность $p_m(x)e^{-x^2/2}$ сходится к $g(x)$ равномерно и, следовательно по норме $L_2(\mathbb{R})$. Это означает, что линейные комбинации функций $w_n(x)e^{-x^2/2}$ всюду плотны в $L_2(\mathbb{R})$.

Таким образом, преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ имеет полную ортогональную систему собственных функций. Эти функции называются ***функциями Эрмита***.

Чтобы определить собственные числа преобразования Фурье, соответствующие функциям Эрмита, отметим, что в соотношении $\mathcal{F}[w_n(x)e^{-x^2/2}] = \lambda_n w_n(x)e^{-x^2/2}$ достаточно ограничиться старшими степенями многочленов.

Несложно установить, что $e^{-x^2/2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$. Из теоремы дифференцирования изображения находим: $x^n e^{-x^2/2} \xrightarrow{\mathcal{F}} i^n\sqrt{2\pi}(e^{-x^2/2})^{(n)}$. Из формулы

$$\big(f(x)e^{-x^2/2}\big)' = f'(x)e^{-x^2/2} - xf(x)e^{-x^2/2}$$

заключаем, что n-я производная функции $e^{-x^2/2}$ имеет вид $p_n(x)e^{-x^2/2}$, где $p_n(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом $(-1)^n$. Так как старший коэффициент многочлена $w_n(x)$ равен 1, то $\mathcal{F}[w_n(x)e^{-x^2/2}]$ имеет вид $p_n(x)e^{-x^2/2}$, где старший коэффициент многочлена $p_n(x)$ равен $i^n\sqrt{2\pi}(-1)^n = (-i)^n\sqrt{2\pi}$. Таким образом, собственной функции $w_n(x)e^{-x^2/2}$ соответствует собственное значение

$$\lambda_n = (-i)^n\sqrt{2\pi}.$$

С помощью этой формул заключаем, что собственные значения с увеличением номера n повторяются с периодом 4: $\sqrt{2\pi}$, $-i\sqrt{2\pi}$, $-\sqrt{2\pi}$, $i\sqrt{2\pi}$, $\sqrt{2\pi}$, ...

4.3. Пример: уравнение теплопроводности

Применение преобразования Фурье рассмотрим на примере задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{array}$$

Будем полагать, что неизвестная функция $u(t,x)$ при каждом фиксированном значении t абсолютно интегрируема (как функция переменного x). Также будем считать, что функция $\varphi(x)$ также абсолютно интегрируема. Применим в нашей задаче преобразование Фурье. Полагаем

$$u(t,x) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(t,\omega), \quad \varphi(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi(\omega).$$

Вычисление преобразования Фурье функции u_t — это дифференцирование интеграла, представляющего преобразование по параметру. Будем считать, что такое дифференцирование возможно. Тогда

$$\mathcal{F}[u_t](\Omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)e^{-i\omega x}dx = \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{-i\omega x}dx = \Phi_t.$$

Из свойств преобразования Фурье также находим

$$\mathcal{F}[u_{xx}](\omega) = (i\omega)^2\mathcal{F}[u](\omega) = -\omega^2 U(t,\omega).$$

Таким образом, поставленная задача свелась к следующей:

$$\begin{array}{l} U_t = -a^2\omega^2 U, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ U\big|_{t=0} = \Phi(x). \end{array}$$

Эта задача — простейшая задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (переменная t в дифференцировании не участвует и может рассматриваться как фиксированный параметр). Поскольку дифференциальное уравнение однородное линейное с постоянными коэффициентами, общее решение его получается стандартными для таких уравнений методами (здесь единственное характеристическое число $-a^2\omega^2$). В результате находим

$$U(t,\omega) = C(\omega)e^{-a^2\omega^2 t},$$

а с использованием начального условия приходим к соотношению

$$U(t,\omega) = \Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Итак, решение в изображениях найдено. Мы видим, что решение представляет собой произведение двух функций, из которых первая есть изображение функции $\varphi(x)$, а вторая тоже представляет собой изображение пока не известной функции, которую мы обозначим $\mathcal{E}(t,x)$, при $t > 0$ (утверждение вытекает из того, что функция $e^{-a^2\omega^2 t}$ является бесконечно дифференцируемой быстро убывающей).

Функцию $\mathcal{E}(t,x)$ найдем, применив обратное преобразование Фурье:

$$\mathcal{E}(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t+i\omega x}d\omega.$$

Для вычисления интеграла выделим полный квадрат в показателе степени:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t+i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a^2t(\omega-\frac{ix}{2a^2t})^2-\frac{x^2}{4a^2t}\right]d\omega = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-a^2t(\omega-\frac{ix}{2a^2t})^2\right]d\omega.$$

Сделаем замену $\omega - \dfrac{ix}{2a^2t} = z$:

$$\mathcal{E}(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2tz^2}\,dz.$$

Наконец, еще одна замена $a\sqrt{t}z = \zeta$:

$$\mathcal{E}(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi a\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2}\,d\zeta.$$

Оставшийся интеграл известен как ***интеграл Пуассона***, он равен $\sqrt{\pi}$. С учетом этого интеграла окончательно получаем

$$\mathcal{E}(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Используя найденную функцию, можем записать решение рассматриваемой задачи Коши:

$$u(t,x) = \varphi * \mathcal{E}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,\mathcal{E}(t,x-\xi)\,d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

Замечание. Полученное решение не определено при $t = 0$ из-за появления t в знаменателе. Поэтому непосредственная проверка найденного решения (что оно удовлетворяет поставленной задаче) оказывается невозможной. При этом можно убедиться в том, что функция $u(t,x)$ имеет предел при $t \to 0^+$, равный $\varphi(x)$. В этом смысле найденная функция удовлетворяет начальному условию.

4.4. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа и связь с преобразованием Фурье. Свойства. Обращение и формула Римана — Меллина. Теоремы обращения.

Преобразованием Лапласа называется интегральное преобразование

$$\mathcal{L}[f](p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{4.8}$$

Для существования интеграла справа достаточно, чтобы функция f была локально суммируема и имела ограниченный рост. Обычно считают, что f определена на всей числовой оси, но при $t < 0$ имеет нулевые значения. Будем считать функцию f, определенную на числовой оси, ***оригиналом преобразования Лапласа***, если выполнены условия:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
2) $f(t)$ кусочно непрерывна;
3) $f(t)$ имеет ограниченный рост, т.е. $|f(t)| \leqslant Ce^{\sigma t}$, $t > 0$, при некоторых C и σ.

Неравенство $|f(t)| \leqslant Ce^{\sigma t}$ эквивалентно ограниченности функции $|f(t)|e^{-\sigma t}$, что (в силу кусочной непрерывности) равносильно ограниченности этой функции при $t \to +\infty$. Последнее условие (в результате логарифмирования) сводится к неравенству

$$\frac{\ln|f(t)|}{t} \leqslant \sigma + \frac{\ln C}{t},$$

верному, начиная с некоторого значения t. Из приведенного неравенства следует, что есть нижняя грань

$$\sigma_0 = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln|f(t)|}{t}$$

для возможного значения σ в неравенстве для ограниченного роста. Неравенство $|f(t)| \leqslant Ce^{\sigma t}$ верно для любого $\sigma > \sigma_0$ при соответствующем выборе C. Значение σ_0 называется ***порядком роста*** функции.

Преобразование Лапласа формальной заменой $p = i\omega$ с учетом нулевых значений при $t < 0$ сводится к преобразованию Фурье. Эта связь проявится в некоторых утверждениях. Однако теории двух интегральных преобразований заметно расходятся.

Теорема 4.12. Пусть $f(t)$ — оригинал преобразования Лапласа с показателем роста σ_0. Тогда интеграл Лапласа сходится всюду в $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, причем равномерно при $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$; изображение $F(p) = \mathcal{L}[f](p)$ является функций, аналитической в $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, причем существует предел $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p) = 0$.

◀ Запишем $p = \sigma + i\eta$. Равномерная сходимость интеграла Лапласа в множестве $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma_1$ вытекает из оценки

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-\sigma t} \leqslant |f(t)e^{-\sigma_1 t}|.$$

Докажем существование предела $F(p)$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Существует такое $\delta > 0$, что

$$\int\limits_0^\delta |f(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Для любого $p = \sigma + i\eta$, $\sigma > \sigma_1$, имеем

$$|F(p)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\eta)t}dt\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-\sigma t}dt = \int\limits_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-\sigma_1 t}\,e^{-(\sigma-\sigma_1)t}dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\delta |f(t)|\,dt + e^{-(\sigma-\sigma_1)\delta}\int\limits_\delta^{+\infty} |f(t)|\,e^{-\sigma_1 t}dt < \varepsilon + Ce^{-(\sigma-\sigma_1)\delta}.$$

Существует такое значение M, что при $\sigma > M$ выполняется неравенство $e^{-(\sigma-\sigma_1)\delta} < \varepsilon/C$. Но тогда при $\sigma > M$ имеем $|F(p)| < 2\varepsilon$. Согласно определению предела $F(p) \to 0$ при $\sigma = \operatorname{Re} p \to +\infty$.

Для доказательства аналитичности функции $F(p)$, т.е. ее дифференцируемости, рассмотрим приращение функции:

$$F(p+h) - F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p+h)t}dt - \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\big(e^{-(p+h)t} - e^{-pt}\big)dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\big(e^{-ht} - 1\big)dt.$$

Функцию $e^{-x} - 1$ разложим по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого порядка:

$$e^{-x} - 1 = -x + \frac{e^{-\vartheta x}}{2!}x^2, \quad \vartheta \in (0,\, 1).$$

Используем это разложение для множителя $e^{-ht} - 1$:

$$F(p+h) - F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\Big(-ht + \frac{e^{-\vartheta ht}}{2}h^2t^2\Big)dt = h\int_0^{+\infty}\big(-tf(t)\big)e^{-pt}dt + h^2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt}\frac{e^{-\vartheta ht}}{2}dt.$$

Функции $tf(t)$ и $t^2f(t)$ являются оригиналами с тем же показателем роста σ_0, что и функция $f(t)$. Поэтому интегралы

$$A(p) = \int_0^{+\infty}\big(-tf(t)\big)e^{-pt}dt, \quad B(p) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt}dt$$

сходятся абсолютно. Значит, абсолютно и равномерно сходится и интеграл

$$\tilde{B}(p,h) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt}\frac{e^{-\vartheta ht}}{2}dt,$$

поскольку

$$\Big|t^2 f(t)e^{-pt}\frac{e^{-\vartheta ht}}{2}\Big| \leqslant \frac{1}{2}t^2|f(t)|e^{-\operatorname{Re} p t}.$$

При этом $|\tilde{B}(p,h)| \leqslant |B(p)|$. В результате получаем представление

$$F(p+h) - F(p) = hA(p) + h^2\tilde{B}(p,h),$$

показывающее, что функция $F(p)$ дифференцируема в точке p, а ее производная равна $A(p)$. ►

Теорема 4.13. Если оригинал $f(t)$ преобразования Лапласа является кусочно монотонной функцией, $F(p)$ — соответствующее изображение, то верна ***формула обращения Римана — Меллина***

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re} p = \sigma} F(p)\, e^{pt}dp, \tag{4.9}$$

где $\sigma > \sigma_0$ можно выбрать произвольно.

◄ Преобразование Лапласа для $f(t)$ выражается через преобразование Фурье для функции $f(t)e^{-\sigma t}$:

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\eta)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\big(f(t)e^{-\sigma t}\big)e^{-i\eta t}dt = \mathfrak{F}[f(t)e^{-\sigma t}](\eta).$$

Согласно теореме об обращении преобразования Фурье (функция $f(t)e^{-\sigma t}$ удовлетворяет условиям Дирихле) имеем:

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\eta)e^{i\eta t}d\eta.$$

Отсюда вытекает, что

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\eta)e^{(\sigma+i\eta)t}d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\sigma} F(p)\,e^{pt}dp. \qquad \blacktriangleright$$

В следующей теореме в доказательстве вычисляются некоторые несобственные интегралы, для чего используется следующее утверждение.

Лемма 4.1 (лемма Жордана). Пусть функция $F(z)$ аналитична всюду в замкнутой верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, за исключением, возможно, некоторого конечного множества изолированных особых точек внутри полуплоскости. Пусть также существует последовательность $\{R_n\}$, такая, что $\max\limits_{z\in\gamma_n}|F(z)| \to 0$ при $n\to\infty$, где $\gamma_n = \{z\in\mathbb{C}\colon |z| = R_n,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ — верхняя полуокружность радиуса R_n. Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\gamma_n} F(z)e^{i\lambda z}dz = 0.$$

Теорема 4.14. Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет условиям:

1) функция $F(p)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$;

2) В любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma$, $\sigma > \sigma_0$, существует предел $\lim\limits_{|p|\to+\infty} F(p) = 0$;

3) функция $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\sigma > \sigma_0$.

Тогда $F(p)$ является изображением некоторого оригинала $f(t)$, имеющего показатель роста не более σ_0, который может быть найден по формуле обращения (4.9).

◀ Существование интеграла

$$\int\limits_{\operatorname{Re} p=\sigma} F(p)e^{pt}dp = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\eta)e^{\sigma t}e^{i\eta t}d\eta$$

вытекает из оценки

$$|F(\sigma+i\eta)e^{\sigma t}e^{i\eta t}| \leqslant |F(\sigma+i\eta)|e^{\sigma t}$$

и абсолютной интегрируемости F вдоль вертикальной прямой. Выбрав некоторое значение $\sigma > \sigma_0$, сформируем функцию

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\sigma} F(p)e^{pt}dp$$

и докажем, что, во-первых, она есть оригинал, а во-вторых, ее изображение совпадает с $F(p)$.

Функция $f(t)$ равна нулю при $t < 0$. Действительно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\sigma} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\eta)\,e^{\sigma t}e^{i\eta t}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma-ix)\,e^{\sigma t}e^{i\lambda x}dx,$$

где $x = -\eta$, $\lambda = -t > 0$. В точке $z = x + iy$, $x > 0$, имеем $F(\sigma - iz) = F(\sigma + y - ix)$. По условию теоремы $F(\sigma + y - ix) \to 0$ при $y - ix \to 0$, $y > 0$, т.е. в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ при $|z| \to \infty$. Поэтому можно применить лемму Жордана. Получим

$$\int\limits_{-\infty} F(\sigma - ix)\, e^{\sigma t} e^{-i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname*{res}_{z = z_i} \bigl(F(\sigma - iz)\, e^{\sigma t} e^{i\lambda z}\bigr) = 0,$$

поскольку условие $\operatorname{Im} z = y > 0$ эквивалентно условию $\operatorname{Re}(\sigma - iz) > \sigma$, а правее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$ у функции F особых точек нет.

Функция $f(t)$ удовлетворяет условию роста, поскольку

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\eta) e^{\sigma t} e^{i\eta t}|\, d\eta \leqslant \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\eta)|\, d\eta = M e^{\sigma t}.$$

Функция $f(t)$ непрерывна, поскольку

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma - iz)\, e^{-itz} dz,$$

т.е. является преобразованием Фурье абсолютно интегрируемой функции, умноженной на непрерывную функцию.

Наконец, выбрав $p \in \mathbb{C}$ так, что $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} s$, получим

$$\int\limits_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt} dt = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} dt \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = \sigma} F(s)\, e^{st} ds = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = \sigma} F(s)\, ds \int\limits_0^{\infty} e^{-(p-s)t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = \sigma} \frac{F(s)}{p - s}\, ds.$$

Здесь двойной интеграл сходится абсолютно, что позволяет изменить порядок интегрирования. Но

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = \sigma} \frac{F(s)}{p - s}\, ds = -\operatorname*{res}_{s = p} \frac{F(s)}{p - s} = F(p),$$

где интеграл проходится снизу вверх. Действительно, достаточно взять контур, составленный из отрезка прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$ и дуги γ_R окружности $|s| = R$ правее прямой. Интеграл по этому контуру определяется вычетом в точке $s = p$, но при этом интеграл по дуге окружности стремится к нулю при $R \to \infty$, так как он оценивается следующим образом:

$$\left| \int\limits_{\gamma_R} \frac{F(s)}{p - s}\, ds \right| \leqslant \max_{s \in \gamma_R} |F(s)| \int\limits_{\gamma_R} \frac{|ds|}{|p - s|} \leqslant \max_{s \in \gamma_R} |F(s)| \cdot \frac{2\pi R}{R - |p|},$$

а $\max\limits_{s \in \gamma_R} |F(s)| \to 0$ при $R \to \infty$. В пределе при $R \to \infty$ получаем требуемое равенство. ►

Установим некоторые свойства преобразования Лапласа. Далее предполагается, что $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$.

1°. Линейность: $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$.

◄ Свойство непосредственно следует из определения преобразования Лапласа. ►

2°. Теорема подобия:

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\Bigl(\frac{p}{\alpha}\Bigr), \quad \alpha > 0.$$

◀ Свойство устанавливается заменой переменной $t_1 = \alpha t$:

$$\int\limits_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(t_1)e^{-pt_1/\alpha}\frac{dt_1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}F\Big(\frac{p}{\alpha}\Big). \qquad \blacktriangleright$$

3°. Теорема смещения:

$$f(t)e^{\lambda t} \risingdotseq F(p-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

◀ Свойство доказывается так же, как и аналогичное свойство преобразования Фурье:

$$\int\limits_0^\infty f(t)e^{\lambda t}e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-(p-\lambda)t}dt = F(p-\lambda). \qquad \blacktriangleright$$

4°. Теорема запаздывания:

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-\tau p}F(p), \quad \tau > 0.$$

◀ Как и в теореме подобия, достаточно сделать замену переменных $t - \tau = t_1$:

$$\int\limits_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int\limits_{-\tau}^\infty f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1 = e^{-p\tau}\int\limits_{-\tau}^\infty f(t_1)e^{-pt_1}dt_1.$$

В последнем интеграле подынтегральная функция равна нулю на интервале $(-\tau,\, 0)$, поэтому нижний предел можно заменить на 0, что приводит к $e^{-p\tau}F(p)$. ▶

5°. Интегрирование оригинала:

$$g(t) = \int\limits_0^t f(t_1)\,dt_1 \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

◀ Укороченная формулировка включает не только формулу, но и утверждение, что интеграл слева есть функция-оригинал. Первые два условия для оригиналов очевидны, проверим порядок роста функции $f(t)$. Пусть $|f(t)| \leqslant Ce^{\sigma t}$, причем $\sigma > 0$. Тогда

$$|g(t)| \leqslant \int\limits_0^t |f(t_1)|\,dt_1 \leqslant C\int\limits_0^t e^{\sigma t_1}dt_1 = \frac{C}{\sigma}\big(e^{\sigma t} - 1\big) \leqslant \frac{C}{\sigma}e^{\sigma t}.$$

Отсюда заключаем, что у функции $g(t)$ ограниченный показатель роста и, следовательно, она является функцией-оригиналом.

Проверим формулу перехода к первообразной:

$$\int\limits_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int\limits_0^t f(\tau)d\tau = \int\limits_0^{+\infty} d\tau\int\limits_\tau^{+\infty} e^{-pt}f(\tau)dt = \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)\frac{e^{-p\tau}}{p}d\tau = \frac{1}{p}F(p).$$

Порядок интегрирования можно изменить потому, что несобственный двойной интеграл от функции $f(\tau)e^{-pt}$ по угловой области $0 < t < \infty, 0 < \tau < t$ сходится абсолютно. ▶

6°. Дифференцирование оригинала: если функция-оригинал $f(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и дифференцируема всюду, кроме дискретного множества точек*, причем $f'(t)$ является оригиналом, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0).$$

◀ Из поставленных условий вытекает равенство

$$f(t) = f(+0)\eta(t) + \int\limits_0^t f'(\tau)d\tau.$$

Нам остается к функции $f'(t)$ применить теорему об интегрировании оригинала и воспользоваться соотношением $\eta(t) \risingdotseq p^{-1}$:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{f(+0)}{p} + \frac{\mathcal{L}[f'(t)](p)}{p},$$

что и приводит к нужному соотношению. ▶

Функция-оригинал может иметь производную, которая не является оригиналом. Например, функция $f(t) = \sin(e^{t^2})$ является оригиналом, а ее производная $f'(t) = 2te^{t^2}\cos(e^{t^2})$ — нет.

Дифференцирование оригинала может применяться многократно. Если функция $f(t)$ имеет $k-1$ производную, непрерывную при $t > 0$, существует k-я производная всюду, кроме, быть может, некоторого дискретного множества, и если k-я производная является оригиналом, то

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \ldots - f^{(k-1)}(+0).$$

7°. Интегрирование изображения: если $\dfrac{f(t)}{t}$ имеет предел при $t \to +0$, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(p)\,dp.$$

◀ Из условий утверждения следует, что функция $\dfrac{f(t)}{t}$ является оригиналом. С учетом этого имеем (полагаем $p = \sigma + i\eta$):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-\sigma t} e^{-i\eta t}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-i\eta t}dt \int\limits_\sigma^{+\infty} e^{-\xi t}d\xi = \int\limits_\sigma^{+\infty} d\xi \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-i\eta t}e^{-\xi t}dt =$$

$$= \int\limits_\sigma^{+\infty} d\xi \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(\xi+i\eta)t}dt = \int\limits_\sigma^{+\infty} F(\xi + i\eta)\,d\xi = \int\limits_p^{+\infty} F(q)\,dq,$$

где $q = \xi + i\eta$. ▶

*Под дискретным множеством понимается счетное множество, имеющее конечное число точек на любом отрезке.

8°. Дифференцирование изображения:

$$-tf(t) \risingdotseq F'(p).$$

◀ Очевидно, что функция $tf(t)$ является оригиналом, причем с тем же порядком роста, что и $f(t)$. Применим теорему об интегрировании изображения к функции $g(t) = tf(t)$. Если $g(t) \risingdotseq G(p)$, то

$$f(t) = \frac{g(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty G(p)dp = F(p).$$

Дифференцируя по p, находим $F'(p) = -G(p)$. ▶

9°. Свертка оригиналов:

$$(f * g)(t) \risingdotseq F(p)\, G(p).$$

◀ Свертка оригиналов f и g является оригиналом, причем показатель роста свертки не превышает максимального из показателей для f и g. Действительно, если $|f(t)| \leqslant C_1 e^{\sigma t}$, $|g(t)| \leqslant C_2 e^{\sigma t}$, то

$$|(f*g)(t)| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau)|\,|g(t-\tau)|\,d\tau \leqslant C_1C_2\int\limits_0^t e^{\sigma\tau}e^{\sigma(t-\tau)}d\tau = C_1C_2e^{\sigma t}\int\limits_0^t d\tau = C_1c_2te^{\sigma t}.$$

Из этой оценки вытекает, что показатель роста свертки не превышает σ, если показатели функций f и g не превышают σ.

Вычислим изображение для свертки:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int\limits_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^{+\infty} d\tau\int\limits_\tau^{+\infty} e^{-pt}f(\tau)\,g(t-\tau)dt =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)d\tau\int\limits_\tau^{+\infty} e^{-pt}g(t-\tau)dt = \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)d\tau\int\limits_0^{+\infty} e^{-p(u+\tau)}g(u)du =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int\limits_0^{+\infty} e^{-pu}g(u)du = F(p)\,G(p).$$

Эти выкладки имеют смысл, если $\operatorname{Re} p$ превышает показатели роста обеих функций f и g, в этом случае двойной несобственный интеграл от функции

$$e^{-pt}f(\tau)\,g(t-\tau) = \bigl(e^{-p\tau}f(\tau)\bigr)\bigl(e^{-p(t-\tau)}f(t-\tau)\bigr)$$

в области $t > 0$, $0 < \tau < t$ сходится абсолютно.

10°. Для любой функции-оригинала $f(t)$ с изображением $F(p)$ выполняется равенство

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(+0), \tag{4.10}$$

где предельный переход $p \to \infty$ осуществляется внутри угловой области $|\arg p| \leqslant \alpha$, $\alpha < \pi/2$.

◀ Утверждение сводится к случаю $f(+0) = 0$, для чего вместо функции $f(t)$ достаточно рассмотреть функцию $f_0(t) = f(t) - f(+0)\eta(t)$, имеющую изображение $F_0(p) = F(p) - f(+0)/p$. При этом равенство (4.10) будет означать, что

$$\lim_{p\to\infty} pF_0(p) = 0.$$

Итак, пусть $f(+0)=0$. Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем такое $\delta>0$, что $|f(t)|<\varepsilon\cos\alpha$ при $0<t<\delta$ (α — угол раствора области, $\alpha<\pi/2$). Тогда для $p=\sigma+i\eta$, $\sigma>\sigma_1>\sigma_0$, $|\arg p|\leqslant\alpha$, имеем $|p|\cos\alpha\leqslant\sigma$ и

$$|pF(p)|=|p|\left|\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt\right|\leqslant|p|\int\limits_0^{\delta}|f(t)|e^{-\sigma t}dt+|p|\int\limits_{\delta}^{+\infty}|f(t)|e^{-\sigma t}dt\leqslant$$
$$\leqslant|p|\varepsilon\cos\alpha\int\limits_0^{\delta}e^{-\sigma t}dt+|p|\int\limits_{\delta}^{+\infty}Me^{\sigma_1 t}e^{-\sigma t}dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|p|\varepsilon\cos\alpha}{\sigma}+\frac{|p|M}{\sigma-\sigma_1}e^{-(\sigma-\sigma_1)\delta}\leqslant\varepsilon+\frac{M\sigma}{(\sigma-\sigma_1)\cos\alpha}e^{-(\sigma-\sigma_1)\delta}.$$

Видно, что число σ может быть выбрано настолько большим, что $|pF(p)|<2\varepsilon$. Так как число ε выбиралось произвольно, то это значит, что $pF(p)\to 0$ при $p\to\infty$ при условии, что $|\arg p|\leqslant\alpha$. ►

11°. Если функция-оригинал $f(t)$ с изображением $F(p)$ имеет предел

$$f(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}f(t),$$

то также существует

$$\lim_{p\to 0}pF(p)=f(+\infty),$$

где предельный переход $p\to\infty$ осуществляется внутри угловой области $|\arg p|\leqslant\alpha$, $\alpha<\pi/2$.

◄ Доказательство этого свойства проводится по той же схеме, что и доказательство равенства (4.10). Взамен функции $f(t)$ рассматриваем функцию $f_0(t)=f(t)-f(+\infty)\eta(t)$. Тогда $f_0(+\infty)=0$.

По мотивам доказательства предыдущего свойства находим (в выкладке $\sigma=\operatorname{Re}p$):

$$|pF_0(p)|\leqslant|p|\int\limits_0^{T}|f_0(t)|e^{-\sigma t}dt+|p|\int\limits_T^{\infty}|f_0(t)|e^{-\sigma t}dt\leqslant$$
$$\leqslant|p|\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|f_0(t)|\int\limits_0^{T}e^{-\sigma t}dt+|p|\sup_{t\geqslant T}|f_0(t)|\int\limits_T^{\infty}e^{-\sigma t}dt=$$
$$=\frac{|p|(1-e^{-\sigma T})}{\sigma}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|f_0(t)|+\frac{|p|e^{-\sigma T}}{\sigma}\sup_{t\geqslant T}|f_0(t)|.$$

Отметим, что $\dfrac{|p|}{\sigma}\leqslant\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Так как $f_0(+\infty)=0$, для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ можно выбрать настолько большое T, что $|f_0(t)|<\varepsilon$, при $t>T$, т.е. $\sup\limits_{t\geqslant T}|f_0(t)|\leqslant\varepsilon$. При таком выборе T заключаем, что

$$|pF_0(p)|\leqslant\frac{|p|(1-e^{-\sigma T})}{\sigma}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|f_0(t)|+\frac{|p|\varepsilon e^{-\sigma T}}{\sigma}\leqslant\frac{C(1-e^{-\sigma T})}{\cos\alpha}+\frac{\varepsilon}{\cos\alpha},$$

где $C\geqslant\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|f_0(t)|$ — некоторое число. Выбрав $|p|$ настолько малым, что $1-e^{-\operatorname{Re}pt}\leqslant\varepsilon$, получаем оценку $|pF_0(p)|\leqslant\dfrac{2\varepsilon}{\cos\alpha}$. Поскольку ε выбиралось произвольно, приходим к выводу, что $pF_0(p)\to 0$, когда $p\to 0$ внутри угла $|\arg p|\leqslant\alpha$. ►

Для использования преобразования Лапласа можно использовать специальную таблицу оригиналов и изображений, основная часть которой получается вычислением преобразования Лапласа функции Хевисайда и применением к результату свойств преобразования Лапласа. Для функции Хевисайда находим $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, а далее, например, с помощью теоремы смещения получаем

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\Big) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Мощным инструментом для обращения преобразования Лапласа являются так называемые теоремы разложения. Их сила — в том, что условия обращения относятся к изображению, а не к оригиналу.

Теорема 4.15 (1-я теорема разложения). Если функция $F(p)$ аналитична в окрестности $p = \infty$ и имеет в бесконечно удаленной точке нуль, то она является изображением. При этом, если ее лорановское разложение имеет вид $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$, то оригиналом является $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,\eta(t)$ (оригинал получается почленным обращением ряда).

◀ Доказательство состоит из двух частей: а) проверке того, что ряд, представляющий $f(t)$, сходится и его сумма удовлетворяет условиям функции-оригинала; б) проверке того, что изображение $f(t)$ есть заданная функция $F(p)$.

Ряд, представляющий функцию $F(p)$ — это ряд Лорана, который сходится в некотором кольце $R_0 < |p|$. Анализируя теорему Лорана, заключаем, что коэффициенты ряда Лорана можно записать с помощью формулы, аналогичной формуле Коши:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} F(\zeta)\zeta^{n-1}\,d\zeta,$$

где интеграл вычисляется по окружности радиуса $R > R_0$ в положительном направлении (против часовой стрелки). На окружности $|\zeta| = R$ функция $F(\zeta)$, как непрерывная, ограничена, т.е. $|F(\zeta)| \leqslant M$, $|\zeta| = R$. Поэтому

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=R} M|\zeta|^{n-1}|d\zeta| = \frac{1}{2\pi} MR^{n-1} \cdot 2\pi R = MR^n.$$

(полученные неравенства $a_n \leqslant MR^n$ в теории функций комплексного переменного известны как ***неравенства Коши***).

Используя полученные неравенства, находим

$$\Big|a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Big| \leqslant MR\frac{(Rt)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(Rt)^{n-1}}{(n-1)!}$ сходится для любого значения t, а его сумма равна e^{Rt}. Поэтому ряд, представляющий функцию $f(t)$, сходится для всех значений t, причем его сумма не превышает MRe^{Rt}. Это значит, что функция $f(t)$ определена при $t > 0$ и верно неравенство $|f(t)| \leqslant MRe^{Rt}$, т.е. функция $f(t)$ имеет ограниченный показательный рост, причем показатель роста не превышает R. Сумма степенного ряда — непрерывная функция, так что $f(t)$ кусочно непрерывна (единственная возможная точка разрыва — точка $t = 0$). Таким образом, все условия на функцию-оригинал для $f(t)$ выполнены.

Изображение функции $f(t)$ выражается интегралом

$$\mathcal{L}[f(t)](\omega) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Перестановка интеграла со знаком суммы дает нужный результат:

$$\mathcal{L}[f(t)](\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} \int\limits_0^{\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Однако указанная перестановка законна только в случае, когда один из двух предельных переходов (переход к несобственному интегралу и предел частичных сумм ряда) является равномерным относительно противоположного параметра:

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T e^{-pt} S_N(t)\, dt = \lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T e^{-pt} S_N(t)\, dt,$$

где

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Покажем, что несобственный интеграл по параметру N сходится равномерно. Для этого надо найти мажоранту «хвоста» интеграла, не зависящую от N. Отметим, что

$$|S_N(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n| t^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| t^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant MRe^{Rt}$$

Поэтому

$$\left| \int\limits_T^{\infty} e^{-pt} S_N(t)\, dt \right| \leqslant \int\limits_T^{\infty} MRe^{-\sigma t} e^{Rt}\, dt = MR \int\limits_T^{\infty} e^{-(\sigma-R)t} dt = \frac{MRe^{-(\sigma-R)T}}{\sigma - R},$$

где $\sigma = \operatorname{Re} p$. Мы получили оценку, которая стремится к нулю при $T \to \infty$, причем эта оценка не зависит от N. Значит, несобственный интеграл сходится равномерно по N и перестановка пределов законна. ▶

Теорема 4.16 (2-я теорема разложения). Рациональная функция $F(p)$ является изображением тогда и только тогда, когда степень числителя меньше степени знаменателя. Если a_1, a_2, …, a_k — все полюса функции $F(p)$ порядков $\mu_!$, μ_2, …, μ_k, то ее оригинал $f(t)$ может быть записан в следующем виде:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\mu_j} A_{ji} \frac{t^{\mu_j - i}}{(\mu_j - i)!}, \tag{4.11}$$

где

$$A_{ji} = \lim_{p\to a_j} \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \big[(p - a_j)F(p)\big]. \tag{4.12}$$

◀ Формулировка теоремы выглядит очень формально, но за ней скрываются относительно простые вещи. Во-первых, любая рациональная функция имеет в ∞ предел: бесконечный, если степень числителя больше степени знаменателя, конечный ненулевой, если степень числителя равна степени знаменателя, и нулевой, если степень числителя меньше степени знаменателя (т.е. дробь правильная). В первых двух случаях рациональная функция не является изображением, так как нарушаются необходимые условия (нулевой предел при $\operatorname{Re} p \to +\infty$). В третьем случае правильная дробь разлагается в сумму элементарных дробей, каждая из которых является изображением.

По условиям теоремы (полюса и их порядки) знаменатель дроби (в предположении, что старший коэффициент в знаменателе единичный) представим в виде

$$Q(p) = (p - a_1)^{\mu_1}(p - a_2)^{\mu_2} \dots (p - a_k)^{\mu_k}.$$

Поэтому разложение на элементарные дроби имеет следующий вид:

$$F(p) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\mu_j} \frac{A_{ji}}{(p - a_j)^{\mu_j - i + 1}}. \tag{4.13}$$

Коэффициенты этого разложения можно получить по-разному, один из методов — метод неопределенных коэффициентов. Но в любом случае соответствующий оригинал можно получить, используя таблицу оригиналов и изображений и теорему смещения. По таблице $t^m \risingdotseq \frac{m!}{p^{m+!}}$, а с использованием теоремы смещения

$$\frac{1}{(p - a)^m} \risingdotseq \frac{t^{m-1} e^{at}}{(m - 1)!}.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\mu_j} \frac{A_{ji}}{(p - a_j)^{\mu_j - i + 1}} \risingdotseq \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\mu_j} A_{ji} \frac{t^{\mu_j - i}}{(\mu_j - i)!} e^{a_j t},$$

т.е. получили формулу (4.11).

Каждая рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, есть сумма главных частей своих лорановских разложений в полюсах[**]. Действительно, пусть главные части в полюсах a_1, a_2, …, a_k есть G_1, G_2, …, G_k. Рассмотрим функцию $G(p) = F(p) - G_1(p) - G_2(p) - \ldots - G_k(p)$. У этой функции в точке a_j особенность имеют только два слагаемых: $F(p)$ и $G_j(p)$. Но у них взаимно противоположные главные части. Поэтому во всех точках a_j функция $G(p)$ имеет устранимую особенность — проще говоря, аналитична. Во всех остальных точках она тоже аналитична. Кроме того, все слагаемые — правильные дроби, так что $G(p)$ бесконечно малая в ∞. По теореме Лиувилля функция $G(p)$ равна нулю (постоянная, стремящаяся к нулю в бесконечности). Это и означает, что $F(p)$ есть сумма своих главных частей. Формула (4.13) как раз и представляет собой сумму главных частей: j-я внутренняя сумма — это главная часть лорановского разложения в точке a_j.

Найти коэффициенты лорановских разложений в полюсах можно примерно так же, как и вычеты. Пусть лорановское разложение функции $F(p)$ в точке a_j имеет вид (с учетом порядка полюса)

$$F(p) = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ji}(p - a_j)^{i-1-\mu_j},$$

причем $A_{j1} \neq 0$. У функции $H(p) = (p - a_j)^{\mu_j} F(p)$ ряд Лорана за счет сдвига степеней становится рядом Тейлора:

$$H(p) = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ji}(p - a_j)^{i-1}.$$

коэффициенты этого ряда определить через производные функции в точке a_j:

$$A_{ji} = \frac{H^{(i-1)}(a_j)}{(i - 1)!} = \lim_{p \to a_j} \frac{1}{(i - 1)!} \frac{d^{i-1}}{dp^{i-1}} \left[(p - a_j)^{\mu_j} F(p)\right].$$

В результате получили формулу (4.12). Теорема полностью доказана. ►

[**] Ряд Лорана в окрестности конечной точки можно разделить на две части: первая содержит все отрицательные степени, вторая — положительные и нулевую. Первая часть называется главной, вторая — правильной.

Замечание 4.3. Рассмотрим одно слагаемое представления (4.11):

$$G_{ji}(p) = \frac{1}{(p-a_j)^{\mu_j - i+1}}.$$

Найдем вычет функции $G_{ji}(p)e^{pt}$ в точке a_j по формуле для полюса порядка $\mu_j - i + 1$:

$$\operatorname*{res}_{p=a_j} G_{ji}(p)e^{pt} = \lim_{p\to a_j} \frac{1}{(\mu_i - i)!}\,\frac{d^{\mu_j - i}}{dp^{\mu_j - i}} e^{pt} = \frac{t^{\mu_j - i}}{(\mu_j - i)!}.$$

Просуммировав с коэффициентами A_{ji}, получим:

$$\sum_{i=1}^{\mu_j} A_{ji}\frac{t^{\mu_j - i}}{(\mu_j - i)!} = \sum_{i=1}^{\mu_j} \operatorname*{res}_{p=a_j} A_{ji}G_{ji}(p)e^{pt} = \operatorname*{res}_{p=a_j} G_j(p)e^{pt} = \operatorname*{res}_{p=a_j} F(p)e^{pt}.$$

Здесь $G_j(p)$ — главная часть лорановского разложения функции $F(p)$ в точке a_j.

Таким образом,

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\mu_j} A_{ji}\frac{t^{\mu_j - i}}{(\mu_j - i)!} = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{p=a_j} F(p)e^{pt}.$$

Это альтернативное представление оригинала во 2-й теореме разложения.

Теорема 4.17 (3-я теорема разложения). Пусть функция $F(p)$ аналитична в $\mathbb{C}$ всюду, кроме некоторой конечной или счетной последовательности $\{a_k\}$ изолированных особых точек, причем все эти точки находятся в некоторой левой полуплоскости $\operatorname{Re} p \leqslant \sigma_0$ и их совокупность не имеет конечных предельных точек. Пусть также выполнены условия:

– $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль любой вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\sigma > \sigma_0$;

– существует последовательность $R_n \to \infty$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|p|=R_n} |F(p)| = 0$.

Тогда $F(p)$ является изображением, а соответствующий оригинал можно вычислить согласно формуле

$$f(t) = \sum_{k} \operatorname*{res}_{p=a_k} F(p)e^{pt}. \tag{4.14}$$

◀ Идея доказательства — в применении обще теоремы об обращении и вычислении интеграла Меллина с помощью вычетов, для чего используется лемма Жордана. Однако формально не все условия теоремы об обращении выполнены: нет условия, что $F(p) \to 0$, когда $p \to \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma$, где $\sigma > \sigma_0$ и σ_0 — показатель роста $F(p)$. Впрочем, указанное условие на самом деле избыточно. Анализируя доказательство теоремы об обращении, можно показать, что для утверждения достаточно условия, что существует последовательность радиусов $\{R_n\}$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|F(p)|\colon |p| = R_n,\ \operatorname{Re} p \geqslant \sigma\} = 0.$$

С этой оговоркой можно применить теорему об обращении. Из нее следует, что $F(p)$ есть изображение, а соответствующий оригинал записывается по формуле обращения Римана — Меллина:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} p=\sigma} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + i\eta)e^{\sigma t}e^{i\eta t}d\eta.$$

Применяя лемму Жордана, заключаем, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta)e^{i\eta t}d\eta,$$

где $\Phi(\eta) = F(\sigma + i\eta)e^{\sigma t}$, равен сумме вычетов функции $\Phi(z)e^{itz}$ в верхней полуплоскости, т.е. вычетов функции $F(\sigma + iz)e^{(\sigma+iz)t}$ в области $\operatorname{Im} z > 0$. Записав $z = x + iy$, получаем условие $y > 0$. Но тогда $p = \sigma + i(x + iy) = (\sigma - y) + ix$ и условие $y > 0$ равносильно условию $\operatorname{Re} p < \sigma$. Мы приходим к заключению, что интеграл Меллина есть сумма вычетов функции $F(p)\, e^{pt}$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leqslant \sigma_0$ (левее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$ других особых точек нет). ►

5. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

5.1. Введение

Классы функций. Основой для построения теории уравнений в частных производных являются всевозможные линейные пространства, элементами которых являются функции. Такие пространства бесконечномерны, а их свойства не так просты, как в конечномерном случае. Одно из отличий — понятие сходимости. Если в конечномерном линейном пространстве естественный способ определения предела — по координатам — оказывается и, по существу, единственно возможным, то в бесконечномерном это не так. Вопрос нужного определения сходимости приобретает первостепенное значение. Последствия самые разные: нарушение критерия Коши, потеря важных свойств функции типа непрерывности или дифференцируемости и т.д.

Перечислим основные линейные пространства, используемые в теории уравнений в частных производных:

• пространства $L^p(\Omega)$ функций, суммируемых в степени p, $p \geqslant 1$;

• пространство $L^2(\Omega)$ функций, суммируемых в квадрате. Это частный случай упомянутого класса пространств, имеющий важное отличие от остальных: сущестование скалярного произведения;

• пространства Соболева $W^s(\Omega)$ — пространство функций, которые вместе со всеми своими частными производными до порядка s включительно принадлежат пространству $L^2(\Omega)$.

Всевозможные оговорки о гладкости функции, т.е. о существовании у функции определенного набора непрерывных частных производных, сильно усложняют математический аппарат. С другой стороны, требования гладкости необоснованно велики с точки зрения физических представлений: физические величины, описываемые переменными, измеряются приближенно, и, как правило, представляют собой лишь усредненные значения. Функциям, описывающим такие величины, можно приписывать разные требования по гладкости, не меняя существа дела.

Кроме того, есть физические представления, которые нельзя интерпретировать в рамках классического понятия функции, например точечный источник. В классическом изложении теория строится раздельно для точечных величин (типа точечного заряда) и распределенных (заданных в некоторой области с помощью некоторой функции плотности). Однако ясно, что такое разделение с физической точки зрения в значительной мере искусственно.

Эти обстоятельства вынуждают искать способы ослабления требований к используемым функциям. С математической точки зрения основой для такого ослабления может служить то, что рассматриваемые функции используются как подынтегральные и должны удовлетворять условиям суммируемости, а не гладкости отображения.

Соответствующий аппарат был разработан, он называется ***теорией обобщенных функций*** или ***теорией распределений***. В рамках этой теории естественную интерпретацию находит известная δ-функция, с помощью которой представляют точечные источники.

5.2. Определение

Зафиксируем область $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ функций $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

1) $\varphi \in C^\infty(\Omega)$;

2) $\operatorname{supp}(\varphi)$ — компактное подмножество в Ω.

Замечание 5.1. ***Носителем*** $\mathrm{supp}(\varphi)$ ***функции*** φ называют замыкание множества точек в области определения функции, в которых функция отлична от нуля. Для каждой точки, не принадлежащей носителю, можно указать окрестность, в которой функция тождественно равна нулю. Функции с компактным носителем называют ***финитными***.

Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ гладких финитных функций, определенных в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, наделим топологией.

Напомним, что топологией на множестве X называется семейство $\mathcal{T}$ подмножеств X (т.е. подмножество булеана 2^X), обладающее свойствами:

• $\varnothing \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;

• пересечение конечного набора множеств из $\mathcal{T}$ и объединение любого набора множеств из $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$ из множества X и топологии $\mathcal{T}$ на нем называется ***топологическим пространством***. Множества из топологии $\mathcal{T}$ при этом называют ***открытыми множествами***, которые по отношению к любой своей точке называются также ***окрестностями***. ***Замкнутым множеством*** называется любое помножество X, дополнение к которому в X является открытым.

Понятие топологического пространства оказывается слишком общим и допускает в некоторых случаях странные особенности. Поэтому к основному понятию топологического пространства добавляют дополнительные условия — аксиомы. Во-первых, это аксиомы отделимости, из которых наиболее известна ***аксиома T_2 Хаусдорфа***. Эта аксиома требует, чтобы для любых двух несовпадающих точек x_1, $x_2 \in X$ существовали их окрестности U_1, U_2, которые друг с другом не пересекаются. Топологическое пространство с аксиомой T_2 называется ***хаусдорфовым***.

Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ топологического пространства X_1 в другое (или в то же) топологическое пространство X_2 называется непрерывным, если прообраз любого открытого множества в X_2 является открытым в X_1, т.е. $A \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(A) \in \tau_1$. Можно также дать определение отображения, непрерывного в точке с помощью окрестностей, понимая под окрестностью точки любое открытое множество, содержащее эту точку. Понятие непрерывного отображения, данное выше, означает, что отображение непрерывно в каждой точке области определения.

Для задания топологии $\mathcal{T}$ на данном множестве не обязательно указывать все элементы семейства $\mathcal{T}$. ***Базой топологии*** $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ называют такое подсемейство $\mathcal{B}$ семейства $\mathcal{T}$, что любое множество $U \in \mathcal{T}$ является объединением некоторого набора множеств из $\mathcal{B}$. Подсемейство $\mathcal{B}$ топологии $\mathcal{T}$ является базой этой топологии, если для любого множества $G \in \mathcal{T}$ и любой точки $x \in G$ существует множество $A \in \mathcal{B}$, удовлетворяющее условию $x \in A \subset G$.

Семейство множеств $\mathcal{B} \subset 2^X$ образует базу некоторой топологии на X, если оно обладает двумя свойствами:

• $\bigcup\limits_{G\in\mathcal{B}} G = X$ (т.е. любая точка $x \in X$ принадлежит какому-либо из множеств $G \in \mathcal{B}$);

• для любых G_1, $G_2 \in \mathcal{B}$ и любого $x \in G_1 \cap G_2$ существует $G \in \mathcal{B}$, для которого $x \in G \subset$ $\subset G_1 \cap G_2$.

Семейство $\mathcal{B}$ окрестностей точки $x \in X$ (т.е. открытых множеств, включающих x) называется ***локальной базой в точке x*** (также ***определяющей системой окрестностей***, если для любой окрестности V точки x существует множество $G \in \mathcal{B}$, для которого $x \in G \subset V$. ***Первая аксиома счетности*** постулирует, что в топологическом пространстве каждая точка имеет счетную локальную базу. Примерами топологических пространств с первой аксиомой счетности являются метрические пространства. В топологических пространствах с первой аксиомой счетности эквивалентны пределы по Гейне (через последовательности) и Коши.

Вторая аксиома счетности гласит, что в топологическом пространстве имеет счетная база топологии. Если в топологическом пространстве имеет место вторая аксиома счетности, то имеет место и первая. Из второй аксиомы счетности также следует существование в топологическом пространстве счетного всюду плотного множества, т.е. ***сепарабельность топологического пространства***.

Если хаусдорфово топологическое пространство X обладает структурой линейного пространства, причем линейные операции в заданной топологии непрерывны, то его называют топологическим векторным пространством. Из непрерывности операции сложения вытекает, что если G — открытое множество, то для любого вектора $x \in X$ множество $G+x = \{y + x\colon y \in G\}$ тоже открытое. Поэтому, если $\mathcal{B}$ — локальная база в точке x, то $\mathcal{B} - x = \{G - x\colon G \in \mathcal{B}\}$ — локальная база в нуле. Наоборот, если $\mathcal{B}$ — локальная база в нуле, то $\mathcal{B} + x$ — локальная база в точке x. Эти особенности позволяют при задании топологии в линейном пространстве ограничиться заданием только локальной базы нуля.

Один из способов задания топологии в линейном пространстве базируется на использовании полунорм. По определению ***полунорма*** в линейном пространстве X — это функция $p\colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, $x,\ y \in X$;
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Полунорма отличается от нормы отсутствием 3-й аксиомы. Однако, отметим, что первая часть этой аксиомы (неотрицательность функции, т.е. $p(x) \geqslant 0$) вытекает из сформулированных двух аксиом. Действительно, Во-первых,

$$p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot (0) = 0.$$

Во-вторых,

$$0 = p(0) = p(x - x) \leqslant p(x) + p(-x) = p(x) + p((-1)x) = p(x) + p(x) = 2p(x),$$

откуда $p(x) \geqslant 0$.

Семейство полунорм $\{p_\alpha(x)\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, в линейном пространстве называется разделяющим, если для любого вектора $x \neq 0$ существует $\alpha \in \mathcal{A}$, такое, что $p_\alpha(x) \neq 0$. С помощью разделяющего семейства полунорм $\{p_\alpha(x)\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, можно построить топологию, выбрав в качестве локальной базы всевозможные конечные пересечения множеств

$$U(\alpha, n) = \left\{x \in X\colon p_\alpha(x) < \frac{1}{n}\right\}, \quad \alpha \in \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Можно показать, что относительно порождаемой такими пересечениями топологии линейные операции непрерывны.

Если семейство полунорм счетно, то и семейство конечных пересечений множеств $U(\alpha, n)$ счетно. Получаем топологическое векторное пространство с первой аксиомой счетности. Сходимость $x_n \to 0$ в этой топологии равносильна сходимости к нулю любой последовательности $p_\alpha(x_n)$, $\alpha \in \mathcal{A}$.

Если топология в линейном пространстве задана семейством полунорм, то топологическое векторное пространство оказывается ***локально выпуклым***: оно имеет локальную базу выпуклых окрестностей. Напомним, что множество A в линейном пространстве выпукло, если для любых векторов $x,\ y \in A$ и числа $\alpha \in (0,\ 1)$ имеем $\alpha x + (1 - \alpha) y \in A$.

Наоборот, топология в локально выпуклом пространстве может быть задана семейством полунорм. Множество $A \subset X$ называется ***поглощающим***, если для любого вектора $x \in X$ существует число $t \in \mathbb{R}$, для которого $tx \in A$. Множество $A \subset X$ ***уравновешенное***, если для любого $x \in A$ и любого $\alpha \in [-1,\ 1]$ имеем $\alpha x \in A$.

Понятия выпуклого, уравновешенного, поглощающего множества связаны с понятием полунормы: для любой полунормы $p(x)$ множество $V_p(c)$, описываемое неравенством $p(x) < c$ является выпуклым, поглощающим и уравновешенным. Если полунорма непрерывна, то множество $V_p(c)$ открыто. Наоборот, любое открытое, выпуклое, уравновешенное, поглощающее множество U может быть задано неравенством $p(x) < c$, где полунорма $p(x)$ — это ***функционал Минковского***, определяемый формулой:

$$p(x) = \inf \{\alpha > 0\colon x \in \alpha U\}.$$

Любая окрестность нуля является поглощающим множеством. В любой выпуклой окрестности нуля можно выбрать выпуклую уравновешенную окрестность. Таким образом, если в топологическом векторном пространстве есть локальная база выпуклых окрестностей, ее можно заменить локальной базой выпуклых поглощающих окрестностей. Каждая такая окрестность определяет полунорму — функционал Минковского.

Локально выпуклые топологические векторные пространства — расширение класса нормированных пространств, в котором сохраняются определенные свойства нормированных пространств.

Вернемся к вопросу построения топологии в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$. В $\mathcal{D}(\Omega)$ для любого компакта $K \subset \Omega$ можно выделить подпространство $\mathcal{D}_K$ функций, носитель которых содержится в K: $\mathcal{D}_K = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\colon \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$. Топологию в каждом пространстве $\mathcal{D}_K$ можно задать последовательностью полунорм

$$p_N(\varphi) = \max_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

С этой топологией линейное пространство $\mathcal{D}_K$ становится локально выпуклым со счетной локальной базой. Сходимость $\varphi_n \to 0$ в этой топологии означает, что для любого мультииндекса α выполняется условие $\partial^\alpha \varphi_n(x) \underset{K}{\rightrightarrows} 0$ (равномерно на K).

С помощью семейства полунорм p_N можно ввести топологию и в $\mathcal{D}(\Omega)$, тем самым определив локально выпуклое пространство. Однако в этом случае пространство не будет полным. Проблема в том, что последовательность финитных функций может стремиться к нефинитной функции. Более строго говоря, в такой топологии есть фундаментальные последовательности, не являющиеся сходящимися. Чтобы блокировать этот эффект, необходимо расширить топологию добавлением новых множеств, которые становятся открытыми.

Окрестностью нуля в $\mathcal{D}(\Omega)$ назовем любое уравновешенное выпуклое множество U, такое, что для любого компакта $K \subset \Omega$ пересечение $U \cap \mathcal{D}_K$ открыто в $\mathcal{D}_K$. Множество U оказывается при этом поглощающим. Совокупность таких множеств порождает локально выпуклую топологию. Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ с указанной топологией называется ***основным пространством***, или ***пространством основных функций*** (также ***пространством пробных функций***).

Это пространство не обладает 1-й аксиомой счетности, т.е. понятия непрерывности по Коши и по Гейне в этом пространстве не совпадают. Однако эквивалентность двух определений непрерывности сохраняется для линейных функционалов: линейный функционал $f(\varphi)$, заданный в $\mathcal{D}(\Omega)$, непрерывен, если для любой последовательности $\varphi_n \to 0$ имеем $f(\varphi_n) \to 0$. То же верно для любого линейного операторов из $\mathcal{D}(\Omega)$ в локально выпуклое пространство.

Установим некоторые свойства введенного локально выпуклого пространства.

Теорема 5.1. Последовательность $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда:

– существует такой компакт $K \subset \Omega$, что $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$, $n = 1, 2, \ldots$;

– для любого мультииндекса α имеет место сходимость $\partial^\alpha \varphi_n \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi$ на K (здесь ∂^α обозначает частную производную функции, соответствующую мультииндексу α). #

Теорема 5.2. В пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ операция дифференцирования является непрерывным линейным оператором.

◀ Надо показать, что для любого частного дифференцирования, если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(\Omega)$, то и $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$. Последнее означает равномерную сходимость всех частных производных, содержащих мультииндекс α, а это — часть условия сходимости исходной последовательности. ▶

Пример 5.1. Покажем, что требования к основным функциям не являются противоречивыми и такие функции есть. Отметим, что аналитические функции комплексного переменного финитными быть не могут, т.е. для них требования к основным функциям противоречивы.

Сначала рассмотрим одномерный случай. Рассмотрим функцию

$$w(x) = \begin{cases} C\exp\Bigl(\dfrac{1}{x^2-1}\Bigr), & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Эта функция определена на числовой оси, бесконечно дифференцируема и имеет носителем отрезок $[-1,\ 1]$. Постоянную C выбираем таким образом, чтобы интеграл от этой функции равнялся единице.

Функция $w_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}w\Bigl(\dfrac{x}{\varepsilon}\Bigr)$ имеет носителем отрезок $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$, а интеграл от нее по-прежнему равен единице. Эту функцию называют «шапочкой».

Пусть f — некоторая суммируемая функция с компактным носителем K. Тогда функция

$$f_\varepsilon(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, w_\varepsilon(x-\xi)\, d\xi$$

является бесконечно дифференцируемой с компактным носителем $\overline{K}_\varepsilon$, где

$$K_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}\colon \rho(y,K) < \varepsilon\}\,, \quad \rho(y,K) = \inf_{x\in K} |y-x|.$$

Эти построения можно перенести на случай нескольких переменных. В $\mathbb{R}^n$ положим

$$w(x) = w(|x|) = \begin{cases} C\exp\Bigl(\dfrac{1}{|x|^2-1}\Bigr), & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

где в данном случае $|x|$ — длина (евклидова норма) вектора x, а C выбирается так, что кратный интеграл от функции равен единице. Тогда $w_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}w(\varepsilon^{-1}x)$ имеет носитель $|x| \leqslant \varepsilon$, а интеграл от этой функции равен единице.

Далее, для любой интегрируемой функции $f(x)$ с компактным носителем K свертка

$$f_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, w_\varepsilon(x-\xi)\, d\xi$$

дает гладкую функцию, носитель которой находится в K_ε. Наконец, для любого компакта K, взяв $f(x) = \chi_{K_\varepsilon}(x)$ (характеристическую функцию множества K_ε), получим гладкую функцию $\varphi(x) = f_\varepsilon(x)$, удовлетворяющую условиям: а) $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}^n$; б) $\varphi(x) = 1$, $x \in K$; в) $\operatorname{supp}\varphi \subset K_{2\varepsilon}$.

Замечание 5.2. Как показывает рассмотренный пример, пространство основных функций достаточно представительно. Можно показать, что множество пробных функций всюду плотно в $L_1(\Omega)$. Аналогичный результат можно получить для любого банахова пространства $L_p(\Omega)$.

Определение 5.1. ***Обобщенной функцией*** называют всякий непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$. Иначе говоря, обобщенная функция — любой элемент линейного пространства $\mathcal{D}(\Omega)^*$, сопряженного к пространству основных функций.

Таким образом, множество обобщенных функций представляет собой линейное пространство, сопряженное к пространству основных функций. Топологией в $\mathcal{D}(\Omega)^*$ является топология слабой сходимости (т.е. поточечной сходимости функционалов). Действие обобщенной функции f на основную функцию φ часто записывают в форме скалярного произведения: $\langle f,\,\varphi\rangle$.

Следующая лемма полезна при проверке функционала на непрерывность.

Лемма 5.1. Функционал $f\in\mathcal{D}(\Omega)^*$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле, т.е. для любой последовательности φ_n из $\varphi_n\to 0$ следует $\langle f,\,\varphi_n\rangle\to 0$.

◀ Это общий факт для линейных операторов в топологических векторных пространствах. В данном случае сходимость пробных функций $\varphi_n\to\varphi$ равносильна сходимости $\varphi_n-\varphi\to 0$, так что условие $f(\varphi_n)\to f(\varphi)$ при $\varphi_n\to\varphi$ эквивалентно условию $f(\varphi_n-\varphi)\to 0$ при $\varphi_n-\varphi\to 0$. ▶

Если для любого $\varphi\in\mathcal{D}(\omega)$ последовательность $\langle f_n,\,\varphi\rangle$ фундаментальна, то последовательность f_n слабо сходится в $\mathcal{D}(\Omega)^*$ к некоторому функционалу. Возникает вопрос, является ли этот слабый предел непрерывным функционалом. Оказывается, да, т.е. непрерывность при слабом пределе в $\mathcal{D}(\Omega)^*$ сохраняется. Чтобы доказать это, установим следующий факт.

Лемма 5.2. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится к 0 в $\mathcal{D}(\Omega)$. Тогда для любой числовой последовательности $\lambda_n\to\infty$ существует такая подпоследовательность $\psi_k=\varphi_{n_k}$, $k\in\mathbb{N}$, что для любой подпоследовательности ψ_{k_s} ряд $\sum\lambda_{k_s}\psi_{k_s}$ сходится в $\mathcal{D}(\Omega)$.

◀ Так как последовательность $\{\varphi_n\}$ бесконечно малая в $\mathcal{D}(\Omega)$, для любого $k\in\mathbb{N}$ можно выбрать такой номер n_k, что для $\psi_k=\varphi_{n_k}$ выполняются соотношения

$$\sup_{x\in K}|\partial^\alpha\psi_k|\leqslant\frac{1}{2^k\lambda_k},\qquad |\alpha|\leqslant k,$$

где $K\subset\Omega$ — компакт, в котором заключены носители всех функций φ_n.

Выберем произвольный мультииндекса α. Начиная с некоторого номера k, а именно, при $k\geqslant|\alpha|$ верно неравенство $\lambda_k|\partial^\alpha\psi_k|\leqslant 2^{-k}$, т.е. ряд $\sum\lambda_k\partial^\alpha\psi_k$ имеет сходящуюся мажоранту. Следовательно, он сходится на K равномерно. Равномерная сходимость всех производных означает, что ряд можно дифференцировать почленно, т.е. для любого мультииндекса α

$$\partial^\alpha\Bigl(\sum\lambda_k\psi_k\Bigr)=\sum\lambda_k\partial^\alpha\psi_k.$$

Поэтому ряд $\sum\lambda_k\psi_k$ сходится в $\mathcal{D}(\Omega)$. Ясно, что приведенные рассуждения верны и для любой подпоследовательности последовательности $\{\psi_k\}$. ▶

Теорема 5.3. Слабый предел обобщенных функций является обобщенной функцией.

◀ Предположим, что последовательность $f_n\in\mathcal{D}(\Omega)^*$ сходится слабо к функционалу f, который не является непрерывным (т.е. не является обобщенной функцией). Это предположение приводит нас к утверждению, что существует такая последовательность $\varphi_n\in\mathcal{D}(\Omega)$, что $\varphi_n\overset{D}{\to}0$, но при этом $|\langle f,\,\varphi_n\rangle|\geqslant c>0$. Полагая, например, $\lambda_n=n$, согласно лемме 5.2, из последовательности φ_n выбираем подпоследовательность φ_{n_k}, для которой ряд $\sum\lambda_k\varphi_{n_k}$, как и любой частичный ряд, сходится в $\mathcal{D}(\Omega)$. При этом $|\langle f,\,\lambda_k\varphi_{n_k}\rangle|\geqslant\lambda_n c\to+\infty$. Далее будем рассматривать последовательность пробных функций $\lambda_k\varphi_{n_k}$, за которой сохраним исходное обозначение, т.е. считаем, что для последовательности $\{\varphi_n\}$ выполнены условия:

– для любой последовательности φ_{n_k} ряд $\sum\varphi_{n_k}$ сходится в $\mathcal{D}(\Omega)$;

– последовательность $\langle f,\,\varphi_n\rangle$ бесконечно большая, т.е. $|\langle f,\,\varphi_n\rangle|\to+\infty$ при $n\to\infty$.

Доказательство состоит в определенном выборе пробных функций $\psi_k=\varphi_{n_k}$ и обобщенных функций $g_k=f_{m_k}$. Согласно выбору исходной последовательности $\{\varphi_n\}$ ряд $\sum\psi_k$ сходится к некоторой пробной функции ψ. Но указанный выбор может быть таким, что последовательность $\langle g_k,\,\psi\rangle$ будет неограниченной. А это противоречит слабой сходимости последовательности $\{g_k\}$, которая является подпоследовательностью слабо сходящейся последовательности $\{f_n\}$.

В качестве ψ_1 можем выбрать φ_1, а в качестве g_1 — также f_1 (первоначальный выбор не является существенным. Пусть $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_s$ и соответствующие $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_s$ выбраны.

Выбираем $\psi_{s+1} = \varphi_{n_{s+1}}$ с настолько большим номером n_{s+1}, что выполняются неравенства $|\langle g_j, \psi_{s+1}\rangle| < 2^{-s-1}$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Это можно сделать, поскольку для конечного набора выбранных обобщенных функций g_j последовательности $\langle g_j, \varphi_n\rangle$ при $n \to \infty$ сходятся к нулю в силу непрерывности функционалов g_j. Такое условие выбора означает, что для любой пары индексов r и s, связанных неравенством $r < s$, будет выполнено условие $|\langle g_r, \psi_s\rangle| < 2^{-s-1}$. Значит, будет выполнено неравенство

$$\Big|\sum_{s=r+1}^{\infty} \langle g_r, \varphi_s\rangle\Big| \leqslant \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^{s+1}} = \frac{1}{2^s} < 1.$$

При выборе ψ_{s+1} дополнительно потребуем, чтобы $|\langle f, \psi_{s+1}\rangle| \geqslant M_{s+1}$, где $\{M_s\}$ — некоторая неограниченно возрастающая последовательность, которую мы определим позже.

Выбрав ψ_{s+1}, выбираем $g_{s+1} = f_{m_{s+1}}$ с номером m_{s+1} настолько большим, что выполняются неравенства $|\langle g_{s+1} - f, \psi_j\rangle| < \varepsilon_{s+1}$, $j = 1, 2, \ldots, s+1$. Этот выбор возможен, поскольку $(f_n, \psi_j) \to \langle f, \psi_j\rangle$ в силу слабой сходимости последовательности $\{f_n\}$. Последовательность $\{\varepsilon_s\}$ также выберем позднее.

После указанного выбора получаем последовательность ψ_s, для которой ряд $\sum \psi_s$ сходится к некоторой функции ψ. Оценим значение $\langle g_k, \psi\rangle$. Учитывая непрерывность функционалов g_k, находим:

$$\langle g_k, \psi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle g_k, \psi_j\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} \langle g_k, \psi_j\rangle + \langle g_k, \psi_k\rangle + \sum_{j=k+1}^{\infty} \langle g_k, \psi_j\rangle .$$

В этом распределении суммы на три составляющих крайние составляющие малы, а средняя велика, что в результате приводит к большому значению суммы в целом. Согласно правилам выбора функций ψ_j имеем

$$\Big|\sum_{j=k+1}^{\infty} \langle g_k, \psi_j\rangle\Big| \leqslant 1.$$

Оценим среднее слагаемое:

$$|\langle g_k, \psi_k\rangle| \geqslant |\langle f, \psi_k\rangle| - |\langle f - g_k, \psi_k\rangle| \geqslant M_k - \varepsilon_k.$$

Аналогично можно оценить оставшуюся сумму:

$$\Big|\sum_{j=1}^{k-1} \langle g_k, \psi_j\rangle\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} |\langle g_k, \psi_j\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} |\langle f, \psi_j\rangle| + \sum_{j=1}^{k-1} |\langle f - g_k, \psi_j\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} |\langle f, \psi_j\rangle| + (k-1)\varepsilon_k.$$

В итоге

$$|\langle g_k, \psi\rangle| \geqslant M_k - \sum_{j=1}^{k-1} |\langle f, \psi_j\rangle| - k\varepsilon_k - 1.$$

Теперь обсудим выбор последовательностей $\{\varepsilon_k\}$ и $\{M_k\}$. Можно положить $\varepsilon_k = 1/k$. Значение M_k задействовано после того, как функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k-1}$ уже выбраны. Поэтому, выбирая M_k, можно предварительно подсчитать сумму $A_{k-1} = \sum\limits_{j=1}^{k-1} |\langle f, \psi_j\rangle|$ и затем выбрать $M_k = k+2+A_{k-1}$. Тогда в результате получим неравенство $|\langle g_k, \psi\rangle| \geqslant k$. Это неравенство, выполняющееся для всех натуральных k, означает, что последовательность обобщенных функций $\{g_k\}$ не сходится на пробной функции ψ, что противоречит условиям теоремы. Противоречие доказывает теорему. ►

Доказанная теорема показывает, что при слабом предельном переходе дополнительно проверять непрерывность не обязательно.

Пример 5.2. Любая локально интегрируемая в Ω (т.е. интегрируемая на любом компакте в Ω) функция f порождает функционал

$$R_f(\varphi) = \int\limits_{\Omega} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Этот функционал непрерывен. Действительно, если $\varphi_n \to 0$, то существует такой компакт $K \subset \Omega$, что $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$, причем $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ на K. Отсюда

$$|R_f(\varphi_n)| \leqslant \int\limits_K |f(x)|\,|\varphi_n(x)|\,dx \leqslant \max_{x\in K} |\varphi_n(x)| \int\limits_K |f(x)|\,dx \to 0.$$

Функционал R_f будем называть ***регулярной обобщенной функцией***, соответствующей локально интегрируемой функции f.

Интересен тот факт, что каждая регулярно обобщенная функция определяется единственной локально интегрируемой функцией. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5.3. Если локально интегрируемая в Ω функция f удовлетворяет условию, что

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то $f = 0$.

◀ Надо доказать, что интеграл функции по любому множеству равен нулю. Отсюда и будет следовать, что функция равна нулю почти всюду. Достаточно рассмотреть только базовые множества, т.е. параллелепипеды. Интеграл по параллелепипеду можно представить в виде

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\chi(x)\,dx, \tag{5.1}$$

где $\chi(x)$ — характеристическая функция этого параллелепипеда. Наконец, характеристическую функцию можно представить как предел почти всюду ограниченных в совокупности гладких финитных функций, например функций

$$\chi_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(\xi)\,k^n\omega(k(x-\xi))\,d\xi$$

(n — размерность пространства; $\omega(x)$ — n-мерная «шапочка»; функция f доопределена вне Ω нулем). Последовательность $f(x)\chi_k(x)$ почти всюду сходится к $f(x)\chi(x)$ и имеет мажоранту $f(x)$. В соответствии с теоремой Лебега заключаем, что интеграл (5.1) равен нулю. ▶

Доказанная лемма позволяет отождествить локально интегрируемые функции с порождаемыми ими обобщенными функциями. В этом смысле регулярные обобщенные функции — это обычные функции, в то время как ***сингулярные функции***, т.е. обобщенные функции, не являющиеся регулярными, к обычным функциям не могут быть отнесены.

Пример 5.3. **а.** Более широкий класс обобщенных функций порождается σ-конечными мерами, определенными на алгебре борелевских множеств в Ω. Если μ — такая мера, то интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \varphi\,d\mu$$

определяет функционал на пространстве основных функций. Нетрудно убедиться в том, что этот функционал линеен и непрерывен, т.е. является обобщенной функцией.

б. Интересен функционал, который каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (считаем, что $0 \in \Omega$) ставит в соответствие ее значение в заданной точке 0, т.е. $T_0(\varphi) = \varphi(0)$. Нетрудно показать, что это непрерывный функционал. Его называют δ-функцией.

δ-функцию можно получить как слабый предел регулярных функций. Действительно, рассмотрим шар $U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < \varepsilon\}$ и его характеристическую функцию $f_\varepsilon(x)$. По теореме о среднем для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f_\varepsilon,\, \varphi\rangle = \int\limits_{U_\varepsilon} \varphi(x)\, dx = \varphi(\xi_\varepsilon)\, m_\varepsilon,$$

где ξ_ε — некоторая точка в шаре U_ε; m_ε — объем шара U_ε (применена интегральная теорема о среднем). В силу непрерывности функции φ имеем $\varphi(\xi_\varepsilon) \to \varphi(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому последовательность $g_\varepsilon = \dfrac{f_\varepsilon}{m_\varepsilon}$, как последовательность соответствующих функционалов, слабо сходится к функционалу T_0.

в. Предыдущий пример нетрудно обобщить. Рассмотрим линейный функционал $T_\alpha(\varphi) = \partial^\alpha\varphi(x_0)$, где $\alpha = (\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n)$ — мультииндекс степени $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, а

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}.$$

Этот функционал также представляет собой обобщенную функцию. Ее можно назвать производной мультииндекса α от δ-функции (в действительности этот функционал может отличаться от производной знаком). #

Для обобщенной функции не имеет смысла понятие «значение в точке». Однако можно делать заключения о совокупности значений в некоторой области (окрестности).

Пусть $G \subset \Omega$ — некоторая область. Отметим, что $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Поэтому непрерывный линейный функционал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ является таковым и на $\mathcal{D}(G)$. Этот функционал обозначим f_G и назовем ***сужением обобщенной функции*** на область G.

Скажем, что обобщенная функция $f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ равна нулю в области $G \subset \Omega$, если функция f_G нулевая. Две функции равны в области G, если их разность в этой области равна нулю.

Носителем обобщенной функции $f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ называется множество таких точек $x \in \Omega$, что ни в какой окрестности точки x функция f не равна нулю. Носитель функции — это дополнение в Ω к множеству точек, в некоторой окрестности которых функция равна нулю.

Лемма 5.4. Если обобщенная функция равна нулю в некоторой окрестности каждой точки $x \in \Omega$, то она равна нулю в Ω.

◀ Пусть функция $f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ равна нулю в некоторой окрестности каждой точки $x \in \Omega$. Необходимо показать, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ верно равенство $\langle f,\, \varphi\rangle = 0$. Обозначим $K = \operatorname{supp}(\varphi)$. В каждой точке $x \in K$ выберем окрестность U_x, в которой функция f обращается в нуль. Можно считать, что U_x — круговая (стандартная) окрестность. Обозначим через W_x окрестность с тем же центром, что и U_x, но вдвое меньшего радиуса. Семейство окрестностей W_x накрывает K. Следовательно, из этого семейства можно выбрать конечный набор W_1, $W_2,\, \ldots,\, W_m$, также в совокупности накрывающих K.

Для каждой точки x существует неотрицательная функция $\psi \in \mathcal{D}(U_x)$, которая на W_x равна 1. Пусть $\psi_1,\, \psi_2,\, \ldots,\, \psi_m$ — такие функции для окрестностей $U_1,\, U_2,\, \ldots,\, U_m$. Функция $\psi = \psi_1 + \ldots + \psi_m$ на K не обращается в нуль, поскольку каждая точка $x \in K$ попадает в одно из множеств W_i, на котором $\psi_i = 1$. Поэтому функции

$$\varphi_i = \frac{\psi_i\varphi}{\psi_1 + \ldots + \psi_m}$$

гладкие, имеют носитель $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset \operatorname{supp}\psi_i \subset U_i$ и, кроме того, $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m = \varphi$. Первое условие означает, что $(f,\, \varphi_i) = 0$, а второе — что $(f,\, \varphi) = 0$. ▶

Доказанная лемма говорит о том, что обобщенная функция полностью определяется локальным поведением. Из доказательства леммы легко понять, как восстановить обобщенную функцию (т.е. построить алгоритм вычисления ее значения на произвольной пробной функции). Однако из этого доказательства не вытекает, всегда ли существует обобщенная функция, определенная локально. Ясно, что локальные определения функции должны быть согласованы, т.е. если функция определена в окрестностях V_1 и V_2 и эти окрестности пересекаются, то локальные определения в пересечении должны давать одну и ту же функцию. Вопрос, достаточно ли таких условий согласования? Ответ — да. Чтобы сформулировать и доказать соответствующую теорему, установим один общий результат.

Теорема 5.4 (о разбиении единицы). Пусть семейство областей G_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, покрывает область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha = \Omega$. Тогда существует такое семейство функций $\varphi_\beta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\beta \in \mathcal{J}$, что:

1) для любого $\beta \in \mathcal{J}$ существует такой индекс $\alpha \in \mathcal{I}$, что $\operatorname{supp} \varphi_\beta \subset G_\alpha$;

2) $0 \leqslant \varphi_\beta(x) \leqslant 1$ для любого $\beta \in \mathcal{J}$;

3) на любом компакте $K \subset \Omega$ лишь конечное множество функций φ_β имеет ненулевые значения;

4) $\sum\limits_{\beta \in \mathcal{J}} \varphi_\beta(x) = 1$ для любой точки $x \in \Omega$.

◀ Доказательство состоит из двух этапов. На первом этапе строим последовательность компактов K_n, исчерпывающих область Ω, т.е. удовлетворяющих условиям $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ (здесь $\overset{\circ}{K}$ — внутренность множества K). В качестве такой последовательности можно выбрать $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \rho(x, \mathcal{C}\Omega) \geqslant c/n,\ |x| \leqslant n/c\}$, где $\mathcal{C}G$ — дополнение к множеству G, а $\rho(x, G)$ обозначает расстояние от точки x до множества G: $\rho(x, G) = \inf\limits_{y \in G} |y - x|$. Параметр c выбирается достаточно малым с расчетом, что множество K_1 будет непустым. Множество K_n замкнуто и ограничено, следовательно компактно. При этом

$$\overset{\circ}{K}_{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \rho(x, \mathcal{C}\Omega) > \frac{c}{n+1},\ |x| < \frac{n+1}{c}\right\},$$

так что $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Добавим $K_0 = \varnothing$ для упрощения рассуждений и выкладок.

На втором этапе строим семейство функций ψ_x, $x \in \Omega$, следующим образом. Каждая точка $x \in \Omega$ принадлежит одному из открытых множеств $\overset{\circ}{K}_{n+2} \setminus K_n$ (в качестве n можно выбрать первый индекс, для которого $x \in K_n$), а также хотя бы одному из множеств G_α. Выберем окрестность $V(x)$ так, что $V(x)$ целиком входит в $\overset{\circ}{K}_{n+2} \setminus K_n$ и в G_α. Считаем, что окрестность $V(x)$ круговая. В $V(x)$ выберем окрестность $W(x)$ вдвое меньшего радиуса и построим функцию $\psi_x \in \mathcal{D}(V(x))$ со значениями на отрезке $[0,\,1]$, причем $\psi_x(y) \equiv 1$ при $y \in W(x)$.

Из семейства функций ψ_x выберем последовательность следующим образом. Сначала выберем конечное число точек $x_1,\ \ldots,\ x_{p_1}$, для которых $\bigcup\limits_{i=1}^{p_1} W(x_i) \supset K_1$. К ним добавим конечное число точек $x_{p_1+1},\ \ldots,\ x_{p_2}$, для которых $\bigcup\limits_{i=p_1+1}^{p_2} W(x_i) \supset K_2 \setminus \overset{\circ}{K}_1$. Затем добавим точки, окрестности $W(x)$ которых накрывают $K_3 \setminus \overset{\circ}{K}_2$ и т.д.

Последовательность функций $\{\psi_{x_i}\}$ имеет следующие свойства.

1. Носитель любой функции ψ_{x_i} целиком содержится в одном из множеств G_α.
2. В каждой точке $y \in \Omega$ по крайней мере одна из функций ψ_{x_i} отлична от нуля.
3. С каждым компактом $K \subset \Omega$ пересекаются носители только конечного числа функций ψ_{x_i}.

Свойство 1 вытекает из процедуры построения последовательности $\{\psi_{x_i}\}$. Также очевидно и свойство 2: по построению $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W(x_i) = \Omega$, так что $y \in W(x_i)$ для некоторого i и, значит, $\psi_{x_i}(y) = 1$. Докажем свойство 3. Произвольно выбранный компакт K накрывается семейством открытых множеств $\mathring{K}_i$. Из них можно выделить конечное число, в совокупности накрывающих K, но так как они последовательно вложены друг в друга, то делаем заключение, что для некоторого номера j выполнено включение $K \subset \mathring{K}_j \subset K_j$. С компактом K_j пересекается лишь конечное число множеств $V(x_i)$, так как, начиная с некоторого номера i_0, окрестность $V(x_i)$ содержится в $\mathring{K}_{r+2} \setminus K_r$ с номером $r > j$, а в этом случае $V(x_i) \cap K_r = \varnothing$, откуда $V(x_i) \cap K_j = \varnothing$.

В силу отмеченных свойств в Ω определена функция $\psi(y) = \sum\limits_i \psi_{x_i}(y)$ (считаем, что каждая функция ψ_{x_i} продолжена с $V(x_i)$ нулем на всю область Ω). Формально записанный ряд в каждой точке имеет конечное число слагаемых (точка y, как компакт, содержится в конечном числе носителей функций ψ_{x_i}), так что со сходимостью проблем не возникает. Более того, для каждой точки $y \in \Omega$ в некоторой ее окрестности ряд сводится к конечной сумме (надо выбрать окрестность с компактным замыканием, целиком принадлежащим Ω). Поэтому функция ψ бесконечно дифференцируема. Функция ψ не обращается в нуль (а фактически всегда больше 1).

Система функций $\varphi_i(y) = \psi_{x_i}(y)/\psi(y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. ►

Доказательство следующей теоремы — развитие доказательства леммы 5.4. Более того, единственность склеенной функции непосредственно вытекает из этой леммы. Чтобы склеить функцию из локальных, надо разбить произвольную функцию φ в сумму нескольких функций, каждая из которых имеет носитель в одной из областей G_α. Тогда значение функционала на функции φ определяется по свойству аддитивности. Проблема здесь — уследить за тем, что результат не зависит от способа разбиения. Надо такое разбиение сделать независимым от пробных функций. Тогда можно определить функционал, который не будет зависеть от разбиения, а по свойству единственности этот функционал оказывается единственно возможным.

Теорема 5.5 (о склеивании). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ покрыта семейством областей G_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, (считаем, что $G_\alpha \subset \Omega$). Пусть для каждого $\alpha \in \mathcal{I}$ в G_α задана обобщенная функция f_α, причем, если $G_\alpha \cap G_\beta \neq \varnothing$, то $f_\alpha = f_\beta$ в $G_\alpha \cap G_\beta$. Тогда существует единственная обобщенная функция $f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, которая для любого $\alpha \in \mathcal{I}$ совпадает с f_α в G_α.

◄ Для семейства областей G_α построим соответствующее разбиение единицы φ_β, $\beta \in \mathcal{J}$. Определим отображение

$$f(\varphi) = \sum_{\beta \in \mathcal{J}} f(\varphi\varphi_\beta).$$

Нетрудно показать, что так определенный функционал является линейным. Кроме того, для всех основных функций φ с носителем в компакте $K \subset \Omega$ состав ненулевых слагаемых в сумме один и тот же. Поэтому, если $\varphi_n \to \varphi$, то происходит предельный переход в конечной сумме. Значит $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$, и функционал f непрерывный. ►

Пример 5.4 (формулы Сохоцкого). В $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ рассмотрим обобщенную функцию $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, определяемому равенством

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\, \varphi \right\rangle = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Интеграл берется в смысле главного значения, поскольку он расходится в точке $x = 0$:

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right).$$

Существование предела вытекает из следующих соображений. Если $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,\, R]$, то

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{1}{x}\,dx\right) = \int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Непрерывность следует из неравенств

$$\left|\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\, \varphi\right\rangle\right| \leqslant \int\limits_{-R}^{R}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|dx \leqslant 2R\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx$$

(это еще один способ интерпретировать $\int\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$). В силу преобразования

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \varphi(0)\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x+i\varepsilon} + \int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx$$

заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x+i\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx = -\varphi(0)\cdot i\pi + \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Получили формулу

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx = -i\pi\varphi(0) + \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Из нее вытекает существование обобщенной функции, определяемой равенством

$$\left\langle\frac{1}{x+i0},\, \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx.$$

Эта функция удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,. \tag{5.2}$$

Аналогично определяется обобщенная функция $\frac{1}{x-i0}$, удовлетворяющая равенству

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\,. \tag{5.3}$$

Формулы (5.2) и (5.3) называют ***формулами Сохоцкого***. Они широко используются в квантовой физике.

5.3. Операции над обобщенными функциями

Все операции над обобщенными функциями возникают как естественное обобщение операций над обычными функциями.

Замена переменной. Предположим, есть гладкий (C^∞) диффеоморфизм γ области $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ на область Ω. Тогда для функции f, локально интегрируемой в Ω, функция $f(\gamma(y))$ локально интегрируема в Ω' и для основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$

$$\int\limits_{\Omega'} f(\gamma(y))\,\varphi(y)\,dy = \int\limits_{\Omega} f(x)\,\varphi(\gamma^{-1}(x))\,\left|\det(\partial\gamma^{-1}(x))\right|dx.$$

Мы видим, что функция $f(\gamma(y))$ определяет обобщенную функцию в $\mathcal{D}(\Omega')^*$, причем действие этой обобщенной функции можно определить через обобщенную функцию f в соответствии с формулой

$$\langle f\circ\gamma,\, \varphi\rangle = \left\langle f,\, \varphi\circ\gamma^{-1}\cdot|\det(\partial\gamma^{-1}(x))|\right\rangle.$$

Пример 5.5. Используя функцию $\delta(x)$, путем параллельного переноса можно ввести функцию $\delta(x-x_0)$, значение которой на основной функции φ есть значение функции φ в точке x_0.

Отметим равенство $\delta(-x)=\delta(x)$, которое можно трактовать как четность δ. Аналогично можно ввести понятие нечетной функции.

Отметим также равенство $\delta(\alpha x) = \dfrac{1}{\alpha}\delta(x)$, $\alpha > 0$.

Операции над обобщенными функциями. Поскольку обобщенные функции образуют линейное пространство, их можно складывать и умножать на числа. Можно также ввести операцию умножения обобщенных функций на гладкие функции. Правило, как и выше, получим на локально интегрируемых функциях.

Если f локально интегрируема в Ω, $g \in C^\infty(\Omega)$, то

$$\langle fg,\, \varphi\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)\,g(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle f,\, g\varphi\rangle.$$

Поэтому для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ можно определить функционал

$$\langle fg,\, \varphi\rangle = \langle f,\, g\varphi\rangle.$$

Этот функционал есть композиция непрерывного линейного оператора $\varphi \to g\varphi$ и непрерывного функционала f. Поэтому он есть обобщенная функция. Эта функция и называется произведением обобщенной функции f на (гладкую) обобщенную функцию g.

Пример 5.6. а. Умножение δ-функции на гладкую функцию $a(x)$ равносильно умножению на число $a(0)$.

б. Имеет место равенство $x\,\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = 1$. Действительно,

$$\left\langle x\,\mathcal{P}\frac{1}{x},\, \varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\, x\varphi\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \langle 1,\, \varphi\rangle.$$

Дифференцирование обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций можно определить по тому же принципу, что и умножение на гладкую функцию.

Если f m раз непрерывно дифференцируема в Ω, то для любого мультииндекса α с $|\alpha| \leqslant m$ и любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \partial^\alpha f(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} f(x)\,\partial^\alpha\varphi(x)\,dx. \tag{5.4}$$

Равенство достаточно установить для частных производных 1-го порядка. Интеграл можно распространить на все пространство $\mathbb{R}^n$, считая, что функция φ вне Ω равна нулю.

Равенство (5.4) можно взять за основу для определения частных производных обобщенной функции. А именно, под производной $\partial^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ будем понимать функционал, определяемый равенством

$$\langle \partial^\alpha f,\, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f,\, \partial^\alpha \varphi\rangle\,.$$

Это равенство корректно определяет функционал на линейном пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$. Нам надо лишь убедиться в том, что этот функционал линейный и непрерывный. Линейность очевидна (вытекает из свойства линейности для производных). Непрерывность этого функционала вытекает из того, что он есть композиция непрерывного оператора дифференцирования и непрерывного исходного функционала.

Пример 5.7. а. Для δ-функции имеем $\left\langle \delta^{(k)},\, \varphi\right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta,\, \varphi^{(k)}\right\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$.

б. Рассмотрим функцию Хевисайда $\eta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\eta(x) = 0$ при $x < 0$. Она определяет функционал

$$\langle \eta,\, \varphi\rangle = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\, dx.$$

Производная функции Хевисайда — это функционал

$$\langle \eta',\, \varphi\rangle = -\langle \eta,\, \varphi'\rangle = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0).$$

Мы видим, что производной функции Хевисайда является δ-функция.

Пример 5.8. Пусть функция $f(x)$, определенная на числовой оси, абсолютно интегрируема. Тогда она дифференцируема почти всюду, ее производная $f'(x)$ (определенная почти всюду), суммируема и верна формула Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Для такой функции есть два понятия производной: обычной и производная как обобщенной функции. Оказывается, два этих варианта совпадают. Действительно, произведение абсолютно непрерывных функций есть абсолютно непрерывная функция. Отсюда вытекает, что можно применять интегрирование по частям и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\, dx = f(x)\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\, dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\, dx.$$

Полученное равенство с точки зрения обобщенных функций означает, что

$$\langle f',\, \varphi\rangle = -\langle f,\, \varphi'\rangle\,,$$

т.е. действие локально интегрируемой функции f' представляет собой действие производной (регулярной) обобщенной функции f.

Далее обозначение ∂f будет использовать для производной функции f как обобщенной функции, а обозначение f' — для обозначения обычной производной. Для абсолютно непрерывной функции $f(x)$ имеем

$$\partial f = f'.$$

Равенство здесь понимается как равенство почти всюду.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную всюду, кроме некоторого дискретного множества точек (под дискретным множеством понимается счетное множество, не имеющее предельных точек), которые могут быть точками разрыва 1-го рода. Пусть это множество есть последовательность $\{x_k\}$ и пусть в точке x_k скачок функции равен h_k. Предположим сначала, что $x_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} h_k \eta(x - x_k). \tag{5.5}$$

Ряд справа сходится поточечно, так как для любого x лишь конечное число точек x_k находятся левее x и, следовательно, в ряде лишь конечное число ненулевых слагаемых. Функция $g(x)$ не имеет скачков и в силу непрерывной дифференцируемости всюду, кроме точек x_k, является абсолютно непрерывной. Значит, $\partial g = g'$. Так как функция Хевисайда имеет нулевую обычную производную, то $f' = g'$. Но обобщенная производная ряда в (5.5) ненулевая:

$$\partial\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} h_k \eta(x - x_k)\Bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \partial\eta(x - x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \delta(x - x_k). \tag{5.6}$$

Таким образом, обобщенная производная функции $f(x)$ оказывается регулярной, причем

$$\partial f(x) = g'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \delta(x - x_k)$$

Замечание 5.3. Необходимо обосновать корректность равенств (5.6). Также необходимо рассмотреть случай, когда последовательность $\{x_k\}$ сходится к $-\infty$ или «разбегается» в обе стороны.

Теорема 5.6. Отображение ∂^α: $\mathcal{D}(\Omega)^* \to \mathcal{D}(\Omega)^*$, ставящее каждой обобщенной функции в соответствие ее производную мультииндекса α, есть линейный непрерывный оператор.

◀ Линейность отображения вытекает из соотношений

$$\langle \partial^\alpha(pf + qg),\, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle pf + qg,\, \partial^\alpha\varphi\rangle =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} p \langle f,\, \partial^\alpha\varphi\rangle + (-1)^{|\alpha|} q \langle g,\, \partial^\alpha\varphi\rangle = p \langle \partial^\alpha f,\, \varphi\rangle + q \langle \partial^\alpha g,\, \varphi\rangle .$$

Докажем непрерывность этого отображения, т.е. если $f_n \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)^*$, то и $\partial^\alpha f_n \to 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)^*$. Другими словами, если для любого φ верно $\langle f_n,\, \varphi\rangle \to 0$, то для любого ψ верно $\langle \partial^\alpha f_n,\, \psi\rangle \to 0$. Выбрав произвольную основную функцию ψ, заключаем, что $\langle \partial^\alpha f_n,\, \psi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_n,\, \partial^\alpha\psi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_n,\, \varphi\rangle \to 0$, где $\varphi = \partial^\alpha\psi$. ▶

Рассмотрим другие свойства операции дифференцирования.

Свойство 5.1. Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

◀ Утверждение вытекает из того, что оно верно для основных функций: дифференциальные операторы перекидываем с обобщенной функции на основную, меняем их порядок и возвращаем обратно. ▶

Независимость результата от порядка дифференцирования приводит к формуле

$$\partial^\alpha\partial^\beta = \partial^\beta\partial^\alpha = \partial^{\alpha+\beta},$$

где мультииндексы складываются покомпонентно.

Свойство 5.2. Для операции дифференцирования верна формула Лейбница: если $f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $g \in C^\infty(\Omega)$, то

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

◀ Согласно определению производной

$$\langle \partial_{x_i}(fg),\, \varphi\rangle = -\langle fg,\, \partial_{x_i}\varphi\rangle = -\langle f,\, g\partial_{x_i}\varphi\rangle$$

(здесь через ∂_{x_i} обозначен оператор частного дифференцирования по переменной x_i). Так как $\partial_{x_i}(g\varphi) = g\partial_{x_i}\varphi + \varphi\partial_{x_i}g$, то

$$\begin{aligned} -\langle f,\, g\partial_{x_i}\varphi\rangle = -\langle f,\, \partial_{x_i}(g\varphi)\rangle + \langle f,\, \varphi\partial_{x_i}g\rangle = \langle \partial_{x_i}f,\, g\varphi\rangle + \langle f\partial_{x_i}g,\, \varphi\rangle = \\ = \langle g\partial_{x_i}f,\, \varphi\rangle + \langle f\partial_{x_i}g,\, \varphi\rangle = \langle g\partial_{x_i}f + f\partial_{x_i}g,\, \varphi\rangle. \end{aligned}$$ ▶

Свойство 5.3. Если обобщенная функция $f \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ равна нулю в области $G \subset \Omega$, то и ее производная равна нулю в этой области.

◀ Из равенства

$$\langle \partial^\alpha f,\, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f,\, \partial^\alpha\varphi\rangle$$

вытекает, что обобщенная функция обращается в нуль на всех пробных функциях, носитель которых содержится в G. Поэтому $\partial^\alpha f = 0$ в G. ▶

Первообразная обобщенной функции. Остановимся на случае $n = 1$ и для простоты полагаем $\Omega = \mathbb{R}$. Первообразной обобщенной функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ называется обобщенная функция $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, удовлетворяющая условию $F' = f$.

Очевидно, что, добавив к первообразной постоянную, получим другую первообразную данной функции, поскольку

$$\langle (F+C)',\, \varphi\rangle = -\langle F+C,\, \varphi'\rangle = -\langle F,\, \varphi'\rangle - C\langle 1,\, \varphi'\rangle = \langle F',\, \varphi\rangle + C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi'(x)\,dx = \langle F',\, \varphi\rangle.$$

Возникают вопросы: 1) все ли первообразные данной обобщенной функции отличаются друг от друга постоянной: 2) какие обобщенные функции имеют первообразные.

Если $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ — первообразная функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$, то, согласно формуле дифференцирования

$$\langle f,\, \varphi\rangle = \langle F',\, \varphi\rangle = -\langle F,\, \varphi'\rangle.$$

Мы получили формулу

$$\langle F,\, \varphi'\rangle = -\langle f,\, \varphi\rangle,$$

определяющую действие первообразной (если она существует) на всех основных функциях, которые являются производными основных функций.

Вопрос, когда основная функция есть производная некоторой основной функции? Ответ: когда интеграл от основной функции равен нулю. Действительно, рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(x)\,dx.$$

Если $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,\, R]$, то функция ψ равна нулю на $(-\infty,\, -R)$ и постоянна на интервале $(R,\, \infty)$. Чтобы функция ψ была основной достаточно, чтобы $\psi(x) = 0$ при $x \in (R,\, \infty)$. А это обеспечивается соотношением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx = 0.$$

Как обойти это ограничение?

Выберем некоторую функцию $u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, для которой интеграл вдоль числовой прямой равне единице, что можно записать в виде $\langle 1,\, u_0\rangle = 1$. Для этого достаточно остановиться на «шапочке». Для произвольной основной функции φ рассмотрим функцию $\psi = \varphi - \lambda u_0$, подобрав постоянную λ так, что интеграл от ψ равен нулю. Тогда

$$0 = \langle 1,\, \psi\rangle = \langle 1,\, \varphi\rangle - \lambda \langle 1,\, u_0\rangle = \langle 1,\, \varphi\rangle - \lambda.$$

Видно, что $\lambda = \langle 1,\, \varphi\rangle$ — интеграл основной функции φ вдоль числовой оси. В результате получили функцию $\psi = \varphi - \langle 1,\, \varphi\rangle\, u_0$, являющуюся производной некоторой основной функции Ψ. Если F — первообразная функции f, то

$$\langle F,\, \varphi\rangle = \langle F,\, \lambda u_0\rangle + \langle F,\, \varphi - \lambda u_0\rangle = \lambda \langle F,\, u_0\rangle + \langle F,\, \psi\rangle = \langle F,\, u_0\rangle \langle 1,\, \varphi\rangle - \langle f,\, \Psi\rangle\,. \tag{5.7}$$

Формула (5.7) позволяет восстановить действие первообразной на любой основной функции при известном действии этой первообразной на выбранной функции u_0. Полагая $\langle F,\, u_0\rangle = C$, получаем

$$\langle F,\, \varphi\rangle = C \langle 1,\, \varphi\rangle - \langle f,\, \Psi\rangle\,. \tag{5.8}$$

Постоянную C можно на самом деле менять, получая разные первообразные функции. Однако возникает вопрос: всегда ли формула (5.7) определяет линейный непрерывный функционал, а если не всегда, то при каких условиях? Эти условия — суть условия существования первообразной.

Теорема 5.7. Любая обобщенная функция f имеет первообразную F и всякая первообразная описывается формулой $F + C$, $C = \mathrm{const}$.

◀ Как показано, любая первообразная данной функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^*$ может быть записана в виде (5.8) с некоторой постоянной C. Пусть F_1 и F_2 — две первообразные функции F. Тогда

$$\langle F_1 - F_2,\, \varphi\rangle = \langle F_1,\, \varphi\rangle - \langle F_1,\, \varphi\rangle = \big(C_1 \langle 1,\, \varphi\rangle - \langle f,\, \Psi\rangle\big) - \big(C_2 \langle 1,\, \varphi\rangle - \langle f,\, \Psi\rangle\big) = (C_1 - C_2) \langle 1,\, \varphi\rangle\,,$$

т.е. разность первообразных совпадает с постоянной $C_1 - C_2$.

Покажем, что при любой постоянной C формула (5.8) определяет обобщенную функцию F, которая является первообразной функции f.

Проверяем линейность F. Выбираем произвольные основные функции φ_1, φ_2, по ним определяем $\psi_i = \varphi_i - \langle 1,\, \varphi_i\rangle\, u_0$, $i = 1,\, 2$, и находим соответствующие первообразные Ψ_1, Ψ_2. Функции $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ будет соответствовать функция

$$\psi = (a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) - \langle 1,\, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle\, u_0 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 - a_1 \langle 1,\, \varphi_1\rangle\, u_0 - a_2 \langle 1,\, \varphi_2\rangle\, u_0 = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$$

и ее первообразная

$$\Psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(\xi)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{x} \big(a_1\psi_1(\xi) + a_2\psi_2(\xi)\big)\, d\xi = a_1 \int\limits_{-\infty}^{x} \psi_1(\xi)\, d\xi + a_2 \int\limits_{-\infty}^{x} \psi_2(\xi)\, d\xi = a_1\Psi_1(x) + a_2\Psi(x).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}\langle F,\, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle &= C \langle 1,\, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2\rangle - \langle f,\, a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2\rangle = \\ &= a_1 C \langle 1,\, \varphi_1\rangle + a_2 C \langle 1,\, \varphi_2\rangle - a_1 \langle f,\, \Psi_1\rangle - a_2 \langle f,\, \Psi_2\rangle = a_1 \langle F,\, \varphi_1\rangle + a_2 \langle F,\, \varphi_2\rangle\,,\end{aligned}$$

Что доказывает линейность функционала F.

Пусть $\varphi_n \xrightarrow{D} 0$. Тогда $\langle 1,\, \varphi_n\rangle \to 0$, откуда $\psi_n = \varphi_n - \langle 1,\, \varphi_n\rangle\, u_0 \xrightarrow{D} 0$ и $\Psi_n \xrightarrow{D} 0$. Следовательно, $\langle F,\, \varphi_n\rangle \to 0$, т.е. F — непрерывный функционал.

Наконец,

$$\langle F',\, \varphi\rangle = -\langle F,\, \varphi'\rangle = -C \langle 1,\, \varphi'\rangle + \langle f,\, \varphi\rangle = \langle f,\, \varphi\rangle\,,$$

т.е. $F' = f$. ▶

5.4. Свертка обобщенных функций

Прямое произведение и его свойства. Определение. Свойства. Существование свертки. Регуляризация

Прямое произведение функций. Вводится формулой

$$\langle f \times g,\, \varphi\rangle = \langle f,\, \langle g,\, \varphi\rangle_y\rangle_x,$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$, $f \in \mathcal{D}(X)^*$, $g \in \mathcal{D}(Y)^*$.

Лемма 5.5. Пусть функция φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема. Тогда функция

$$\Delta_n\varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}{x^n}$$

также бесконечно дифференцируема.

◀ Отметим, что функция $\Delta_n\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема во всех точках $x \neq 0$, а в точке $x = 0$ она непрерывна, поскольку, согласно правилу Лопиталя, примененному n раз,

$$\lim_{x\to 0} \Delta\varphi_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{n)}(x)}{n!} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Утверждение леммы достаточно доказать для случая $n = 1$, поскольку

$$\Delta_{n+1}\varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}{x^{n+1}} = \frac{1}{x}\left(\frac{\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}{x^n} - \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\right) = \frac{\Delta_n\varphi(x) - \Delta_n\varphi(0)}{x},$$

т.е. общий случай получается многократным применением случая $n = 1$.

Используем тот факт, что если для дифференцируемой при $x \neq 0$ и непрерывной в точке $x = 0$ функции $f(x)$ существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = a$, то функция $f(x)$ дифференцируема и при $x = 0$, причем $f'(0) = a$. Поэтому, чтобы доказать, что $\Delta_1\varphi(x)$ является гладкой, достаточно доказать существование предела в нуле каждой производной этой функции.

Не ограничивая общности, можем считать, что $\varphi(0) = 0$. Тогда $\Delta_1\varphi(x) = x^{-1}\varphi(x)$ и, согласно формуле бинома Ньютона,

$$\big(\Delta_1\varphi(x)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^{-1})^{(n-k)} \varphi^{(k)}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} (n-k)!\, x^{-(n-k)-1}\, \varphi^{(k)}(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!\,(-1)^{n-k}}{k!}\, x^k\, \varphi^{(k)}(x)}{x^{n+1}}.$$

Используя правило Лопиталя, находим:

$$\lim_{x\to 0}\big(\Delta_1\varphi(x)\big)^{(n)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n!\,(-1)^{n-k}}{(k-1)!}\, x^{k-1}\, \varphi^{(k)}(x) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!\,(-1)^{n-k}}{k!}\, x^k\, \varphi^{(k+1)}(x)}{(n+1)x^n} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n!\,(-1)^{n-k}}{(k-1)!}\, x^{k-1}\, \varphi^{(k)}(x) + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{n!\,(-1)^{n-k+1}}{(k-1)!}\, x^{k-1}\, \varphi^{(k)}(x)}{(n+1)x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi^{(n+1)}(x)}{n+1} = \frac{\varphi^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Таким образом, первая производная функции $\Delta_1\varphi(x)$ в нуле существует и непрерывна, производная функции $\big(\Delta_1\varphi(x)\big)'$ в нуле существует и непрерывна и т.д. Следовательно, функция $\Delta_1\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема на числовой оси. ▶

Теорема 5.8. Пусть $g \in \mathcal{D}(Y)^*$, $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$. Тогда $\langle g,\ \varphi\rangle \in \mathcal{D}(X)$.

◀ Суть проблемы здесь в следующем. Функция φ для каждого $x \in X$ является пробной по переменной y, так что $\langle g,\ \varphi\rangle$ представляет собой функцию переменного x. Однако вопрос, является ли она гладкой и является ли ее носитель компактным.

Рассмотрим функцию

$$\psi_{h,i}(x,y) = \frac{\varphi(x + h\boldsymbol{e}_i, y) - \varphi(x,y)}{h}$$

($\boldsymbol{e}_i$ — i-й базисный вектор по группе переменных x). Согласно лемме 5.5, эта функция бесконечно дифференцируема. Для значений $h \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)$ для достаточно малого ε функции $\psi_{h,i}(x,y)$ имеют носители в компактном множестве $\overline{K}_\varepsilon \subset X \times Y$, где $K = \operatorname{supp}\varphi$. По теореме Лагранжа

$$\psi_{h,i}(x,y) = \partial^{x_i}\varphi(x + \vartheta(y)h\boldsymbol{e}_i, y).$$

В силу равномерной непрерывности производной $\psi_{h,i} \to \partial^{x_i}\varphi$ при $h \to 0$ равномерно на Y. Аналогично можно показать, что $\partial_y^\beta\psi_{h,i} \rightrightarrows \partial^{x_i}\partial_y^\beta\varphi$ в $\overline{K}_\varepsilon$, где ∂_y^β — какое-либо дифференцирование по группе переменных y. Это означает, что $\psi_{h,i} \to \partial^{x_i}\varphi$ при $h \to 0$ в $\mathcal{D}(Y)$. Так как функционал g непрерывен, $\langle g,\ \psi_{h,i}\rangle \to \langle g,\ \partial^{x_i}\varphi\rangle$ при $h \to 0$. Это означает, что

$$\frac{\langle g,\ \varphi(x + h\boldsymbol{e}_i, y)\rangle - \langle g,\ \varphi(x,y)\rangle}{h} \to \langle g,\ \partial^{x_i}\varphi\rangle$$

при $h \to 0$, т.е. верна формула $\partial^{x_i}\langle g,\ \varphi\rangle = \langle g,\ \partial^{x_i}\varphi\rangle$. Применяя ее многократно по разным переменным, заключаем, что

$$\partial_x^\alpha\langle g,\ \varphi\rangle = \langle g,\ \partial_x^\alpha\varphi\rangle\,, \tag{5.9}$$

где ∂_x^α — какое-либо дифференцирование по группе переменных x. В частности, $\langle g,\ \varphi\rangle$ — гладкая функция с компактным носителем в X. ▶

Теорема 5.9. Для любых $f \in \mathcal{D}(X)^*$ и $g \in \mathcal{D}(Y)^*$ верно равенство

$$\langle f,\ \langle g,\ \varphi\rangle_y\rangle_x = \langle g,\ \langle f,\ \varphi\rangle_x\rangle_y.$$

◀ Если $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$, то

$$\langle f,\ \langle g,\ \varphi\rangle_y\rangle_x = \langle f,\ \langle g,\ \varphi_1(x)\varphi_2(y)\rangle_y\rangle_x = \langle f,\ \varphi_1(x)\langle g,\ \varphi_2(y)\rangle_y\rangle_x = \langle f,\ \varphi_1(x)\rangle_x\langle g,\ \varphi_2(y)\rangle_y.$$

Ту же формулу получаем и при другом порядке функционалов.

Любую функцию $\varphi \in \mathcal{D}(X\times Y)$ можно аппроксимировать линейными комбинациями пробных функций рассмотренного вида. Действительно, пусть K_x и K_y — компакты, являющиеся проекциями компакта $\operatorname{supp}\varphi$ на области X и Y соответственно. Тогда $\operatorname{supp}\varphi \subset K_x \times K_y$. Можно выбрать настолько малое $\varepsilon > 0$, что компакты $K_{x,\varepsilon}$ и $K_{y,\varepsilon}$, полученные замыканием ε-окрестностей K_x и K_y, будут целиком лежать в X и Y соответственно. Обозначим $K_\varepsilon = K_{x,\varepsilon} \times K_{y,\varepsilon}$. Для любого $\delta > 0$ и любого $k \in \mathbb{N}$ можно построить многочлен $p(x,y)$, для которого

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k}\ \sup_{(x,y)\in K_\varepsilon} |\partial^\alpha p(x,y) - \partial^\alpha\varphi(x,y)| < \delta.$$

Для этого надо выбрать мультииндекс $\alpha_0 = (k,\ k,\ \ldots,\ k)$, содержащий в себе все мультиндексы α с $|\alpha| \leqslant k$, аппроксимировать его многочленом согласно теореме Стоуна — Вейерштрасса (любая функция непрерывная на компакте в $\mathbb{R}^n$ равномерно аппроксимируется на этом компакте многочленом). Тогда все нужные производные аппроксимируются одновременно согласно теореме об оценке интеграла. Используя диагональный процесс, можно получить последовательность многочленов $p_n(x,y)$, для которых $\partial^\alpha p_n \rightrightarrows \varphi$ в K_ε для любого мультииндекса α. Построим пробную функцию $\psi_x(x)$, равную 1 на K_x и 0 вне $K_{x,\varepsilon}$ и аналогичную функцию $\psi_y(y)$ по группе переменных y. Функции $\tilde{p}_n(x,y) = p_n(x,y)\psi_x(x)\psi_y(y)$ являются пробными, представляются в виде линейных комбинаций функций с разделяющимися переменными и $\tilde{p}_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}(X \times Y)$. Переходя в равенстве

$$\langle f,\, \langle g,\, p_n\rangle_y\rangle_x = \langle g,\, \langle f,\, p_n\rangle_x\rangle_y$$

к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое равенство. ►

Установим свойства прямого произведения.

1. Операция $f \times g$ линейна и непрерывна по каждому из аргументов.

◄ Например,

$$\langle(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \times g,\, \varphi\rangle = \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2,\, (g,\, \varphi)\rangle = \\ = \alpha_1 \langle f_1,\, (g,\, \varphi)\rangle + \alpha_2 \langle f_2,\, (g,\, \varphi)\rangle = \alpha_1 \langle f_1 \times g,\, \varphi\rangle + \alpha_2 \langle f_2 \times g,\, \varphi\rangle . \qquad ►$$

2. Операция ассоциативна.

◄ Действие обобщенной функции $(f \times g) \times h$ следующее:

$$\langle (f \times g) \times h,\, \varphi\rangle = \langle f \times g,\, \langle h,\, \varphi\rangle\rangle = \langle f,\, \langle g,\, \langle h,\, \varphi\rangle\rangle\rangle .$$

Как уже доказано, $\langle h,\, \varphi\rangle$ и $\langle g,\, \langle h,\, \varphi\rangle\rangle$ являются пробными функциями. Далее ассоциативность следует из ассоциативности композиции отображений. ►

3. Дифференцирование $\partial_x^\alpha (f \times g) = (\partial_x^\alpha f) \times g$.

◄ В силу определения производной

$$\langle \partial_x^\alpha (f \times g),\, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle (f \times g),\, \partial_x^\alpha \varphi\rangle .$$

По определению прямого произведения

$$(-1)^{|\alpha|} \langle (f \times g),\, \partial_x^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f,\, \langle g,\, \partial_x^\alpha \varphi\rangle\rangle .$$

Согласно равенству (5.9) и определению производной

$$(-1)^{|\alpha|} \langle f,\, \langle g,\, \partial_x^\alpha \varphi\rangle\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f,\, \partial_x^\alpha \langle g,\, \varphi\rangle\rangle = \langle \partial_x^\alpha f,\, \langle g,\, \varphi\rangle\rangle = \langle (\partial_x^\alpha f) \times g,\, \varphi\rangle .$$

Итак, $\langle \partial_x^\alpha (f \times g),\, \varphi\rangle = \langle (\partial_x^\alpha f) \times g,\, \varphi\rangle$, что равносильно сформулированному свойству. ►

4. Умножение $a(x)(f \times g) = (a(x)f) \times g$.

◄ Аналогично доказательству предыдущего свойства:

$$\langle a(x)(f \times g),\, \varphi\rangle = \langle f \times g,\, a(x)\varphi\rangle = \langle f,\, \langle g,\, a(x)\varphi\rangle\rangle = \langle f,\, a(x)\langle g,\, \varphi\rangle\rangle = \\ = \langle a(x)f,\, \langle g,\, \varphi\rangle\rangle = \langle (a(x)f) \times g,\, \varphi\rangle . \qquad ►$$

5. Сдвиг $(f \times g)(x+h, y) = (f(x+h)) \times g$.

◄ Доказательство аналогично предыдущему. ►

6. Носитель: $\operatorname{supp}(f \times g) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$.

◄ Пусть $\operatorname{supp} f = K_x$, $\operatorname{supp} g = K_y$. Если $(x,\, y) \notin K_x \times K_y$, то либо $x \notin K_x$, либо $y \notin K_y$. Пусть первое. Тогда существует окрестность $O(x)$, не пересекающаяся с K_x. Рассмотрим открытое множество $U = O(x) \times Y$. Если $\operatorname{supp}\varphi \subset U$, то для любого y имеем $\operatorname{supp}\varphi(\cdot, y) \cap K_x = \varnothing$.

Поэтому для любого y верно равенство $\langle f,\ \varphi\rangle = 0$. Следовательно, $(f \times g,\ \varphi) = 0$. Тем самым доказано, что $f \times g = 0$ в U и что $(x,\ y) \notin \operatorname{supp}(f \times g)$.

Пусть $(x,\ y) \in K_x \times K_y$. Тогда $x \in K_x$, $y \in K_y$. Значит, для любой окрестности U_x точки x существует функция φ_x с $\operatorname{supp}\varphi_x \subset U_x$, для которой $\langle f,\ \varphi_x\rangle \neq 0$. Аналогично для любой окрестности U_y точки y существует функция φ_y с $\operatorname{supp}\varphi_y \subset U_y$, для которой $\langle g,\ \varphi_y\rangle \neq 0$. В произвольной окрестности U точки $(x,\ y)$ можно выбрать окрестность вида $U_x \times U_y$ и в ней функцию $\varphi(x,y) = \varphi_x(x)\,\varphi_y(y)$. В результате $\langle f \times g,\ \varphi\rangle = \langle f,\ \varphi_x\rangle\ \langle g,\ \varphi_y\rangle \neq 0$. Так как в любой окрестности точки $(x,\ y)$ есть пробная функция, на которой действие $f \times g$ ненулевое, заключаем, что $(x,\ y) \in \operatorname{supp}(f \times g)$. ►

Если f и g локально интегрируемы, то их свертка (если существует), определяется формулой

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi.$$

Свертка существует, если:

1) f и g абсолютно интегрируемы в $\mathbb{R}^n$;

2) одна из функций f и g финитна в $\mathbb{R}^n$;

3) обе функции полуфинитны с одной стороны (т.е., например, $f(x) = 0$ при $x < -R$, где векторное неравенство покомпонентное).

Для распространения свертки на обобщенные функции рассмотрим произведение $\langle f * g,\ \varphi\rangle$:

$$\langle f * g,\ \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\,g(x-\xi)\,\varphi(x)\,d\xi =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\,d\xi \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-\xi)\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\,g(\eta)\,\varphi(\xi+\eta)\,d\xi d\eta.$$

Будем говорить, что ***последовательность*** $\boldsymbol{\psi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ ***исчерпывает*** $\mathbb{R}^n$, если:

– для любого компакта K существует такой номер N_K, что $\psi_k(x) = 1$ на K при $k \geqslant N_K$;

– для любого мультииндекса α последовательность $\partial^\alpha \psi_k$ равномерно ограничена в $\mathbb{R}^n$.

Если для любой исчерпывающей $\mathbb{R}^{2n}$ последовательности ψ_k существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \langle f \times g,\ \psi_k(x,y)\,\varphi(x+y)\rangle\,,$$

то этот предел не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. Он называется ***сверткой обобщенных функций***.

Пример 5.9. а. Автосвертка функции 1 не существует.

б. Свертка любой функции f с дельта-функцией существует и дает исходную функцию, т.е. $f * \delta = f$ для любой f.

Свойства свертки:

1) линейность;

2) коммутативность;

3) ассоциативность;

4) правило дифференцирования $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g)$;

5) правило сдвига $(S_h f) * g = S_h(f * g)$;

Эти свойства вытекают из свойств прямого произведения. Установим, например, коммутативность:

$$\langle f * g,\ \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f \times g,\ \psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f,\ \langle g,\ \psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle f,\ \langle g,\ \tilde\psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle_x\rangle_y = \lim_{n\to\infty} \langle g,\ \langle f,\ \tilde\psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x = \langle g * f,\ \varphi(x+y)\rangle\,.$$

В этой выкладке $\tilde\psi_n(x,y) = \psi_n(y,x)$, причем ясно, что если последовательность $\{\psi_n\}$ пробегает все возможные исчерпания, то и $\{\tilde\psi_n\}$ также пробегает все возможные исчерпания.

Также просто доказывается, например, свойство дифференцирования:

$$\langle \partial^\alpha(f*g),\ \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle f*g,\ \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lim_{n\to\infty}\langle f,\ \langle g,\ \psi_n(x,y)\,\partial_x^\alpha\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\lim_{n\to\infty}\langle f,\ \partial_x^\alpha\,\langle g,\ \psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\langle \partial_x^\alpha f,\ \langle g,\ \psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x = \langle(\partial^\alpha f)*g,\ \varphi\rangle\,.$$

Здесь тонкое место — вынос производной за пределы внутренней свертки с g. Можем записать

$$\partial_x^\alpha(\psi_n(x,y)\varphi(x+y)) = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} k_\beta\partial_x^\beta\psi_n(x,y)\,\partial_x^{\alpha-\beta}\varphi(x+y),$$

где в сумме $k_0 = 1$, а остальные коэффициенты для нас не важны. Отметим, что при фиксированном β функция $\partial^{\alpha-\beta}\varphi$ пробная, а последовательности $\psi_n(x,y)$ и $\psi_n(x,y) + \partial_x^\beta\psi_n(x,y)$ при $\beta\neq 0$ обе являются исчерпаниями. Пределы по этим исчерпаниям одинаковые, а значит в случае $\beta\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\langle f,\ \big\langle g,\ \partial_x^\beta\psi_n(x,y)\,\partial_x^{\alpha-\beta}\varphi(x+y)\big\rangle_y\rangle_x = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\langle f,\ \langle g,\ \psi_n(x,y)\,\partial_x^\alpha\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x = \lim_{n\to\infty}\langle f,\ \langle g,\ \partial_x^\alpha(\psi_n(x,y)\,\varphi(x+y))\rangle_y\rangle_x.$$

Теорема 5.10. Если g — финитная обобщенная функция, то для любой обобщенной функции f свертка $f*g$ существует. При этом свертка непрерывна по f и непрерывна по g в том смысле, что, например, если $g_k\to g$ и все носители g_k принадлежат одному компакту, то $f*g_k\to f*g$.

◄ Пусть $\operatorname{supp} g = K_y$ — компакт. Согласно определению, необходимо доказать, что для любой исчерпывающей последовательности $\{\psi_n\}$ последовательность $\langle f\times g,\ \psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle$ сходится. Отметим, что носитель функции $f\times g$ содержится в множестве $G_1 = \mathbb{R}^n\times K_y$, а носитель любой функции $\psi_n(x,y)\varphi(x+y)$ — в множестве $G_2 = \{(x,\ y)\colon x+y\in\operatorname{supp}\varphi\}$. Пересечение $K = G_1\cap G_2$ есть компакт (рис. 5.1). Поскольку последовательность $\{\psi_n\}$ исчерпывающая, существует такой индекс N, что $\psi_n(x,y) = 1$ на K при $n > N$. Но тогда при $n,\ m > N$ носитель функции $\psi_n(x,y) - \psi_m(x,y)$ не пересекается с K, а носитель функции $(\psi_n(x,y)-\psi_m(x,y))\varphi(x+y)$ — с G_1. Поэтому $\langle f\times g,\ (\psi_n(x,y)-\psi_m(x,y))\varphi(x+y)\rangle = 0$, откуда заключаем, что $\langle f\times g,\ \psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle = \langle f\times g,\ \psi_m(x,y)\varphi(x+y)\rangle$.

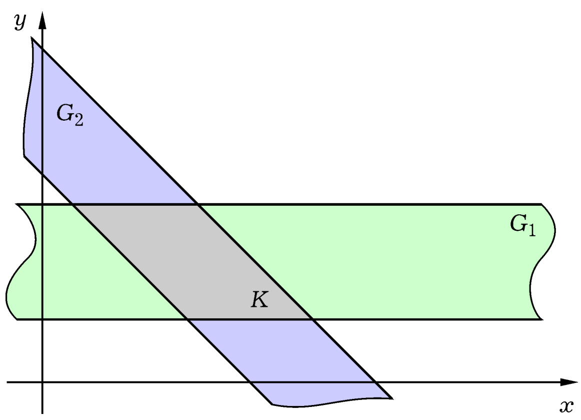

Рис. 5.1

Таким образом, последовательность $\langle f \times g,\ \psi_n(x,y)\varphi(x+y)\rangle$ начиная с номера N становится постоянной и, следовательно имеет предел. Поскольку этот предел существует для любой исчерпывающей последовательности $\{\psi_n\}$, согласно определению, свертка $f * g$ определена. ▶

Теорема 5.11. Если f и g — полуфинитные слева (справа) функции, то их свертка существует, причем она непрерывна по своим аргументам.

5.5. Обобщенные функции медленного роста

Пространство $\mathcal{S}$. Обобщенные функции медленного роста. Примеры.

Выбор пространства основных функций является ключевым для определения обобщенных функций, но этот выбор не является единственно возможным. Предложенный вариант является следствием баланса различных требований, вытекающих из того, какими свойствами должны обладать обобщенные функции.

Однако интересен еще один вариант пространства основных функций, важный с практической точки зрения.

Определим ***пространство основных функций*** $\mathcal{S}$, как множество гладких функций $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующему условию: для любого мультииндекса α и любого натурального числа k

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^k \partial^\alpha \varphi(x) = 0.$$

Это линейное пространство, обладающее семейством полунорм

$$\|\varphi\|_{\alpha,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big((1+|x|)^k |\partial^\alpha\varphi(x)|\big),$$

и сходимость $\varphi_n \to \varphi$ в этом пространстве означает, что для любых α и k

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\alpha,k} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Замечание 5.4. Полунорма — функция $p(x)$ на линейном пространстве, удовлетворяющая двум условиям: а) однородность $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$; б) неравенство треугольника $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. Из этих двух свойств вытекает, что $p(0) = 0$ и $p(x) \geqslant 0$ (неотрицательность). От нормы отличается тем, что свойство $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ не гарантируется.

Замечание 5.5. Семейство полунорм, определяющих топологию пространства $\mathcal{S}$, можно сократить и определенным образом упорядочить. Положим

$$\|\varphi\|_k = \max_{|\alpha|\leqslant k} \|\varphi\|_{\alpha,k} = \sup_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big((1+|x|)^k |\partial^\alpha\varphi(x)|\big).$$

Тогда сходимость последовательности $\{\varphi_n\}$ к элементу $\varphi \in \mathcal{S}$ равносильна выполнению условий

$$\|\varphi_n - \varphi\|_k \to 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

при $n \to \infty$.

Отметим, что все функции линейного пространства $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ содержатся в $\mathcal{S}$, причем, если $\varphi_n \to \varphi$ в $\mathcal{D}$, то та же сходимость есть и в $\mathcal{S}$. Действительно, сходимость в $\mathcal{D}$ означает, что носители всех функций содержатся в некотором компакте K. Поэтому

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\alpha,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big((1+|x|^k)|\partial^\alpha\varphi_n(x) - \partial^\alpha\varphi(x)|\big) \leqslant \sup_{x\in K}(1+|x|^k) \sup_{x\in K} |\partial^\alpha\varphi_n(x) - \partial^\alpha\varphi(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$.

В силу доказанного $\mathcal{D}$ можно рассматривать как линейное многообразие в $\mathcal{S}$. Это многообразие всюду плотно в $\mathcal{S}$, т.е. любую функцию в $\mathcal{S}$ можно аппроксимировать функциями из $\mathcal{D}$ в топологии $\mathcal{S}$.

Соответственно, каждый непрерывный линейный функционал в $\mathcal{S}$ оказывается линейным непрерывным функционалом и в $\mathcal{D}$, т.е. сопряженное пространство $\mathcal{S}^*$ оказывается подпространством $\mathcal{D}^*$ в том смысле, что последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{S}^*$, сходящаяся к некоторой функции $f \in \mathcal{S}^*$, сходится к той же функции и в $\mathcal{D}^*$.

Линейное пространство $\mathcal{S}$ с введенной топологией называется ***пространством Шварца***. Элементы линейного пространства $\mathcal{S}^*$, наделенного топологией слабой сходимости, называются ***обобщенными функциями медленного роста***.

Пример 5.10. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ локально интегрируема и в бесконечности растет не быстрее многочлена, т.е. для некоторого $k > 0$ выполняется условие

$$\lim_{x\to\infty} |x|^{-k}|f(x)| = 0.$$

Тогда функция

$$g(x) = \frac{f(x)}{1+|x|^{k+2}}$$

является абсолютно интегрируемой. Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

сходится для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}$, определяя тем самым линейный функционал на пространстве $\mathcal{S}$. Этот функционал непрерывен, так как при $\varphi_n \to 0$, $n \to \infty$, имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl((1+|x|^{k+2})|\varphi(x)|\bigr)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(x)|}{1+|x|^{k+2}}\,dx \to 0, \quad n \to 0.$$

Таким образом, любая локально интегрируемая функция, в бесконечности растущая не быстрее полинома, порождает обобщенную функцию медленного роста. Выкладки проведены в одномерном случае, но их несложно распространить на многомерный случай. При этом надо лишь учесть, что в $\mathbb{R}^n$ абсолютно интегрируемой является функция $f(x) = (1+|x|)^{-n-1}$.

Как и в общем случае, регулярные обобщенные функции медленного роста будет отождествлять с соответствующими обычными локально интегрируемыми функциями.

Пример 5.11. Любая финитная обобщенная функция является обобщенной функцией медленного роста. Действительно, достаточно показать, что функционал $\langle f,\, \varphi\rangle$, определенный на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, продолжается на пространство $\mathcal{S}$, сохраняя свойство непрерывности.

Пусть $\operatorname{supp} f \subset K$, $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Выберем финитную пробную функцию $\psi(x)$, которая на K равна 1. Пусть $\varphi_n \in \mathcal{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{S}$. Положим $\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x)\,\psi(x)$. В силу финитности f (точнее, условия $\operatorname{supp} f \subset K$) имеем

$$\langle f,\, \varphi_n\rangle = \langle f,\, \tilde{\varphi}_n\rangle\,.$$

При этом $\tilde{\varphi}_n \to 0$ в $\mathcal{S}$, поскольку $\partial^\alpha\tilde{\varphi}_n$ выражается в виде конечной линейной комбинации производных $\partial^\beta\varphi_n$ с коэффициентами, не зависящими от n, а значит $\partial^\alpha\tilde{\varphi}_n \to 0$ равномерно. При этом $\operatorname{supp}\tilde{\varphi}_n \subset \operatorname{supp}\psi$. В результате заключаем, что $\tilde{\varphi}_n \to 0$ в $\mathcal{D}$. Значит, $\langle f,\, \varphi_n\rangle \to 0$ при $n \to \infty$.

Итак, показано, что обобщенная функция f есть линейный функционал, определенный на $\mathcal{D}$, но непрерывный в топологии объемлющего пространства $\mathcal{S}$. Многообразие $\mathcal{D}$ всюду плотно в

$\mathcal{S}$. Поэтому линейный функционал f имеет единственное продолжение на все $\mathcal{S}$, которое будет непрерывным линейным функционалом, т.е. обобщенной функцией медленного роста.

В частности, δ-функция и все ее производные являются обобщенными функциями медленного роста. #

Непрерывность линейного функционала, как и в случае нормированных пространств, связано с понятием ограниченности.

Теорема 5.12 (Л. Шварц). Линейный функционал f на линейном пространстве $\mathcal{S}$ непрерывен тогда и только тогда, когда существуют такие натуральное k и постоянная C, что

$$|\langle f,\ \varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_k, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.10}$$

◄ По формальным признакам условие ограниченности по некоторой полунорме сильнее непрерывности. Пусть функционал f ограничен, т.е. для некоторой полунормы $\|\cdot\|_k$ имеет место условие (5.10), и последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}$ сходится к нулю. Последнее означает, что для каждого k выполняется условие $\|\varphi_n\|_k \to 0$. В силу условия (5.10) имеем $|\langle f,\ \varphi\rangle| \to 0$.

Доказательство в обратную сторону использует свойства линейности функционала и свойства полунорм. Непрерывность функционала означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие k и $\delta > 0$, что при $\|\varphi\|_k < \delta$ имеем* $|\langle f,\ \varphi\rangle| < \varepsilon$. Выберем произвольное ε и по ним выберем δ и k. Для произвольной основной функции φ существует такое число λ, что $\|\lambda\varphi\|_k < \delta$. Тогда $|\langle f,\ \lambda\varphi\rangle| < \varepsilon$, откуда $|\langle f,\ \varphi\rangle| < \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$. В качестве λ можно выбрать $\lambda = \dfrac{\delta}{2\|\varphi\|_k}$. При этом выборе получаем

$$|\langle f,\ \varphi\rangle| < \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{2\varepsilon}{\delta}\|\varphi\|_k.$$

В результате доказано выполнение условия (5.10) с $C = \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$. ►

На обобщенные функции медленного роста с некоторыми ограничениями переносятся операции для обобщенных функций:

1) преобразование независимой переменной;

2) линейные операции;

3) умножение на гладкую функцию (возможно лишь в случае, если гладкая функция есть функция медленного роста);

4) дифференцирование (эта операция непрерывна в $\mathcal{S}^*$);

5) прямое произведение;

6) свертка.

Понятие обобщенной функции медленного роста позволяет установить структуру обобщенной функции с точечным носителем.

Теорема 5.13. Если $f \in \mathcal{D}$ и $\operatorname{supp} f = \{0\}$, то она имеет, и притом единственное, представление

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} C_\alpha \partial^\alpha \delta(x).$$

◄ Отметим, что обобщенная функция f с точечным носителем является финитной, а потому функцией медленного роста. Поэтому в качестве основных можно рассматривать функции пространства $\mathcal{S}$. Выберем основную функцию $\mu(x)$, которая вне шара $|x| \leqslant 1$ равна нулю, а в шаре $|x| \leqslant 1/2$ равна 1. Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\langle f,\ \varphi\rangle = \langle f,\ \mu(\lambda x)\varphi\rangle + \langle f,\ (1-\mu(\lambda x))\varphi\rangle = \langle f,\ \mu(\lambda x)\varphi\rangle = \langle \mu(\lambda x) f,\ \varphi\rangle\,,$$

*Строго говоря, непрерывность означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $k_1, k_2, \ldots, k_m$ и $\delta > 0$, что при $\|\varphi\|_{k_j} < \delta$, $j = \overline{1,\, m}$, выполняется неравенство $|\langle f,\ \varphi\rangle| < \varepsilon$. Однако для любого k выполняется неравенство $\|\varphi\|_k \leqslant \|\varphi\|_{k+1}$. Следовательно, вместо конечного числа номеров k_j можно выбрать один — максимальный.

так как функция $1-\mu(\lambda x)$ имеет носитель, не содержащий точки 0. Непрерывность f означает, что для некоторых k и C выполняется условие (5.10). В силу этого условия

$$\left\langle x^\beta f,\, \varphi\right\rangle = \left\langle f,\, x^\beta \mu(\lambda x)\varphi\right\rangle \leqslant C\|x^\beta\mu(\lambda x)\varphi(x)\|_k.$$

Если $|\beta| > k$, то

$$\|x^\beta\mu(\lambda x)\varphi(x)\|_k = \sup_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{|x|\leqslant 1/\lambda}(1+|x|)^k\left|\partial^\alpha(x^\beta\mu(\lambda x)\varphi(x))\right| \leqslant \frac{C_1}{\lambda},$$

так как в силу условия $|\alpha| < |\beta|$ каждое слагаемое в производной будет содержать множитель x_j, а $|x_j| \leqslant |x| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$. Устремляя λ в бесконечность, заключаем, что

$$x^\beta f = 0 \quad \text{при} \quad |\beta| > k.$$

Рассмотрим произвольную пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ее можно представить в виде

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} C_\alpha \partial^\alpha\varphi(0)x^\alpha + \sum_{|\beta|=k+1} C_\beta x^\beta\psi_\beta(x).$$

Здесь первая сумма — многочлен Тейлора для разложения φ в нуле, а C_α — соответствующие коэффициенты Тейлора. Вторая сумма представляет собой специальную форму записи остатка в разложении Тейлора. Выберем, как выше пробную функцию $\mu(x)$. Тогда

$$\langle f,\, \varphi\rangle = \langle f,\, \mu\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant k} C_\alpha\partial^\alpha\varphi(0)\left\langle f,\, \mu(x)x^\alpha\right\rangle + \sum_{|\beta|=k+1} C_\beta\left\langle f,\, x^\beta\psi_\beta(x)\right\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\tilde{C}_\alpha\partial^\alpha\varphi(0),$$

где $\tilde{C}_\alpha = C_\alpha\left\langle f,\, \mu(x)x^\alpha\right\rangle$. Следовательно,

$$f = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\tilde{C}_\alpha(-1)^{|\alpha|}f_\alpha,$$

где действие функционала f_α описывается равенством

$$\langle f_\alpha,\, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(0) = \langle\partial^\alpha\delta,\, \varphi\rangle\,,$$

т.е. $f_\alpha = \partial^\alpha\delta$.

Полученное представление единственное. В самом деле, пусть

$$f = \sum_{|\alpha|\leqslant k} C_\alpha\partial^\alpha\delta, \quad g = \sum_{|\alpha|\leqslant k} C'_\alpha\partial^\alpha\delta$$

и наборы коэффициентов C_α и C'_α не совпадают. Выберем мультииндекс β максимального модуля, для которого $C_\beta \neq C'_\beta$. Рассмотрим пробную функцию $\varphi(x) = \mu(x)x^\beta$. Для этой функции имеем $\partial^\alpha\varphi(0) = 0$, если хотя бы по одному индексу $\alpha_i < \beta_i$, в частности, при $|\alpha| \leqslant |\beta|$ и $\alpha \neq \beta$. Кроме того, $\partial^\beta\varphi(0) = \beta!\mu(0) \neq 0$, где $\beta! = \beta_1!\beta_2!\ldots\beta_n!$ Значит,

$$\langle f-g,\, \varphi\rangle = (C_\beta - C'_\beta)\left\langle\partial^\beta\delta,\, \varphi\right\rangle = (C_\beta - C'_\beta)\beta!\mu(0) \neq 0,$$

т.е. обобщенные функции f и g не совпадают. ►

5.6. Преобразование Фурье обобщенных функций

Определение. Свойства: дифференцирование оригинала и изображения; смещение и запаздывание; теорема подобия; свертка. Примеры: функция Хевисайда, дельта-функция

Ранее уже было отмечено, что преобразование Фурье является взаимно однозначным на множестве гладких быстроубывающих функций, т.е. на линейном пространстве $\mathcal{S}$.

Теорема 5.14. Отображение $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ является непрерывным.

◀ Поскольку отображение $\mathcal{F}$ линейно, достаточно показать, что если $\varphi_n \to 0$, то $\mathcal{F}(\varphi_n) \to 0$. Доказательство для простоты проведем в одномерном случае.

Условие $\mathcal{F}(\varphi_n) \to 0$ означает, что

$$\sup_{m\leqslant k}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^k\bigl|\partial^{(m)}\mathcal{F}[\varphi_n](x)\bigr| \to 0, \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Нетрудно показать, что совокупность этих условий равносильна условиям

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl(x^k\partial^{(m)}\mathcal{F}[\varphi_n](x)\bigr) \to 0, \quad k,\, m\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Но

$$x^k\partial^{(m)}\mathcal{F}[\varphi_n](x) = x^k\mathcal{F}[(-it)^m\varphi_n(t)](x) = (-i)^{k+m}\mathcal{F}\bigl[\partial^{(k)}\bigl(t^m\varphi_n(t)\bigr)\bigr](x).$$

Функция $\partial^{(k)}\bigl(t^m\varphi_n(t)\bigr)$ представляет собой конечную линейную комбинацию функций $t^p\varphi_n^{(q)}(t)$, $p\leqslant m$, $q\leqslant k$. Докажем, что $t^p\varphi_n^{(q)}(t)\to 0$ при $n\to 0$ по норме пространства L^1. Выбрав значения p и q, отметим, что $(1+t^2)\bigl|t^p\varphi_n^{(q)}(t)\bigr|\leqslant c_n$, где

$$c_n = \sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl((1+|t|^2)|t^p\varphi_n^{(q)}(t)|\bigr) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl((1+|t|)^{p+2}|\varphi_n^{(q)}(t)|\bigr) \to 0$$

при $n\to 0$. Отсюда следует, что

$$\bigl|t^p\varphi_n^{(q)}(t)\bigr| \leqslant \frac{c_n}{1+t^2}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bigl|t^p\varphi_n^{(q)}(t)\bigr|\,dt \leqslant c_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} \to 0.$$

Таким образом, $\partial^{(k)}\bigl(t^m\varphi_n(t)\bigr)\to 0$ в $L_1(\mathbb{R})$, а $\mathcal{F}\bigl[\partial^{(k)}\bigl(t^m\varphi_n(t)\bigr)\bigr]\to 0$ равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно, $\mathcal{F}[\varphi_n]\to 0$ в $\mathcal{S}$. ▶

Наша задача — ввести преобразование Фурье на пространстве обобщенных функций медленного роста так, чтобы ограничение этого преобразования на $\mathcal{S}$ совпадало с обычным преобразованием Фурье быстроубывающих гладких функций. Проблема здесь вот в чем. Функции из $\mathcal{S}$ интерпретируются как обобщенные функции согласно формуле

$$\langle f,\, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{5.11}$$

Именно на основании этой формулы мы интерпретируем обычные функции как обобщенные. Однако преобразование Фурье заставляет переходить от действительного пространства $\mathcal{S}$ к аналогичному комплексному пространству (пространству над полем $\mathbb{C}$) комплекснозначных функций. А в этом случае формулу действия регулярной обобщенной функции (формулу (5.11)) тоже следует расширить на класс комплекснозначных функций. Здесь можно указать два способа такого расширения, а именно

$$\langle f,\, \varphi\rangle_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

(т.е. переносим имеющуюся формулу на комплексный случай без изменений) и

$$\langle f,\, \varphi\rangle_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx,$$

где действие $\langle f,\, \varphi\rangle_2$ совпадает со скалярным произведением $(\varphi,\, f)$ в пространстве L_2. Две разные интерпретации обычных функций как обобщенных дают два разных определения преобразования Фурье.

В первом случае для преобразования Фурье функций $f,\, g \in \mathcal{S}$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](x)\, \varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iyx}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-iyx}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathcal{F}[\varphi](x)\, dx,$$

т.е. имеет место формула

$$\langle \mathcal{F}[f],\, \varphi\rangle = \langle f,\, \mathcal{F}[\varphi]\rangle\,.$$

Выражение $\langle f,\, \mathcal{F}[\varphi]\rangle$ в силу непрерывности преобразования Фурье на $\mathcal{S}$ определяет на $\mathcal{S}$ непрерывный функционал, т.е. обобщенную функцию $\mathcal{F}[f]$, которую можно назвать преобразованием Фурье обобщенной функции f.

Во втором варианте вложения $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}^*$ получаем следующее.

Так как $\mathcal{F}$ — непрерывный автоморфизм линейного пространства $\mathcal{S}$, то определен сопряженный автоморфизм $\mathcal{F}^*$ сопряженного пространства согласно формуле

$$\langle \mathcal{F}^*[f],\, \varphi\rangle = \langle f,\, \mathcal{F}[\varphi]\rangle\,. \tag{5.12}$$

Замечание 5.6. Любой линейный оператор $A\colon U \to V$ из линейного пространства U в линейное пространство V определяет линейный оператор A^* из V^* в U^*, который каждому функционалу $h \in V^*$ ставит в соответствие функционал $A \circ h$ из U^*, т.е. по формуле $(A^*h)(x) = A(h(x))$. Эта формула в «форме скалярного произведения» и есть (5.12). Непрерывность A обеспечивает непрерывность A^* в слабых топологиях

Формула (5.12) через скалярное произведение записывается в виде

$$(\varphi,\, \mathcal{F}^*[f]) = (\mathcal{F}[\varphi],\, f)\,.$$

Согласно теореме Планшереля

$$(\mathcal{F}[\varphi],\, \mathcal{F}[f]) = (2\pi)^n\, (\varphi,\, f)\,,$$

откуда

$$(\varphi,\, \mathcal{F}^*\mathcal{F}[f]) = (\mathcal{F}[\varphi],\, \mathcal{F}[f]) = (2\pi)^n\, (\varphi,\, f)\,.$$

Так как $\varphi \in \mathcal{S}$ может выбираться произвольно, заключаем, что $\mathcal{F}^*\mathcal{F}[f] = 2\pi f$. Отсюда вытекает, что

$$\mathcal{F}^* = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1},$$

где (напомним)

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

Таким образом, сопряженное преобразование Фурье отличается от основного изменением знака в экспоненте:

$$\mathcal{F}^*[f](\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\omega x} dx.$$

В результате мы приходим к формуле

$$\langle \mathcal{F}[f],\, \varphi\rangle = \langle f,\, \mathcal{F}^*[\varphi]\rangle\,.$$

Как и в первом варианте, правая часть равенства определяет обобщенную функцию, которую можно назвать преобразованием Фурье обобщенной функции f. Для функций $f, \varphi \in \mathcal{S}$ эта формула принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\Bigl(\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iyx}dy}\Bigr)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{ixy}dx\Bigr)\overline{f(y)}\,dy.$$

В дальнейшем мы будем использовать 1-м вариант определения преобразования Фурье, т.е. полагаем

$$\langle \mathcal{F}[f[,\, \varphi\rangle = \langle f,\, \mathcal{F}[\varphi]\rangle\,.$$

Оператор $\mathcal{F}$, введенный этим равенством, называем ***преобразованием Фурье обобщенных функций медленного роста***. Отметим, что и в $\mathcal{S}^*$ преобразование Фурье является непрерывным линейным оператором.

Остановимся на одномерном случае. Для преобразования Фурье обобщенных функций сохраняются основные свойства:

1) теорема подобия $f(\alpha x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{|\alpha|}F\Bigl(\dfrac{\omega}{\alpha}\Bigr)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$;
2) теорема смещения $e^{i\lambda x}f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega-\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$;
3) теорема запаздывания $f(x-\alpha) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\alpha\omega}F(\omega)$, $\alpha\in\mathbb{R}$;
4) дифференцирование оригинала $f^{(k)}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^kF(\omega)$;
5) дифференцирование изображения $(-ix)^kf(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^{(k)}(\omega)$;
6) преобразование свертки $\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]$.

Доказательства этих свойств сводятся к перекидыванию преобразования Фурье и преобразования обобщенной функции на пробную функцию, изменения порядка на пробной функции и возвращении назад. Докажем, например, теорему подобия. Имеем

$$\langle \mathcal{F}[f(\alpha x)],\, \varphi\rangle = \langle f(\alpha x),\, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \Bigl\langle f(x),\, \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}[\varphi]\Bigl(\frac{x}{\alpha}\Bigr)\Bigr\rangle =$$
$$= \langle f(x),\, \mathcal{F}[\varphi(\alpha x)]\rangle = \langle \mathcal{F}[f],\, \varphi(\alpha x)\rangle = \Bigl\langle \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}[f]\Bigl(\frac{x}{\alpha}\Bigr),\, \varphi\Bigr\rangle.$$

В этих свойствах нет ограничений, кроме последнего (свертка существует не для любых обобщенных функций медленного роста).

На преобразование Фурье обычных функций накладываются серьезные ограничения. Для обобщенных функций эти ограничения снимаются. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5.12. Преобразование Фурье функции Хевисайда в обычном смысле не существует, но существует в обобщенном. Его вычисление проведем с помощью предельного перехода. Рассмотрим функцию $\eta(x)\,e^{-ax}$. От нее преобразование Фурье существует в обычном смысле. По формуле находим:

$$\mathcal{F}[\eta e^{-ax}](\omega) = \int\limits_0^\infty e^{-ax}e^{-i\omega x}dx = \int\limits_0^\infty e^{-(a+i\omega)x}dx = \frac{e^{-(a+i\omega)x}}{a+i\omega}\Bigg|_\infty^0 = \frac{1}{a+i\omega} = -\frac{i}{\omega-ia}.$$

Можно показать, что для любой функции $\varphi\in\mathcal{S}$

$$\lim_{a\to+0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\eta(x)e^{-ax}\varphi(x)\,dx = \lim_{a\to+0}\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\varphi(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$

Это означает, что $\eta(x)e^{-ax} \to \eta(x)$ при $a \to +0$ в $\mathcal{S}^*$. Переходя к пределу при $a \to +0$ (с учетом непрерывности $\mathcal{F}$ в $\mathcal{S}^*$), находим

$$\mathcal{F}[\eta](\omega) = -i \lim_{a\to 0} \frac{1}{\omega - ia} = -\frac{i}{\omega - i0}.$$

С помощью формул Сохоцкого получаем

$$\mathcal{F}[\eta](\omega) = -\frac{i}{\omega - i0} = \pi\delta(w) - i\,\mathcal{P}\frac{1}{\omega}\,.$$

Пример 5.13. Дельта-функция, как финитная, является функцией медленного роста. Найдем ее преобразование Фурье. Согласно определению

$$\langle \mathcal{F}[\delta],\, \varphi \rangle = \langle \delta,\, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\varphi(x)\,dx\Big|_{\omega=0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \langle 1,\, \varphi \rangle\,.$$

Следовательно, $\mathcal{F}[\delta] = 1$.

Полученный результат можно получить дифференцированием функции Хевисайда. Кроме того, можно учесть следующее. Дельта-функция является нейтральным элементом для свертки. При преобразовании Фурье свертка переходит в обычное произведение, так что единица свертки переходит в обычную единицу. #

5.7. Преобразование Лапласа обобщенных функций

С помощью преобразования Фурье обобщенных функций можно построить преобразование Лапласа обобщенных функций. Цель — снизить ограничение обобщенных функций медленного роста: даже обычные функции типа функции e^t нельзя отнести к обобщенным функциям медленного роста.

Рассмотрим множество $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}^*$ обобщенных функций, удовлетворяющих двум условиям:

1) $\operatorname{supp} f \subset [0,\, +\infty)$;

2) существует такое число σ, что функция $f(t)e^{-\sigma t}$ является функцией медленного роста.

Тогда для любого p, $\operatorname{Re} p > \sigma$, функция $f(t)e^{-pt}$ имеет преобразование Фурье, как функция медленного роста. Получаем обобщенную функцию, которая дополнительно зависит от параметра p. Замечательно то, что эта обобщенная функция регулярна и представляет собой аналитическую функцию.

Введем ***показатель роста*** — точную нижнюю грань σ_0 тех σ, для которых обобщенная функция $f(t)e^{-\sigma t}$ имеет медленный рост. Выберем произвольное значение $\sigma_1 > \sigma_0$ и пусть $\sigma > \sigma_1$. Тогда

$$\big\langle \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}],\, \varphi \big\rangle = \big\langle f(t)e^{-\sigma t},\, \mathcal{F}[\varphi] \big\rangle = \big\langle f(t)e^{-\sigma_1 t},\, h(t)\, e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\mathcal{F}[\varphi] \big\rangle\,,$$

где $h(t)$ — какая-либо гладкая функция, равная 1 при $t \geqslant 0$ и нулю при $t < -\delta$.

Функция $h(t)\, e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\mathcal{F}[\varphi](t)$ — гладкая быстроубывающая функция. Для нее имеем

$$h(t)\, e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\mathcal{F}[\varphi](t) = h(t)\, e^{-(\sigma-\sigma_1)t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, e^{-it\tau} d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\varphi(\tau)\, e^{-it\tau} d\tau = \big\langle 1,\, h(t)\, e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\varphi(\tau)\, e^{-it\tau} \big\rangle\,.$$

(свертка идет по τ, t рассматривается как параметр). Таким образом,

$$\left\langle \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}],\, \varphi \right\rangle = \left\langle f(t)e^{-\sigma_1 t},\, \left\langle 1,\, h(t)\, e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\varphi(\tau)\, e^{-it\tau} \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \left\langle 1,\, \left\langle f(t)e^{-\sigma_1 t},\, h(t)\, e^{-(\sigma+i\tau-\sigma_1)t}\varphi(\tau) \right\rangle \right\rangle = \left\langle 1,\, \left\langle f(t)e^{-\sigma_1 t},\, h(t)\, e^{-(\sigma+i\tau-\sigma_1)t} \right\rangle \varphi(\tau) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left\langle f(t)e^{-\sigma_1 t},\, h(t)\, e^{-(\sigma+i\tau-\sigma_1)t} \right\rangle,\, \varphi(\tau) \right\rangle.$$

Выражение

$$F(\sigma + i\tau) = \left\langle f(t)e^{-\sigma_1 t},\, h(t)\, e^{-(\sigma+i\tau-\sigma_1)t} \right\rangle$$

представляет собой функцию параметра p, причем аналитическую, поскольку ее по этому параметру можно дифференцировать. При этом

$$F(p) = \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}](\tau), \quad p = \sigma + i\tau, \quad \sigma > \sigma_1.$$

Ясно, что $F(p)$ от выбора σ_1 не зависит и определена в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Эта функция называется ***преобразованием Лапласа обобщенной функции*** $f(t)$.

На преобразование Лапласа обобщенных функций распространяются свойства обычного преобразования Лапласа (теоремы подобия, запаздывания, смещения, дифференцирования и интегрирования оригинала и свертки). Отметим особенность дифференцирования оригинала. Формула выглядит следующим образом:

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)$$

(здесь $f(t) \risingdotseq F(p)$). Различие возникает из-за трактовки скачков. В обычном преобразовании Лапласа скачки функции $f(t)$ не допускаются, если возможно говорить о производной. Исключением является точка 0, скачок в которой и компенсируется дополнительным слагаемым. Это слагаемое — не что иное, как преобразование Лапласа производной функции Хевисайда, т.е. дельта-функции, которая возникает в обобщенной производной.

6. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

6.1. Наводящие соображения

Линейные дифференциальные уравнения с линейными граничными и начальными условиями обладают следующим свойством. Запишем соответствующую задачу в виде операторного уравнения $Lu = f$. Если u_1 — решение задачи $Lu = f_1$, u_2 — решение задачи $Lu = f_2$, то $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ — решение задачи $Lu = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Формирование решения задачи на основе этого свойства разделением правых частей на более простые составляющие называется ***принципом суперпозиции***.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} Lu = f, \ \ x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x\in\Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

С помощью принципа суперпозиции ее можно разделить на две такие задачи:

$$\begin{cases} Lu = f, \ \ x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x\in\Gamma} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} Lu = 0, \ \ x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x\in\Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

Остановимся на первой из них. Функцию f можно разделить по «территориальному» принципу: область G делим на подобласти G_i, $i = \overline{1,\, k}$, и полагаем $f_i = f\chi_{G_i}$ (χ_{G_i} — характеристическая функция множества). Тогда решение можно представить в виде

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_k.$$

С увеличением частей разбиения количество слагаемых увеличивается, а сами слагаемые становятся меньше. Пронормируем правые части, деля на площадь (объем) частичной области, т.е. рассмотрим функции $\tilde{f}_i = \dfrac{f_i}{S_i}$, где $S_i = \sigma(G_i)$ — площадь (объем) области G_i. Тогда решение будет представлено в виде

$$u = \tilde{u}_1 S_1 + \tilde{u}_2 S_2 + \ldots + \tilde{u}_k S_k,$$

т.е. в виде, аналогичном интегральной сумме.

При измельчении разбиения функции $\tilde{f}_i$ сходятся к смещенной дельта-функции, а представленная интегральная сумма — к интегралу

$$\int\limits_G \Phi(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

где $\Phi(x,\xi)$ — решение уравнения $Lu = \delta(x-\xi)$. Такое представление решения называют ***интегральным***, функцию Φ — ***ядром*** интегрального представления, или ***функцией Грина***.

В случае, если краевая задача связана с уравнением теплопроводности, функция f (в силу физического смысла уравнения) представляет собой количество тепла, а $\tilde{f}_i$ — это плотность источников.

Аналогичным образом можно представить решение второй задачи (однородное дифференциальное уравнение, неоднородное граничное условие), только соответствующий интеграл будет браться по границе области (поверхности в трехмерном случае, кривой в двумерном и сумме по двум конца в одномерном).

6.2. Определение

Мы можем рассматривать дифференциальные уравнения как в классе обычных функций, понимая производные в обычном смысле, так и в классе обобщенных, в этом случае производные понимаются как производные обобщенных функций (их называют ***обобщенными производными***. Линейное дифференциальное уравнение порядка m можно записать в виде

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} k_\alpha \partial^\alpha u = f. \tag{6.1}$$

Если это уравнение рассматривается в классе обобщенных функций, то его решения называют ***обобщенными решениями***, иначе ***классическими решениями***.

Если функция u класса C^m, то выражение $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} k_\alpha \partial^\alpha u$ можно понимать как в обычном, так и в обобщенном смысле. Но обобщенная производная совпадает с обычной, если результат — непрерывная функция. Кроме того, равенство регулярных обобщенных функций эквивалентно их равенству как обычных функций. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Лемма 6.1. Обобщенное решение уравнения (6.1), являющееся регулярной функцией класса C^m, есть и классическое решение.

Решение уравнения $Lu = \delta(x)$ называют ***фундаментальным решением*** для линейного дифференциального оператора $L = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} k_\alpha \partial^\alpha$. Так как правая часть уравнения не является регулярной, фундаментальное решение следует понимать как обобщенное решение. Однако, как и в классическом случае, общее решение представляет собой сумму частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Во многих практических случаях общее решение однородного линейного дифференциального уравнения (главное, уравнения с постоянными коэффициентами) является его классическим общим решением.

Поиск фундаментального решения — нетривиальная задача. В случае уравнений с постоянными коэффициентами ключевым методом является преобразование Фурье.

Теорема 6.1. Обобщенная функция $u \in \mathcal{S}$ является фундаментальным решением оператора $L = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} k_\alpha \partial^\alpha$ с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье U является решением алгебраического уравнения

$$L(i\omega)U = 1,$$

где $L(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} k_\alpha \xi^\alpha$ — многочлен.

◄ Необходимость утверждения очевидна. Достаточность следует из того, что равенство изображений равносильно равенству функций. ►

Доказанная теорема сводит поиск фундаментальных решений для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к решению алгебраических уравнений в обобщенных функциях вида

$$P(\omega)U = 1,$$

где P — многочлен. Решение этого уравнения вне множества $N(P)$ нулей многочлена P (замкнутое множество) совпадает с регулярной функцией $1/P$, но может варьироваться с помощью функций, носитель которых сосредоточен в $N(P)$ (например, $\delta(x - x_0)$ с $x_0 \in N(P)$). Отсюда, в частности, вытекает, что при $N(P) \neq \varnothing$ решение алгебраического уравнения не единственно.

Теорема 6.2. Если $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение оператора L, для функции $f \in \mathcal{D}^*$ определена свертка $\mathcal{E} * f$, то уравнение $Lu = f$ имеет решение в $\mathcal{D}^*$, которое дается формулой $u = \mathcal{E} * f$.

◀ Доказательство основано на правиле дифференцирования свертки:

$$L(\mathcal{E} * f) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} k_\alpha \partial^\alpha (\mathcal{E} * f) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} k_\alpha (\partial^\alpha \mathcal{E} * f) =$$

$$= \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} k_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E} \Big) * f = (L\mathcal{E}) * f = \delta * f = f. \qquad ▶$$

6.3. Фундаментальное решение одномерного линейного дифференциального оператора

Речь идет о фундаментальном решении оператора

$$Lu = u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + a_2 u^{(m-2)} + \ldots + a_m u.$$

Отметим, что решение соответствующего однородного уравнения не вызывает трудностей. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — корни характеристического уравнения кратностей $r_1, r_2, \ldots, r_s$, так что $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = m$, то общее решение однородного уранения можно записать в виде

$$P_1(t) e^{\lambda_1 t} + P_2(t) e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_m(t) e^{\lambda_m t},$$

где $P_j(t)$ — произвольный многочлен степени $r_j - 1$, т.е.

$$P_j(t) = C_{j0} + C_{j1} t + \ldots + C_{j, r_j - 1} t^{r_j - 1},$$

а C_{ji} — постоянные интегрирования. При наличии комплексных корней $\alpha \pm \beta i$ пару комплексных экспонент $e^{(\alpha+\beta i)t}$, $e^{(\alpha-\beta i)t}$ можно заменить действительнозначными функциями $e^{\alpha t} \cos \beta t$ и $e^{\alpha t} \sin \beta t$.

Таким образом, для построения фундаментального решения одномерного линейного дифференциального оператора L достаточно найти одно решение уравнения $Lu = \delta$.

Теорема 6.3. Решением уравнения $Lu = \delta$ является функция $\mathcal{E} = \eta(t) Z(t)$, где $Z(t)$ — решение однородного уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $Z(0) = 0$, $Z'(0) = 0, \ldots, Z^{(m-2)}(0) = 0$, $Z^{(m-1)}(0) = 1$.

◀ Последовательное дифференцирование функции $\mathcal{E}$ дает

$$\mathcal{E}' = \eta(t)\, Z'(t), \quad \mathcal{E}'' = \eta(t)\, Z''(t), \quad \ldots, \quad \mathcal{E}^{(m-1)} = \eta(t)\, Z^{(m-1)}(t), \quad \mathcal{E}^{(m)} = \eta(t)\, Z^{(m)}(t) + \delta(t).$$

Подставив найденные производные в уравнение, получим

$$L\mathcal{E} = \eta L Z + \delta = \delta,$$

т.е. $\mathcal{E}$ является обобщенным решением рассматриваемого уравнения. ▶

Согласно теореме 6.2, уравнение $Lu = f$ имеет решение

$$u = \mathcal{E} * f = \int_0^t Z(t - \tau)\, f(\tau)\, d\tau.$$

6.4. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим оператор

$$L_t u = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u,$$

представляющий собой левую часть уравнения теплопроводности. Найдем его фундаментальное решение. Для этого используем преобразование Фурье и теорему 6.1. Преобразование Фурье применим только по пространственным переменным.

Итак, пусть $\mathcal{F}_x[u] = U$. Тогда (учитывая, что $\delta(t,x) = \delta(t) \times \delta(x)$)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a^2\omega^2 U = \delta(t).$$

Получили задачу на фундаментальное решение одномерного дифференциального оператора. Согласно теореме 6.3, это решение имеет вид $\eta(t)\,Z(t)$, где $Z(t)$ — решение задачи Коши

$$Z'(t) + a^2\omega^2 Z = 0, \quad Z(0) = 1.$$

В результате получаем

$$U = \eta(t)\,e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Получилось, что обобщенная функция U — регулярная. Поэтому обратное преобразование Фурье ищем обычным способом:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(t)\,e^{-a^2\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \frac{\eta(t)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t + i\omega x} d\omega.$$

В показателе экспоненты выделим полный квадрат:

$$-a^2\omega^2 t + i\omega x = -a^2 t\Big(\omega - \frac{ix}{2a^2 t}\Big)^2 - \frac{x^2}{4a^2 t}.$$

В результате

$$u(t,x) = \frac{\eta(t)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-a^2 t\Big(\omega - \frac{ix}{2a^2 t}\Big)^2 - \frac{x^2}{4a^2 t}\Big) d\omega =$$

$$= \frac{\eta(t)}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t s^2} ds = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2\pi a\sqrt{t}}\,\eta(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\,\eta(t).$$

Итак, фундаментальное решение уравнения теплопроводности имеет вид

$$\mathcal{E}^t(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\,\eta(t).$$

Эти рассуждения проходят и в многомерном случае. Тогда интеграл распадается в произведение интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \prod_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\omega_k^2 t} e^{i\omega_k x_k} d\omega_k.$$

Следовательно, фундаментальным решением оператора теплопроводности в n-мерном случае является

$$\mathcal{E}_n^t(t,x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}}{\big(2a\sqrt{\pi t}\big)^n}\,\eta(t).$$

6.5. Фундаментальное решение волнового уравнения

Рассмотрим волновой оператор

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta.$$

Найдем его фундаментальное решение. Для этого, как и выше, применим преобразование Фурье по пространственным переменным. Пусть $\mathcal{F}_x[u] = U$. Тогда уравнение $\Box u = \delta(t, x)$ перейдет в уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2\omega^2 U = \delta(t).$$

Его решение, согласно теореме 6.3, имеет вид

$$U(t, \omega) = \frac{\sin a|\omega|t}{a|\omega|}\,\eta(t).$$

Переход к оригиналу зависит от размерности. При $n = 1$ имеем

$$\mathcal{E}_1^w(t, x) = \frac{1}{2a}\,\eta(at - |x|).$$

Это вытекает из формулы $\mathcal{F}[\mathrm{rect}](\omega) = \mathrm{sinc}\,\frac{\omega}{2}$. В случае $n = 2$ имеем

$$\mathcal{E}_2^w(t, x) = \frac{\eta(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}.$$

Наконец, при $n = 3$

$$\mathcal{E}_3^w(t, x) = \frac{\eta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x).$$

Здесь $\delta_{S_{at}}(x)$ — ***простой слой***, т.е. обобщенная функция определяемая формулой

$$\langle \delta_{S_{at}},\ \varphi\rangle = \iint\limits_{S_{at}} \varphi\, dS$$

(интеграл берется по сфере $S_{at} = \{x \in \mathbb{R}^3\colon |x| = at\}$).

6.6. Фундаментальное решение оператора Лапласа

Фундаментальное решение оператора Лапласа — обобщенное решение уравнения $\Delta u = \delta$. Используя преобразование Фурье, переходим к алгебраическому уравнению

$$-|\omega|^2 U = 1.$$

Решение зависит от размерности.

При $n = 2$ решением этого уравнения является обобщенная функция $-\mathcal{P}\frac{1}{|\omega|^2}$. Здесь $\mathcal{P}\frac{1}{|\omega|^2}$ — обобщенная функция, определяемая соотношением

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{|\omega|^2},\ \varphi \right\rangle = \iint\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2}dx + \iint\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2}dx.$$

Прообразом этой функции является

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x| + \mathrm{const}.$$

Опуская постоянную, получаем
$$\mathcal{E}_2^L(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|.$$

Полученный результат можно проверить непосредственно. Учитывая, что $u = \mathcal{E}_2^L$ — регулярная функция, получаем
$$\langle \Delta u,\ \psi\rangle = \langle u,\ \Delta\psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} u\Delta\psi\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus U_\varepsilon} u\Delta\psi\,dx.$$

Здесь U_ε — круг радиуса ε. Дальнейшие вычисления основаны на формуле Грина:
$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus U_\varepsilon} u\Delta\psi\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus U_\varepsilon}(u\Delta\psi - \psi\Delta u)\,dx = \int\limits_{C_\varepsilon}\Big(u\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}} - \psi\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\Big)\,dS = -\int\limits_0^{2\pi}\Big(u\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial u}{\partial r}\Big)\varepsilon\,d\varphi$$

(нормаль направлена внутрь круга C_ε). Так как $\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$ гладкая, а u локально интегрируемая, интеграл $\int\limits_0^{2\pi} u\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\varepsilon d\varphi$ при $\varepsilon\to 0$ сходится к нулю. Далее, $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{2\pi r}$, поэтому
$$\langle\Delta u,\ \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(\varepsilon\cos\varphi, \varepsilon\sin\varphi)\,d\varphi = \psi(0),$$

т.е. $\Delta u = \delta$.

То, что фундаментальное решение является радиально симметричным, уловить нетрудно. При повороте системы координат (т.е. соответствующей невырожденной замене переменных) оператор Лапласа не изменяется, как и δ-функция. Естественно предположить, что и соответствующее решение можно искать с радиальной симметрией. Но
$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Уравнение $\Delta u = 0$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению
$$(ru')' = 0,$$

решением которого является $u = C_1\ln r + C_2$.

При $n = 3$ ситуация аналогична. Через преобразование Фурье приходим к тому же алгебраическому уравнению (но большей размерности). Предположение о сферической симметрии фундаментального решения приводит к дифференциальному уравнению
$$(r^2u')' = 0,$$

Решением которого является $u = \dfrac{C_1}{r} + C_2$. В качестве претендента на фундаментальное решение может быть выбрано $u = \dfrac{C_1}{r}$. Непосредственный подсчет, аналогичный тому, который был проведен при $n = 2$, дает
$$\mathcal{E}_3^L(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x|}.$$

6.7. Функция Грина для задачи Дирихле

Использование фундаментальных решений продемонстрируем на примере уравнения Лапласа (Пуассона). Важный момент состоит в том, что фундаментальное решение — это обобщенное решение уравнения Лапласа, но само является регулярной функцией. Поэтому можно говорить о значениях этой функции в точках некоторой кривой или поверхности.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega; \quad u\big|_{\partial\Omega} = \mu. \tag{6.2}$$

Если Ω — неограниченная область, то дополнительно необходимо оговорить поведение решения на бесконечности (обычно ограниченность при $n = 2$, убывание к нулю при $n > 2$).

По отношению к ограниченной кривой Γ (поверхности при $n = 3$) задача Дирихле может быть внутренней (область Ω ограниченная, внутренность кривой/поверхности Γ) или внешней (область Ω — внешность Γ).

Если кривая/поверхность гладкая, а функция μ непрерывна на $\partial\Omega$, то внутренняя задача Дирихле имеет классическое решение, и притом единственное.

Рассмотрим в условиях внутренней задачи Дирихле (6.2) функцию $\mathcal{E}_n^L(x-\xi)$, где $n = 2$ или $n = 3$. Существует гармоническая функция $g(x,\xi)$, которая на $\partial\Omega$ совпадает с $\mathcal{E}_n^L(x-\xi)$. Тогда функция

$$G(x,\xi) = \mathcal{E}_n^L(x-\xi) - g(x,\xi)$$

имеет все качества фундаментального решения, но, кроме того, на границе области обращается в нуль: $G\big|_{\partial\Omega} = 0$. Эта функция называется ***функцией Грина*** рассматриваемой задачи. С помощью функции Грина можно представить решение задачи Дирихле в интегральной форме.

Действительно, пусть u — решение задачи (6.2). Согласно 2-й формуле Грина

$$\int\limits_{\Omega} \big(u\Delta G - G\Delta u\big)\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} - G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\,dS. \tag{6.3}$$

В правой части равенства

$$\int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS = \int\limits_{\partial\Omega} \mu\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS = 0,$$

так как $u\big|_{\partial\Omega} = \mu$ и $G\big|_{\partial\Omega} = 0$.

В левой части равенства (6.3) имеем

$$\int\limits_{\Omega} G\Delta u\,dx = 0, \quad \int\limits_{\Omega} u(x)\Delta G(x-\xi)\,dx = u(\xi),$$

поскольку $\Delta u = 0$ и $\Delta G(x-\xi) = \delta(x-\xi)$. Поэтому левая часть равна $u(\xi)$.

В результате

$$u(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega} \mu\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS.$$

Получено интегральное представление решения задачи Дирихле. Это представление имеет естественный физический смысл. Предположим, например, что задача (6.2) описывает стационарное распределение температур. Тогда функция μ — это плотность тепловых источников на границе области, функция $\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}$ — распределение температур, реализуемое одним точечным источником единичной мощности, а интеграл по границе суммирует все источники на этой границе.

Отметим, что, строго говоря, дельта-функция в равенстве (6.3) появиться не может. Здесь может быть два выхода. Первый — расширить формулу Грина на случай обобщенных функций (если это вообще возможно). Второй — вырезать особую точку ξ, рассмотрев область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus |x-\xi| \leqslant \varepsilon$. В этой области можно применить формулу Грина, но в ней появятся дополнительные слагаемые по границе выреза (круг/шар радиуса ε). Если затем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы как раз и получим значение $u(\xi)$.

Разумеется, во 2-й формуле Грина (6.3) можно использовать любое фундаментальное решение (напомним, он неоднозначно и определяется с точностью до произвольного решения однородного дифференциального уравнения, в данной случае с точностью до гармонической функции). Тогда в левой части мы получим то же, что и было. А в правой части возникнет интеграл

$$\int\limits_{\partial\Omega} G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS,$$

значение которого неизвестно. Именно для того, чтобы избавиться от нежелательного слагаемого, фундаментальное решение «подкручивается».

Полученный прием пригоден и для других задач математической физики. Например, для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega; \quad u\big|_{\partial\Omega} = \mu \tag{6.4}$$

также применяем формулу (6.3), но в этом случае возникает дополнительное слагаемое

$$\int\limits_{G} G\Delta u\,dx = -\int\limits_{G} Gf\,dx$$

и в итоге

$$u(\xi) = -\int\limits_{G} fG\,dx + \int\limits_{\partial G} \mu\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS.$$

В общем случае функция Грина — это фундаментальное решение, удовлетворяющее дополнительному условию: на границе области функция Грина удовлетворяет тем же граничным условиям, что поставлены в задаче, но только однородным. Так, рассмотрим задачу с граничными условиями общего вида

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega; \quad \left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \mu \tag{6.5}$$

(здесь α и β — функции на границе, удовлетворяющие условиям $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$; производная берется по направлению внешней нормали). В этой задаче функция Грина $G(x,\xi)$ — решение следующей задачи:

$$-\Delta G = \delta(x-\xi), \quad x \in \Omega; \quad \left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\bigg|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.6}$$

Обращаем внимание, что функция Грина имеет два блока аргументов: x и ξ, здесь второй блок указывает на точку, с которой связывается точечный источник.

Построение функции Грина — нетривиальная задача, в общем случае она не легче прямого решения краевой задачи. Однако в некоторых случаях преимущество можно получить. Речь идет об областях с определенной симметрией. В этом случае функцию Грина удается построить, комбинируя фундаментальные решения в разных точках. Комбинируя несколько источников с учетом симметрии можно обеспечить однородные граничные условия. Несколько примеров.

Пример 6.1. Рассмотрим задачу (6.4) в полуплоскости $(n = 2)$ $y > 0$. Функция $G(x,\xi) = \mathcal{E}_2^L(x-\xi) - \mathcal{E}_2^L(x-\overline{\xi})$, где $\overline{\xi}$ — точка, симметричная точке ξ относительно оси абсцисс, имеет нулевые значения при $x \in Ox$. Следовательно, функция $G(x, \xi)$ — функция Грина для верхней полуплоскости.

Замечание 6.1. Рассмотренный пример показывает, что функция Грина строится как несколько функций-источников, причем только один источник располагается в области, остальные находятся вне ее.

Замечание 6.2. Идея, описанная в примере, лежит в основе ***метода отражений***. Она распространяется на угловые области, которые (в нотации комплексной плоскости) описываются неравенством $\alpha < \arg z < \beta$. При этом границы области α и β должны подчиняться определенным условиям. Во всяком случае решение может быть получена для полуплоскости, четверти плоскости, восьмой части плоскости и т.п.

Замечание 6.3. В рассмотренном примере есть одно проблемное место: область в задаче не является ограниченной, так что применение 2-й формулы Грина напрямую некорректно. Выход здесь такой: из области вырезаем ограниченную часть Ω_R кругом $|x| < R$. К этой ограниченной области можно применить формулу Грина и получить соответствующее интегральное представление. При $T \to \infty$ двойные интегралы перейдут в интегралы по заданной области Ω, но в интегральном представлении будут дополнительные слагаемые, выражаемые криволинейными интегралами по дугам окружности $|x| = R$. Нужное интегральное представление мы получим, если эти дополнительные слагаемые при $R \to \infty$ стремятся к нулю. Это условие обеспечивается дополнительным требованием, чтобы искомое решение в бесконечности было малым (точные формулировки здесь опускаем).

Пример 6.2. Рассмотрим круг $|z| < R$. Фундаментальное решение можно записать в комплексной форме: $\mathcal{E}_2^L(z) = \dfrac{1}{2\pi} \ln|z|$. Функция источника имеет вид $I(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \ln|z - \zeta|$. Компенсируем этот источник источником в точке, симметричной точке ζ относительно окружности $|z| = R$. По определению точки ζ и ζ' симметричны относительно окружности, если $\zeta'\overline{\zeta} = R^2$. В результате получаем функцию

$$F(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln|z-\zeta| - \frac{1}{2\pi} \ln|z-\zeta'| = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z-\zeta|}{|z-\zeta'|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z-\zeta|\,|\zeta|}{|R^2 - \overline{\zeta} z|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z-\zeta| R}{|R^2 - \overline{\zeta} z|} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\zeta|}{R}.$$

Нетрудно увидеть, что $F(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\zeta|}{R}$ при $|z| = R$, т.е. не зависит от z. Вычтя это постоянное слагаемое, получаем функцию Грина

$$G(x, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z-\zeta| R}{|R^2 - \overline{\zeta} z|}.$$

7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Специальные функции — класс функций, не являющихся элементарными, которые вошли в математический обиход в связи с исследованиями дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Все подобные функции можно описать обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\sigma(t)y'' + \tau(t)y' + \lambda y = 0,$$

где σ и τ — многочлены соотвественно 2-й и 1-й степени. Указанное уравнение называют ***уравнением гипергеометрического типа***.

Отметим, что уравнение Бесселя является частным случаем уравнения гипергеометрческого типа, так что функции Бесселя по праву принадлежат к специальным.

Мы рассмотрим только отдельные виды специальных функций, связанных с решением простейших задач математической физики. Кроме того, в этом разделе мы рассмотрим гармонические функции, которые, вообще-то говоря, специальными не являются, но, как и специальные функции, играют важную роль в математической физике.

7.1. Гармонические функции

Определение. Формула Грина и бесконечная дифференцируемость. Формула Грина для шара (круга) и теорема о среднем. Принцип максимума. Следствия: оценки модуля внутри и снаружи, о равномерной сходимости. Стирание особенностей. Обобщенные гармонические функции. Слабая сходимость последовательности гармонических функций. Достаточное условие гармоничности.

Функция $u(x) \in C^2(D)$, $D \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая в D уравнению Лапласа, называется ***гармонической***.

Напомним вторую формулу Грина:

$$\int\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int\limits_{\partial D} \Big(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\,dS.$$

Используя в качестве v фундаментальное решение уравнения Лапласа $\mathcal{E}_n(x,\xi)$, получаем

$$u(\xi) = \int\limits_{\partial D} \Big(u(x)\frac{\partial \mathcal{E}(x,\xi)}{\partial \boldsymbol{n}} - \mathcal{E}(x,\xi)\frac{\partial u(x)}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\,dS(x). \tag{7.1}$$

Из этого представления вытекает, что гармоническая функция бесконечно дифференцируема, поскольку дифференцирование u — это дифференцирование интеграла по параметру ξ, но подынтегральная функция по этому параметру бесконечно дифференцируема.

Замечание. И в теме «Фундаментальное решение», и здесь подчеркивается различие между аргументами функции Грина: первый векторный аргумент x указывает на произвольную точку, в которой смотрим действие функции Грина, а второй аргумент указывает точку, с которой ассоциируется точечный источник (смещение в δ-функции). В действительности функция Грина симметрична по своим аргументам: $G(x,\xi) = G(\xi,x)$. Поэтому на самом деле распределение ролей между двумя аргументами неважно.

В двумерном случае условие бесконечной дифференцируемости гармонической функции можно получить из других соображений. Если функция u гармонична в области $B \subset \mathbb{R}^2$, то функции u_x и $-u_y$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют в D условиям Коши — Римана (одним из двух условий является уравнение Лапласа, другим — условие равенства смешанных производных). Следовательно, функция $u_x - iu_y$, как функция комплексного переменного, голоморфна в D. Но тогда она бесконечно дифференцируема, а значит, бесконечно дифференцируемы ее действительная и мнимая части, т.е. частные производные функции u.

Из этого рассуждения нетрудно получить следующее важное положение.

Теорема 7.1. Функция $u(x,y)$ гармонична в плоской области D тогда и только тогда, когда она является действительной частью некоторой аналитической в D функции.

◀ Действительная часть голоморфной функции является гармонической функцией. Действительно, если $f(z) = u(x,y) + iv(x,u)$ голоморфна в некоторой области D, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в этой области бесконечно дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши — Римана: $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$. Продифференцировав первое уравнение по x, второе по y и сложив, получим $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$.

Если $u(x,y)$ — гармоническая функция, то, как показано, функция $f(z) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$ является голоморфной. Рассмотрим ее первообразную $F(z)$, т.е. $F'(z) = f(z)$. Пусть $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$. Как доказано, $U(x,y)$ является гармонической. А по одному из правил дифференцирования голоморфной функции $f(z) = F'(z) = U_x(x,y) - iU_y(x,y)$. Из вида функции $f(z)$ вытекает, что $u_x = U_x$ и $u_y = U_y$. Следовательно, $u - U = \mathrm{const}$. Добавив к функции $F(z)$ эту постоянную, получим голоморфную функцию с действительной частью $u(x,y)$. ▶

В качестве фундаментального решения $\mathcal{E}$ рассмотрим функцию Грина $G(x,\xi)$ для задачи Дирихле в области D, т.е. считаем, что $G(x,\xi) = 0$ при $x \in \partial D$. Тогда формула (7.1) несколько упростится:

$$u(\xi) = \int\limits_{\partial D} u(x) \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS(x). \tag{7.2}$$

Отсюда, в частности, вытекает (при выборе $u \equiv 1$), что

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS(x) = 1.$$

Используя для интеграла в (7.2) теорему о среднем, заключаем, что

$$u(\xi) = \int\limits_{\partial D} u(x) \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS(x) = \lambda_0 \int\limits_{\partial D} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS(x) = \lambda_0.$$

где

$$\inf_{x\in\partial D} u(x) \leqslant \lambda_0 \leqslant \sup_{x\in\partial D} u(x). \tag{7.3}$$

Это рассуждение верно, если $\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(x,\xi)$ при $x \in \partial D$ (на границе области) сохраняет знак (а это пока не известно). Тем не менее неравенства (7.3) оказываются верными в общем случае и, более того, они для непостоянной функции строгие, т.е. непостоянная гармоническая функция не может достигать экстремума внутри области. Такой вывод можно сделать, используя следующее утверждение.

Теорема 7.2 (теорема о среднем). Если функция u гармонична в замкнутом шаре (круге) $U_{a,R} = \{x\colon |x-a| \leqslant R\}$ (т.е. в некоторой окрестности этого шара), то

$$u(a) = \frac{1}{m(S_{a,R})} \int\limits_{S_{a,R}} u(x)\, dS(x), \tag{7.4}$$

где $m(S_{a,R})$ — объем (площадь) сферы $S_{a,R} = \{x\colon |x-a| = R\}$.

◀ Поскольку функция $\mathcal{E}(x,\xi)$ зависит только от $r = |x-\xi|$, при $\xi = a$ она постоянна, когда $x \in S_{a,R}$. Поэтому функция Грина для шара $U_{a,R}$ при $\xi = a$ отличается от $\mathcal{E}$ некоторой постоянной. Но постоянная не отражается на производных функции. Поэтому в данном случае в формуле (7.2) можно использовать функцию $\mathcal{E}$:

$$u(\xi) = \int\limits_{\partial D} u(x) \frac{\partial \mathcal{E}(x,\xi)}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS(x).$$

Далее, производная по нормали функции $\mathcal{E}$ соответствует частной производной по переменной r и тоже постоянна при $x \in S_{a,R}$. Следовательно, формула (7.2) для случая шара имеет вид

$$u(\xi) = C \int\limits_{\partial D} u(x)\, dS(x), \tag{7.5}$$

где постоянная C — это значение $\dfrac{\partial \mathcal{E}(x,\xi)}{\partial \boldsymbol{n}}$ на сфере $S_{a,R}$, которое не зависит от u.

В формуле (7.5) в качестве u можно брать любую гармоническую функцию. Мы можем выбрать в качестве u постоянную функцию 1, что позволяет найти постоянную C из уравнения $1 = Cm(S_{a,R})$. В результате приходим к формуле (7.4). ▶

Теорема 7.3. Непостоянная гармоническая функция не может достигать своего максимума или минимума внутри области.

◀ Предположим, что в точке $a \in D$ гармоническая функция $u(x)$ достигает, например, максимума. Выберем шар $U_{a,R}$ целиком (вместе с границей) лежащий в D. Согласно теореме о среднем

$$u(a) = \frac{1}{m(S_{a,R})} \int\limits_{S_{a,R}} u(x)\, dS.$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{1}{m(S_{a,R})} \int\limits_{S_{a,R}} \bigl(u(a) - u(x)\bigr)\, dS = 0.$$

Согласно условию $u(a) \geqslant u(x)$, $x \in S_{a,R}$, подынтегральная функция $u(a) - u(x)$ неотрицательная на сфере. А так как функция $u(a) - u(x)$ непрерывна, то нулевое значение интеграла возможно только при тождественно нулевом значении подынтегральной функции, т.е. на сфере $S_{a,R}$ функция $u(x)$ тождественно равна $u(a)$.

Так как радиус R шара можно уменьшать произвольным образом, то приходим к выводу, что $u(x)$ постоянная во всем шаре $U_{a,R}$.

В результате в D есть подобласть, в которой функция $u(x)$ постоянна и равна $u(a)$. На самом деле эта подобласть совпадает с D. Действительно, рассмотрим множество M точек в D, в которых функция u имеет значение $u(a)$ (т.е. максимальное). Из доказанного вытекает, что множество M открытое: вместе с каждой своей точкой x оно содержит некоторый шар $U_{x,R}$. В силу непрерывности функции $u(x)$ в D множество M закнуто в относительной топологии множества D, т.е. любая предельная точка множества M, принадлежащая D, принадлежит и M Таким образом, M — открыто-закнутое подмножество области D, а следовательно, совпадает с D. Это означает, что $u(x)$ постоянна в D. ▶

Следствие 7.1. Для функции, гармонической в ограниченной области D и непрерывной (кусочно-непрерывной) в $\overline{D}$, верно неравенство

$$\max_{x \in D} |u(x)| \leqslant \max_{x \in \partial D} |u(x)|.$$

◀ Так как D — ограниченная область, ее замыкание $\overline{D} = D \cup \partial D$ есть компакт, на котором функция достигает своих максимального и минимального значений. Эти значения не могут достигаться только внутри области, т.е. они достигаются на границе:

$$\min_{x \in \overline{D}} u(x) = \min_{x \in \partial D} u(x), \quad \max_{x \in \overline{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x).$$

Следовательно,

$$\min_{x \in \partial D} u(x) \leqslant u(x) \leqslant \max_{x \in \partial D} u(x), \quad x \in D.$$

Но

$$\max_{x \in \partial D} u(x) \leqslant \max_{x \in \partial D} |u(x)|, \quad \min_{x \in \overline{D}} u(x) \geqslant -\min_{x \in \overline{D}} |u(x)|.$$

Поэтому

$$-\max_{x \in \overline{D}} |u(x)| \leqslant u(x) \leqslant \max_{x \in \partial D} |u(x)|,$$

что эквивалентно утверждению следствия. ▶

Сформулированное следствие в литературе известно как ***принцип максимума***. Отметим, что в формулировке следствия ограниченность области — существенное требование. Напри мер, функция $u(x, y) = xy$ гармоническая, но в области $D = \{(x,\, y)\colon\, x > 0,\ y > 0\}$ функция положительна, в то время как на границе области равна нулю.

Следствие 7.2. Решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u\big|_{x \in \partial D} = \mu(x)$ в ограниченной области при непрерывной функции μ единственно.

◀ Из принципа максимума вытекает, что если гармоническая функция на границе области тождественно равна нулю, то эта функция равна нулю и во всей области. Если две функции на границе области имеют одинаковые значения, то их разность на границе области равна нулю, т.е. эта разность — тождественный нуль, а функции совпадают. ▶

Замечание 7.1. Приведенные формулировки и рассуждения касаются случая ограниченной области. В случае неограниченной области точная верхняя (нижняя) грань в области бесконечная и утверждение оказывается неверным. Например, гармоническая функция двух переменных $u = xy$ на границе угла $x > 0$, $y > 0$ обращается в нуль, но нулю тождественно не равна. Ситуацию здесь спасает дополнительное предположение, что функция ограничена при стремлении в бесконечность (в двумерном случае) или стремится к нулю (в случае размерности 3 и выше).

7.2. Гамма-функция и Бета-функция

Гамма-функцией Эйлера (или просто гамма-функцией) называют функцию

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx. \tag{7.6}$$

Интеграл справа сходится при любом действительном $s > 0$, а фактически и при любом комплексном s в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. При этом несложно показать, используя стандартные правила дифференцирования интеграла по параметру, что $\Gamma(s)$ — аналитическая функция в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$.

Простейшее функциональное соотношение, связанное с гамма-функцией, можно получить интегрированием по частям:

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} dx = -x^s e^{-x}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = s\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Доказанное равенство означает, что

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s). \tag{7.7}$$

Нетрудно установить, что $\Gamma(1) = 1$. Отсюда

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2, \quad \ldots, \quad \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n!$$

Отсюда понятно, почему гамма-функцию иногда называют факториалом действительного (комплексного) аргумента.

Из формулы (7.7) возникает продолжение гамма-функции на левую полуплоскость. Действительно,

$$\Gamma(s+1) = s(s-1)(s-2)\ldots(s-k)\Gamma(s-k),$$

откуда

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{(s+k)(s+k-1)\ldots s}. \tag{7.8}$$

Правая часть этого равенства определена при $s > -k-1$, в то время как левая часть — при $s > 0$. Так как обе функции совпадают при $s > 0$, правая часть является аналитическим продолжением левой части, т.е. функции $\Gamma(s)$. Выбирая возрастающие значения натурального параметра k, мы получаем аналитическое продолжение $\Gamma(s)$ на всю комплексную плоскость.

Из формулы (7.8) вытекает, что в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$ гамма-функция имеет простые полюса. Выбрав $k = n$, в окрестности $s = -n$ получим

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n)(s+n-1)\ldots s}.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{s=-n} \Gamma(s) = \left.\frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n-1)\ldots s}\right|_{s=-n} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\ldots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Если же s не является нулем или целым отрицательным, то деления на нуль в формуле (7.8) не происходит и гамма-функция является аналитической.

Гамма-функция связана с другой специальной функцией, называемой бета-функцией, которая определяется интегралом

$$\mathrm{B}(u,v) = \int\limits_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx. \tag{7.9}$$

Этот интеграл сходится при $u > 0$, $v > 0$, определяя тем самым функцию двух переменных в первом квадранте.

Интеграл (7.9), как и интеграл в правой части (7.6), можно получить из двойного интеграла

$$I(u,v) = \iint\limits_{\substack{x>0\\y>0}} e^{-(x^2+y^2)} x^{2u-1} y^{2v-1}\,dxdy,$$

который сходится при $u > 0$, $v > 0$.

Действительно, интеграл $I(u,v)$ после расстановки пределов интегрирования распадается в произведение двух интегралов:

$$I(u,v) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} x^{2u-1} dx \int\limits_0^\infty e^{-y^2} y^{2v-1} dy.$$

После замен переменных $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$ сомножители сводятся к Гамма-функции, и мы приходим к формуле

$$I(u,v) = \frac{1}{4}\Gamma(u)\,\Gamma(v),$$

которая верна при $u > 0$, $v > 0$.

Указанный интеграл можно вычислить в полярных координатах:

$$I(u,v) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2u-1}\varphi\,\sin^{2v-1}\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2u+2v-2} r\,dr = \frac{1}{2}\Gamma(u+v)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2u-1}\varphi\,\sin^{2v-1}\varphi\,d\varphi.$$

Оставшийся интеграл сводится к интегралу (7.9) заменой переменных $\cos^2\varphi = t$:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2u-1}\varphi\,\sin^{2v-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}(u,v).$$

В результате приходим к формуле

$$\mathrm{B}(u,v) = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}, \quad u > 0, \quad v > 0.$$

Учитывая, что Гамма-функция определена для комплексного аргумента в комплексной плоскости, можем рассматривать эту формулу как аналитическое продолжение бета-функции на $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

Полагая $v = 1-u$, находим

$$\mathrm{B}(u,1-u) = \int\limits_0^1 x^{u-1}(1-x)^{-u}dx = \int\limits_0^1 \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^u \frac{dx}{x} = \left|\frac{x}{1-x} = z\right| = \int\limits_0^{\infty} \frac{z^{u-1}}{1+z}\,dz.$$

Последний интеграл можно вычислять с помощью вычетов, составив контур из окружностей $|z| = r$, $|z| = R$ с разрезом по положительной части действительной оси. При обходе вокруг начала координат числитель $z^{u-1} = e^{(u-1)\ln z}$ получает приращение в показателе $2\pi(u-1)i$, так что подынтегральная функция умножается на $e^{2\pi ui}$. Значит, интеграл $I_{\text{н}}$ по нижнему берегу разреза связан с интегралом $I_{\text{в}}$ по верхнему берегу, с учетом направления обхода, соотношением $I_{\text{н}} = -e^{2\pi ui}I_{\text{в}}$. Интегралы по окружностям при $r \to 0$, $R \to \infty$ стремятся к нулю. Таким образом,

$$(1-e^{2\pi ui})\int\limits_0^{\infty} \frac{z^{u-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} \frac{z^{u-1}}{1+z} = 2\pi i e^{(u-1)\pi i}.$$

Но

$$\frac{2\pi i e^{(u-1)\pi i}}{1-e^{2\pi ui}} = -\frac{2\pi i e^{\pi ui}}{1-e^{2\pi ui}} = -\frac{2\pi i}{e^{-\pi ui}-e^{\pi ui}} = \frac{\pi}{\sin\pi u}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{B}(u,1-u) = \frac{\pi}{\sin\pi u}.$$

С учетом связи гамма- и бета-функций

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

7.3. Функции Бесселя

Уравнение Бесселя. Ставим задачу на собственные значения

$$\Delta u = \lambda u, \ \ x \in D;$$
$$u\big|_{\Gamma} = 0,$$

где D — круг $x^2 + y^2 < r_0^2$, а Γ — его граница.

В полярных координатах эта задача формулируется следующим образом:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \lambda u, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi, \ \ r < r_0;$$
$$u\big|_{r=r_0} = 0.$$

Решения будем искать в виде $u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$. Тогда дифференциальное уравнение трансформируется следующим образом:

$$r(rR')'\Phi + R\Phi'' = \lambda r^2 R\Phi,$$

или, после деления на $R\Phi$:

$$\frac{r(rR')'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda r^2.$$

Выделяются уравнения

$$\Phi'' - \lambda_1\Phi = 0, \quad r(rR')' - (\lambda r^2 - \lambda_1)R = 0.$$

Для первого уравнения следует искать периодические решения с периодом 2π. В результате находим последовательность функций

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}, \quad \Phi_n^{(c)}(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \Phi_n^{(s)}(\varphi) = \sin n\varphi, \quad n = 1,\,2,\,\ldots,$$

для которых

$$\lambda_{1,n} = -n^2.$$

С учетом этих решений для второго уравнения получаем

$$r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + n^2)R = 0.$$

Поскольку оператор $-\Delta$ положительно определенный, заключаем, что $\lambda < 0$, так что можем положить $\lambda = -\omega^2$. Тогда уравнение можно записать следующим образом:

$$r^2R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0. \tag{7.10}$$

В уравнении (7.10) заменим независимую переменную $\omega r = t$. Получим

$$t^2R''_{t^2} + tR'_t + (t^2 - n^2)R = 0. \tag{7.11}$$

В уравнении (7.11) точка $t = 0$ особая. Это означает, что в этой точке некоторые решения могут быть не определены. Для рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля функция $R(t) = R(\omega r)$ должна быть, по крайней мере, ограниченной при $t \to 0$. Если $J_n(t)$ — такое решение (7.11), то мы получаем функцию вида $R(r) = J_n(\omega r)$, причем должно выполняться условие $J_n(\omega r_0) = 0$, т.е. число ωr_0 должно быть нулем функции $J_n(t)$. Обозначив μ_{nk} последовательность нулей $J_n(t)$ (сколько их, мы пока не знаем), получим систему решений рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля вида

$$u_{0m}(r,\varphi) = \frac{1}{2}J_0\left(\frac{\mu_{0k}r}{r_0}\right), \quad u_{nm}^{(c)}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_{nk}r}{r_0}\right)\cos n\varphi, \quad u_{nm}^{(s)}(r,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_{nk}r}{r_0}\right)\sin n\varphi.$$

Уравнением Бесселя называют уравнение

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0. \tag{7.12}$$

Это однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Отметим, что при $t = 0$ для этого уравнения нарушаются условия существования и единственности решения задачи Коши, т.е. точка $t = 0$ для уравнения является особой.

Из теории дифференциальных уравнений следует, что общее решение уравнения (7.12) записывается в виде

$$y_{\text{oo}} = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $y_1(t)$, $y_2(t)$ — фундаментальная система решений уравнения.

В качестве $y_1(t)$ и $y_2(t)$ можно выбрать любую пару линейно независимых решений уравнения (7.12). Линейную независимость функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ можно проверять с помощью определителя Вронского

$$W[y_1; y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что для любых двух решений линейного дифференциального уравнения 2-го порядка определитель Вронского либо тождественно нулевой (и тогда функции линейно зависимы), либо нигде не обращается в нуль (и тогда функции линейно независимы).

Теорема 7.4. Для любых решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения (7.12)

$$W[y_1; y_2](t) = \frac{C}{t}, \quad C = \text{const}. \tag{7.13}$$

◀ Отметим, что

$$W'[y_1; y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1'(t) & y_2'(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) \end{vmatrix}.$$

Согласно условиям теоремы

$$t^2y_1'' + ty_1' + (t^2 - \nu^2)y_1 = 0, \quad t^2y_2'' + ty_2' + (t^2 - \nu^2)y_2 = 0.$$

Вычтем из первого уравнения, умноженного на $y_2(t)$, второе, умноженное на $y_1(t)$:

$$t^2(y_1''y_2 - y_2''y_1) + t(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0,$$

или

$$-t^2W'[y_1; y_2] - tW[y_1; y_2] = 0.$$

Решая уравнение $tW' + W = 0$, получаем соотношение (7.13). ▶

Наша задача — найти фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. К сожалению, решения уравнения Бесселя (за некоторым исключением) не являются элементарными функциями. Это заметно усложняет анализ таких функций.

Функции Бесселя. Решение уравнения Бесселя можно искать в виде «почти степенного» ряда

$$J(x) = t^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Полагая, что этот ряд сходится в некоторой окрестности нуля, можем его дифференцировать любое число раз.

Подставив ряд в дифференциальное уравнение, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)(n+s-1)t^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+s)t^{n+s} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}t^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n t^{n+s} = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big((n+s)^2 - \nu^2)a_n + a_{n-2}\big)t^{n+s} = 0,$$

где для удобства введены коэффициенты $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$. Приравнивая нулю коэффициенты полученного ряда получим

$$(s^2 - \nu^2)a_0 = 0, \quad ((1+s)^2 - \nu^2)a_1 = 0, \quad ((n+s)^2 - \nu^2)a_n = -a_{n-2}, \;\; n = 2, 3, \ldots \tag{7.14}$$

Из первого уравнения (7.14) заключаем, что $s = \nu$ (или $s = -\nu$, что можно рассматривать как случай $s = \nu$ для отрицательного ν). Если ν не является целым отрицательным, далее находим

$$a_{2k-1} = 0, \;\; k \in \mathbb{N}, \qquad a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{4k(k+\nu)}, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Из полученных соотношений для четных коэффициентов находим:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{4k(k+\nu)} = \frac{a_{2k-4}}{4^2 k(k-1)(k+\nu)(k+\nu-1)} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{(-1)^k a_0}{4^k k(k-1)\ldots\cdot 1\cdot(k+\nu)(k+\nu-1)\ldots(\nu+1)}.$$

С помощью гамма-функции коэффициенты степенного ряда можно записать следующим образом:

$$a_{2k} = \frac{C(-1)^k}{4^k \Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)},$$

где $C = a_0\Gamma(\nu)$.

Выбрав соответствующим образом значение C, запишем решение уравнения Бесселя в виде

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{7.15}$$

Ряд (7.15) получен в предположении, что ν не является целым отрицательным. Если $\nu = -m$ и $s = \nu$, то при $n = -2m$ из (7.14) получаем уравнение $0 = a_{2m-2}$, откуда $a_0 = a_2 = \ldots = a_{2m-2} = 0$. В результате (при соответствующем выборе a_{2m}) получаем ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\,\Gamma(k-m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m},$$

который можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m} = (-1)^m J_m(t).$$

Отметим, что ряд (7.15) при $\nu = -m$ с учетом нулей функции $1/\Gamma(s)$ в точках $s = 0, -1, \ldots$ приводит к тому же соотношению:

$$J_{-m}(t) = (-1)^m J_m(t).$$

Функция $J_\nu(t)$, определяемая соотношением (7.15), называется ***функцией Бесселя порядка*** $\boldsymbol{\nu}$ (также ***цилиндрической функцией I рода порядка*** $\boldsymbol{\nu}$).

Теорема 7.5. Для любого значения ν

$$W[J_\nu; J_{-\nu}](t) = -\frac{2\sin \pi\nu}{\pi t}.$$

◀ Утверждение теоремы является уточнением равенства (7.13), а именно, установлением конкретного вида константы C. Для этого достаточно вычислить значение C при стремлении $t \to 0$, оценивая главные части функций J_ν, $J_{-\nu}$ и их производных. ▶

Из доказанной теоремы вытекает, что при нецелом ν функции J_ν и $J_{-\nu}$ составляют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. При целом ν эта идиллия нарушается. Рассмотрим функцию

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(t)}{\sin \pi\nu}.$$

Эта функция определена при нецелых ν. При этом следует отметить, что функции $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ являются аналитическими по параметру ν. Из этого следует, что существует предел $\lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu(t)$, так что функция $Y_\nu(t)$ может быть доопределена по непрерывности для целых значений ν. Доопределенная функция является решением уравнения Бесселя соответствующего порядка. Вычислим определитель Вронского для пары функций $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$:

$$W[J_\nu; Y_\nu](t) = w\Big[J_\nu; \frac{J_\nu\cos \pi\nu - J_{-\nu}}{\sin \pi\nu}\Big](t) = -\frac{1}{\sin \pi\nu}\, W[J_\nu; J_{-\nu}](t) = \frac{2}{\pi t}.$$

Видно, что функции J_ν и Y_ν составляют фундаментальную систему решений при любом значении параметра ν.

Функция $Y_\nu(t)$ называется ***функцией Неймана*** или ***цилиндрической функцией II рода***.

Отметим, что функции Неймана не являются ограниченными в нуле. Для нецелых значений это вытекает из оценки $J_{-\nu}(t) \sim t^{-\nu}$ при $t \to 0$. Для целых значений ν это можно доказать путем предельного перехода по ν.

Условие неограниченности функций Неймана означает, что для собственных функций оператора Лапласа в круге можно использовать только функции I рода, ограниченные в нуле.

Свойства функций Бесселя. Поскольку функции Бессселя и их производные связаны функциональным соотношением, естественно полагать, что производная функции Бесселя выражается через функции Бесселя.

Теорема 7.6. Для функций Бесселя верны следующие формулы:

$$(t^\nu J_\nu(t))' = t^\nu J_{\nu-1}(t), \qquad (t^{-\nu} J_\nu(t))' = -t^{-\nu} J_{\nu+1}(t). \tag{7.16}$$

◀ Доказательство основано на почленном дифференцировании степенного ряда. Так как

$$t^\nu J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} t^{2k+2\nu},$$

то

$$(t^\nu J_\nu(t))' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot 2(k+\nu)}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} t^{2k+2\nu-1} = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1}\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu)} t^{2k+\nu-1}.$$

Видно, что ряд в правой части равенства представляет собой функцию $J_{\nu-1}(t)$, т.е. первое равенство (7.16) верно.

Второе равенство (7.16) доказывается аналогично. ▶

Следствие 7.3. Для функций Бесселя верны следующие формулы дифференцирования:

$$J'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t} J_\nu(t), \quad J'_\nu(t) = -J_{\nu+1}(t) + \frac{\nu}{t} J_\nu(t). \tag{7.17}$$

◀ Раскрыв левые части формул (7.16), получим

$$\nu t^{\nu-1} J_\nu(t) + t^\nu J'_\nu(t) = t^\nu J_{\nu-1}(t), \quad -\nu t^{-\nu-1} J_\nu(t) + t^{-\nu} J'_\nu(t) = -t^{-\nu} J_{\nu+1}(t),$$

или

$$\frac{\nu}{t} J_\nu(t) + J'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t), \quad -\frac{\nu}{t} J_\nu(t) + J'_\nu(t) = -J_{\nu+1}(t).$$

Отсюда вытекают формулы (7.17). ▶

Следствие 7.4. Для функций Бесселя верны следующие формулы приведения:

$$J_{\nu-1}(t) - J_{\nu+1}(t) = 2J'_\nu(t), \qquad J_{\nu-1}(t) + J_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t} J_\nu(t).$$

◀ Доказательство основано на сложении и вычитании равенств (7.17). ▶

Можно показать, что для функций Бесселя верна следующая асимптотическая формула:

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \Big(\cos\Big(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big).$$

Из этой формулы, в частности, вытекает, что функция $J_\nu(t)$ имеет бесконечно много нулей $\mu_{\nu m}$, последовательность которых стремится к ∞, причем с ростом t нули все более приближаются к нулям косинуса $\cos\Big(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)$. Значит, оператор Лапласа имеет бесконечный набор собственных функций $F_{nm}(r,\varphi)$ вида

$$J_0\Big(\frac{\mu_{0m} r}{r_0}\Big), \quad J_n\Big(\frac{\mu_{nm} r}{r_0}\Big) \cos n\varphi, \quad J_n\Big(\frac{\mu_{nm} r}{r_0}\Big) \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots, \ m = 1, 2, \ldots$$

Из общей теории линейных операторов можно заключить, что представленная система собственных функций является ортогональной и замкнутой. Ортогональность $F_{n_1 m_1}$ и $F_{n_2 m_2}$ при разных n_1 и n_2 — довольно очевидный факт, поскольку, например

$$\iint\limits_{r \leqslant r_0} F_{n_1 m_1}(r,\varphi)\, F_{n_2 m_2}(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos n_1\varphi \, \cos n_2\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{r_0} J_{n_1}\Big(\frac{\mu_{n_1 m_1} r}{r_0}\Big)\Big(\frac{\mu_{n_2 m_2} r}{r_0}\Big) r\, dr = 0$$

из-за первого интеграла. При $n_1 = n_2 = n$ ортогональность, являющаяся следствием самосопряженности оператора Лапласа, не настолько очевидна и сводится к соотношению

$$\int\limits_0^{r_0} J_n\Big(\frac{\mu_{n m_1} r}{r_0}\Big)\, J_n\Big(\frac{\mu_{n m_2} r}{r_0}\Big) r\, dr = 0.$$

Теорема 7.7. Для любого ν и любых корней μ_1, μ_2 функции $J_\nu(t)$ верно равенство

$$\int\limits_0^L J_\nu\Big(\frac{\mu_1 t}{L}\Big)\, J_\nu\Big(\frac{\mu_2 t}{L}\Big) t\, dt = 0. \tag{7.18}$$

◀ Заменой переменных равенство (7.18) можно свести к случаю $L = 1$. На этом случае и остановимся. Функции $y_1(t) = J_\nu(\mu_1 t)$, $y_2(t) = J_\nu(\mu_2 t)$ являются решениями уравнений

$$t^2 y_1'' + t y_1' + (\mu_1^2 t^2 - \nu^2) y_1 = 0, \qquad t^2 y_2'' + t y_2' + (\mu_2^2 t^2 - \nu^2) y_2 = 0.$$

Умножим первое уравнение на y_2, второе на y_1 и вычтем из первого второе:

$$-t^2W[y_1; y_2]'(t) - tW[y_1; y_2](t) + (\mu_1^2 - \mu_2^2)t^2 y_1(t)\, y_2(t) = 0.$$

После деления на t получаем:

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2) y_1(t)\, y_2(t) t = \big(tW[y_1; y_2](t)\big)'.$$

Проинтегрируем:

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2) \int\limits_0^1 y_1(t)\, y_2(t) t\, dt = tW[y_1; y_2](t)\Big|_0^1.$$

Отметим, что $tW[y_1; y_2](t) = 0$ при $t = 0$ (минимальная степень y_1 и y_2 в нуле равна ν, а минимальная степень их производных $\nu - 1$; при умножении на t получаем $2\nu > 0$; при $\nu = 0$ функции y_1, y_2, а значит и W, в нуле аналитические). Поэтому

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2) \int\limits_0^1 y_1(t)\, y_2(t) t\, dt = W[y_1; y_2](1). \tag{7.19}$$

Если μ_1 и μ_2 — нули функции Бесселя, то $y_1(1) = y_2(1) = 0$. Следовательно,

$$W[y_1; y_2](1) = \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix} = 0$$

и равенство (7.18) для $L = 1$ доказано. ►

Равенство (7.18) известно как ***свойство ортогональности функций Бесселя***.

Замечание. Равенство (7.18) остается верным, если μ_1, μ_2 — нули функции $J_\nu'(t)$. В этом случае $y_1'(1) = y_2'(1) = 0$. Этот случай соответствует ортогональности соответствующих собственных функций при граничных условиях II рода.

Отметим, что равенство (7.19) доказано для любых значений μ_1, μ_2, не обязательно являющихся нулями функции Бесселя. С помощью предельного перехода можно доказать следующее утверждение.

Теорема 7.8. Если μ_0 – нуль функции $J_\nu(t)$, то

$$\int\limits_0^L J_\nu\Big(\frac{\mu_0 t}{L}\Big)^2 t\, dt = \frac{L^2}{2}\big(J_\nu'(\mu_0)\big)^2 = \frac{L^2}{2}\big(J_{\nu+1}(\mu_0)\big)^2.$$

◄ Два варианта представления вытекают из формул дифференцирования. Согласно (7.19), для любого значения μ

$$\int\limits_0^L J_\nu(\mu t)\, J_\nu(\mu_0 t)\, t\, dt = \frac{\mu_0 J_\nu(\mu) J_\nu'(\mu_0)}{\mu^2 - \mu_0^2}.$$

Переходя к пределу при $\mu \to \mu_0$, получаем

$$\int\limits_0^L J_\nu(\mu_0 t)^2 t\, dt = \lim_{\mu\to\mu_0} \frac{\mu_0 J_\nu(\mu) J_\nu'(\mu_0)}{\mu^2 - \mu_0^2} = \lim_{\mu\to\mu_0} \frac{\mu_0 J_\nu'(\mu) J_\nu'(\mu_0)}{2\mu} = \frac{\big(J_\nu'(\mu_0)\big)^2}{2}.$$

Общий случай сводится к доказанному частному случаю $L = 1$ заменой переменных $\dfrac{t}{L} \to t$. ►

7.4. Задача Штурма — Лиувилля для шара

Рассмотрим задачу на собственные функции

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, \quad u \in G; \\ u\big|_{\partial G} = 0, \end{cases} \tag{7.20}$$

где G — шар радиуса r_0.

Запишем оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\Big). \tag{7.21}$$

Сферические кооординаты выбраны потому, что при перемещении по шару эти координаты изменяются по независимым диапазонам. При этом, как свидетельствует запись оператора Лапласа в сферических координатах, он распадается на слагаемые по переменным.

Решение задачи на собственные значения будет искать в виде $u = R(r)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi)$. Подставив в уравнение, получим

$$\frac{1}{r^2}(r^2R')'\Theta\Phi + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}R(\sin\vartheta\Theta')'\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\,R\Theta\Phi'' = \lambda R\Theta\Phi.$$

Делим уравнение на $R\Theta\Phi$ и умножаем на $r^2\sin^2\vartheta$:

$$\sin^2\vartheta\frac{(r^2R')'}{R} + \sin\vartheta\frac{(\sin\vartheta\Theta')'}{\Theta} + \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda r^2\sin^2\vartheta.$$

Получили, что сумма трех функций от разных аргументов есть постоянная. Но при этом третье слагаемое зависит лишь от φ, а остальные от φ не зависят. Поэтому $\Phi''/\Phi = \mathrm{const}$, т.е. Φ является собственной функцией оператора двойного дифференцирования. Еще из анализа задачи Штурма — Лиувилля для круга мы знаем, что такие функции имеют вид

$$\Phi^{\mathrm{c}}_n(\varphi) = \cos n\varphi, \quad n = 0,\,1,\,\ldots,; \qquad \Phi^{\mathrm{s}}_n(\varphi) = \sin n\varphi, \quad n = 1,\,2,\,\ldots$$

При этом

$$\frac{(\Phi^{\mathrm{c}}_n)''}{\Phi^{\mathrm{c}}_n} = \frac{(\Phi^{\mathrm{c}}_n)''}{\Phi^{\mathrm{c}}_n} = -n^2.$$

С учетом этого получаем:

$$\sin^2\vartheta\frac{(r^2R')'}{R} + \sin\vartheta\frac{(\sin\vartheta\Theta')'}{\Theta} = \lambda r^2\sin^2\vartheta + n^2.$$

Разделим на $\sin^2\vartheta$ и соответствующим образом сгруппируем слагаемые:

$$\frac{(r^2R')'}{R} - \lambda r^2 + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{(\sin\vartheta\Theta')'}{\Theta} - \frac{n^2}{\sin^2\vartheta} = 0.$$

Опять переменные разделились. Для Θ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{(\sin\vartheta\Theta')'}{\Theta} - \frac{n^2}{\sin^2\vartheta} = \mu = \mathrm{const},$$

откуда

$$\sin\vartheta(\sin\vartheta\Theta')' - (n^2 + \mu\sin^2\vartheta)\Theta = 0.$$

Выполним замену переменной $\cos\vartheta = t$. Тогда

$$\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} = (t^2-1)\frac{\partial}{\partial t},$$

так что уравнение примет следующий вид:

$$(1-t^2)\Theta'' - 2t\Theta' - \Big(\frac{n^2}{1-t^2} + \mu\Big)\Theta = 0. \tag{7.22}$$

Здесь параметр n определяется выбором функции от φ, а параметр μ должен быть выбран так, чтобы уравнение имело решение, ограниченное при $t \to \pm 1$.

Отметим, что для любых двух решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения (7.22) для определителя Вронского верно соотношение

$$W[y_1; y_2](t) = \frac{C}{1-t^2}$$

(оно получается так же, как и соотношение (7.13) для уравнения Бесселя). Из этого соотношения вытекает, что хотя бы одно решение уравнения является неограниченным в точках -1 и 1.

Теорема 7.9. Уравнение (7.22) имеет ограниченное решение тогда и только тогда, когда $\mu = -m(m+1)$, $m = 0, 1, \dots$

Рассмотрение уравнения (7.22) начнем с частного случая $n = 0$, $\mu = -m(m+1)$.

7.5. Уравнение Лежандра

Уравнение

$$(1-t^2)y'' - 2ty' - \mu y = 0 \tag{7.23}$$

называется ***уравнением Лежандра***.

Решение уравнения Лежандра можно искать в виде степенного ряда $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Подставив ряд в дифференциальное уравнение, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n - \mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0,$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n+1)+\mu)a_n\big] t^n = 0.$$

Из равенства нулю степенного ряда заключаем, что равны нулю все его коэффициенты:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n+1)+\mu)a_n,$$

т.е.

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)+\mu}{(n+2)(n+1)}\, a_n, \quad n = 0, 1, \dots \tag{7.24}$$

Соотношение (7.24) определяет две последовательности коэффициентов: четные и нечетные. Эти последовательности отвечают двум независимым решениям, первое соответствует $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, второе $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Можно показать, что любое решение не ограничено при $t \to \pm 1$ за исключением случая, когда $\mu = -m(m+1)$ для некоторого целого числа m. В этом случае $a_{m+2} = 0$ и далее все коэффициенты тоже обнуляются, решением уравнения Лежандра оказывается многочлен. Из этого следует, что при значениях $\mu = -m(m+1)$, и только при них, уравнение Лежандра имеет ограниченное решение.

Теорема 7.10. При $\mu = -m(m+1)$ уравнение Лежандра имеет ограниченное решение, являющееся полиномом. Это решение может быть представлено в виде

$$P_m(t) = C\frac{d^m}{dt^m}\big[(t^2-1)^m\big].$$

◀ Доказательство можно провести прямой проверкой. Для упрощения выкладок используем специальный прием. Дифференцируя $z(t) = (t^2-1)^m$ и умножая на t^2-1, получаем

$$(t^2-1)z' = 2mt(t^2-1)^m = 2mtz.$$

Продифференцируем это равенство m раз. Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона для дифференцирования произведения:

$$(uv)^{(m)} = uv^{(m)} + mu'v^{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{2}u''v^{(m-2)} + \ldots$$

Согласно этой формуле,

$$\begin{aligned}\big((t^2-1)z'\big)^{(m)} = (t^2-1)z^{(m+1)} + m(t^2-1)'z^{(m)} + \frac{m(m-1)}{2}(t^2-1)''z^{(m-1)} &= \\ = (t^2-1)z^{(m+1)} + 2mtz^{(m)} + m(m-1)z^{(m-1)}&.\end{aligned}$$

Аналогично

$$(2mtz)^{(m)} = 2mtz^{(m)} + m(2mt)'z^{(m-1)} = 2mtz^{(m)} + 2m^2z^{(m-1)}.$$

Следовательно,

$$(t^2-1)z^{(m+1)} + 2mtz^{(m)} + m(m-1)z^{(m-1)} = 2mtz^{(m)} + 2m^2z^{(m-1)},$$

или

$$(t^2-1)z^{(m+1)} - m(m+1)z^{(m-1)} = 0.$$

Продифференцируем еще раз:

$$(t^2-1)z^{(m+2)} + 2tz^{(m+1)} - m(m+1)z^{(m)} = 0.$$

Полученное уравнение означает, что функция $z^{(m)}$ является решением уравнения Лежандра. ▶

Решение уравнения Лежандра определяется с точностью до числового множителя. Полагая $C = \frac{1}{2^m m!}$, получим многочлен

$$P_m(t) = \frac{1}{2^m m!}\,\frac{d^m}{dt^m}\big((t^2-1)^m\big), \tag{7.25}$$

называемый ***многочленом Лежандра***. Формула (7.25) представления многочлена Лежандра называется ***формулой Родрига***.

Многочлены Лежандра обладают следующим ***свойством ортогональности***:

$$\int_{-1}^{1} P_m(t)\,P_k(t)\,dt = 0, \quad m \neq k.$$

Это свойство вытекает из существа исходной задачи Штурма — Лиувилля, но может быть доказано непосредственно. Обозначим $Z_m(t) = (t^2-1)^m$. Тогда $P_m = C_m (Z_m)^{(m)}$ (аргументы функций для краткости опущены, нормирующий множитель обозначен через C_m). Используя интегрирование по частям и полагая, что $m < k$, находим

$$\int_{-1}^{1} P_m(t)\,P_k(t)\,dt = C_m C_k \int_{-1}^{1} (Z_m(t))^{(m)} (Z_k(t))^{(k)} dt =$$
$$= C_m C_k (Z_m(t))^{(m)} (Z_k(t))^{(k-1)}\Big|_{-1}^{1} - C_m C_k \int_{-1}^{1} (Z_m(t))^{(m+1)} (Z_k(t))^{(k-1)} dt =$$
$$= -C_m C_k \int_{-1}^{1} (Z_m(t))^{(m+1)} (Z_k(t))^{(k-1)} dt,$$

поскольку функция $(t^2-1)^k$ имеет в точках -1 и 1 нули кратности k, а значит, ее производные до порядка $k-1$ включительно обращаются в этих точках в нуль. Повторяя процедуру многократно, получаем

$$\int_{-1}^{1} P_m(t)\,P_k(t)\,dt = (-1)^{m+1} C_m C_k \int_{-1}^{1} (Z_m(t))^{(2m+1)} (Z_k(t))^{(k-m-1)} dt. \tag{7.26}$$

Интеграл справа равен нулю, так как множитель $(Z_m(t))^{(2m+1)}$ в подынтегральной функции есть производная порядка $2m+1$ от многочлена степени $2m$, т.е. равен нулю.

Итак, многочлены Лежандра в $L^2[-1,1]$ образуют ортогональную систему. Ясно, что линейная оболочка полиномов Лежандра содержит все полиномы, а значит, ортогональная система полиномов Лежандра замкнута* в $L^2[-1,1]$. Свойство ортогональности распространяется на любые решения уравнения Лежандра: если $y_\alpha(t)$ и $y_\beta(t)$ — решения уравнения (7.23), отвечающие разным значениям α и β параметра μ, то

$$\int_{-1}^{1} y_\alpha(t)\,y_\beta(t)\,dt = 0$$

(доказать этот факт можно по той же схеме, что и в случае функций Бесселя).

Вычислим квадраты норм полиномов Лежандра в $L^2[-1,1]$.

Теорема 7.11. Для полиномов Лежандра выполняется равенство

$$\|P_m\|^2 = \frac{2}{2m+1}.$$

◄ Имеем:

$$\int_{-1}^{1} P_m^2(t)\,dt = (-1)^m C_m^2 \int_{-1}^{1} (Z_m(t))^{(2m)} Z_m(t) dt.$$

*Согласно одной из теорем Вейерштрасса, любая функция, непрерывная на отрезке, может быть приближена полиномами в равномерной норме, а следовательно, и в L^2-норме. Отсюда следует, что полиномы всюду плотны в $L^2[-1,1]$.

(это аналогично (7.26) при $k = m$). Но

$$(Z_m(t))^{(2m)} = \big((t^2-1)^m\big)^{(m)} = (t^{2m})^{(2m)} = (2m)!$$

(в многочлене все слагаемые имеют степень меньше $2m$, их производная порядка $2m$ равна нулю; значит, многочлен можно заменить слагаемым старшей степени).

Таким образом,

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m^2(t)\,dt = (-1)^m(2m)!\,C_m^2\int\limits_{-1}^{1}(t^2-1)^m dt = (2m)!\,C_m^2\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^m dt = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^m dt.$$

Интеграл в правой части заменой переменных $\dfrac{1+t}{2} = s$ сводится к бета-функции:

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^m dt = 2^{2m+1}\int\limits_{0}^{1} s^m(1-s)^m ds =$$
$$= 2^{2m+1}\mathrm{B}(m+1,m+1) = 2^{2m+1}\frac{(\Gamma(m+1))^2}{\Gamma(2m+2)} = 2^{2m+1}\frac{(m!)^2}{(2m+1)!}. \qquad (7.27)$$

В конечном счете

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m^2(t)\,dt = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\cdot 2^{2m+1}\frac{(m!)^2}{(2m+1)!} = \frac{2}{2m+1}. \qquad \blacktriangleright$$

7.6. Присоединенное уравнение Лежандра

Уравнение

$$(1-t^2)y'' - 2ty' - \Big(\frac{n^2}{1-t^2}+\mu\Big)y = 0$$

называется ***присоединенным уравнением Лежандра***. Здесь интересен случай $\mu = -\nu^2$.

Чтобы упростить уравнение, выполним в этом уравнении замену $y = (1-t^2)^\alpha z$, подобрав затем подходящее значение α. Для этой замены

$$y' = (1-t^2)^\alpha z' - 2\alpha t(1-t^2)^{\alpha-1}z,$$
$$y'' = (1-t^2)^\alpha z'' - 4\alpha t(1-t^2)^{\alpha-1}z' + 4\alpha(\alpha-1)t^2(1-t^2)^{\alpha-2}z - 2\alpha(1-t^2)^{\alpha-1}z.$$

В результате получаем

$$(1-t^2)z'' - 2(2\alpha+1)tz' - (\mu+2\alpha+4\alpha^2)z + \frac{4\alpha^2-n^2}{1-t^2}z = 0.$$

При определенном значении параметра α последнее слагаемое в уравнении исчезает. Действительно, выберем $a = n/2$. Тогда $4\alpha^2 - n^2 = 0$ и уравнение сводится к следующему:

$$(1-t^2)z'' - 2(n+1)tz' - (\mu+n+n^2)z = 0. \qquad (7.28)$$

Получилось уравнение, похожее на уравнение Лежандра, но тем не менее это не уравнение Лежандра, поскольку отличается коэффициентом при первой производной. Тем не менее оказывается, что уравнение (7.28) можно свести к уравнению Лежандра. Для этого продифференцируем уравнение Лежандра (7.23) n раз (надо использовать формулу бинома Ньютона). Получим

$$(1-t^2)y^{(n+2)} - 2(n+1)ty^{(n+1)} - (\mu+(n(n+1))y^{(n)} = 0,$$

т.е. уравнение (7.28).

Таким образом, если $y(t)$ — решение уравнения Лежандра, то $y^{(n)}(t)$ — решение уравнения (7.28). В частности, n-я производная полинома Лежандра $P_m(t)$ порядка m является решением уравнения (7.28) с $\mu = -m(m+1)$. Поэтому среди решений присоединенного уравнения Лежандра с параметрами $\mu = -m(m+1)$ и n есть такое:

$$P_m^n(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{dt^n} P_m(t).$$

Функции $P_m^n(t)$ называются ***присоединенными функциями Лежандра***.

Присоединенные функции Лежандра при четном n являются полиномами. При нечетном n они представляют собой многочлен, умноженный на $\sqrt{1-t^2}$. Впрочем, если учесть, что к уравнениям Лежандра мы пришли в результате замены $\cos\vartheta = t$, то с присоединенными функциями Лежандра как функциями ϑ все в порядке: они оказываются многочленами от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. Отметим, что формально можно рассматривать функции $P_m^n(t)$ с параметрами $m < n$, но в этом случае $P_m^n(t) = 0$.

Теорема 7.12. Для любого натурального n функции $P_m^n(t)$, $m = n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots$, образуют полную ортогональную систему в $L^2[-1,1]$. При этом

$$\|P_m^n\|^2 = \frac{2}{2m+1}\,\frac{(m+n)!}{(m-n)!}.$$

◀ Ортогональность этой системы вытекает из общих свойств собственных функций оператора Лапласа. Впрочем, этот факт можно установить и непосредственно, вычислив интеграл

$$(P_m^n,\ P_k^n) = C_m C_k \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^n \big((t^2-1)^m\big)^{(m+n)} \big((t^2-1)^k\big)^{(k+n)} dt,$$

который оказывается нулевым.

Действительно, используя выше введенное обозначение $Z_m(t) = (t^2-1)^m$, можем записать

$$(P_m^n,\ P_k^n) = C_m C_k (-1)^n \int\limits_{-1}^{1} Z_n Z_m^{(m+n)} Z_k^{(k+n)} dt.$$

Полагая, что $k > m$, введем дополнительное обозначение $\zeta_{nm} = Z_n Z_m^{(m+n)}$. Функция $\zeta_{nm}(t)$ представляет собой многочлен степени $m+n$, причем в точках $t = \pm 1$ этот многочлен имеет нули кратности n (из-за сомножителя Z_n). Используя интегрирование по частям, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} Z_n Z_m^{(m+n)} Z_k^{(k+n)} dt = \int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm} Z_k^{(k+n)} dt = \zeta_{nm} Z_k^{(k+n-1)}\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} \zeta'_{nm} Z_k^{(k+n-1)} dt = -\int\limits_{-1}^{1} \zeta'_{nm} Z_k^{(k+n-1)} dt.$$

Повторяя процесс n раз, находим

$$\int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm} Z_k^{(k+n)} dt = (-1)^n \int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n)} Z_k^{(k)} dt.$$

Все внеинтегральные слагаемые оказались нулевыми в силу кратных нулей функции ζ_{nm}. Продолжаем процесс:

$$\int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n)} Z_k^{(k)} dt = \zeta_{nm}^{(n)} Z_k^{(k-1)}\Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n+1)} Z_k^{(k-1)} dt = -\int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n+1)} Z_k^{(k-1)} dt,$$

так как $Z_k^{(k-1)}$ обращается в нуль в концах отрезка интегрирования. Продолжаем k раз:

$$\int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n)} Z_k^{(k)} dt = (-1)^k \int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n+k)} Z_k dt.$$

Функция $\zeta_{nm}^{(n+k)}$ — это производная порядка $n+k$ от многочлена степени $n+m$. Так как $k > m$, то эта производная равна нулю. Значит,

$$(P_m^n,\ P_k^n) = C_m C_k \int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n)} Z_k^{(k)} dt = C_m C_k (-1)^k \int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n+k)} Z_k dt = 0.$$

Аналогичные выкладки можно провести при $k = m$. Получим

$$\|P_m^n\|^2 = (P_m^n,\ P_m^n) = (C_m)^2 (-1)^m \int\limits_{-1}^{1} \zeta_{nm}^{(n+m)} Z_m dt.$$

Здесь $\zeta_{nm}^{(n+m)}$ — производная порядка $m+n$ от многочлена степени $m+n$. Это число, для вычисления которого многочлен можно заменить его старшим слагаемым:

$$\zeta_{nm}^{(n+m)} = \big(Z_n Z_m^{(m+n)}\big)^{(m+n)} = \big(t^{2n}(t^{2m})^{(m+n)}\big)^{(m+n)} = \frac{(2m)!}{(m-n)!}\big(t^{2n}t^{2m-m-n}\big)^{(m+n)} = \frac{(2m)!(m+n)!}{(m-n)!}.$$

В результате получаем

$$\|P_m^n\|^2 = (C_m)^2 \frac{(2m)!(m+n)!}{(m-n)!}(-1)^m \int\limits_{-1}^{1} Z_m dt = \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}\,\frac{(2m)!(m+n)!}{(m-n)!}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^m dt.$$

Учитывая (7.27), окончательно получаем

$$\|P_m^n\|^2 = \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}\cdot\frac{(2m)!(m+n)!}{(m-n)!}\cdot\frac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!} = \frac{2}{2m+1}\,\frac{(m+n)!}{(m-n)!}.$$

Покажем, что для каждого n система присоединенных функций Лежандра в $L^2[-1,1]$ замкнута, т.е. для любой функции $g \in L^2[-1,1]$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую линейную комбинацию $\sum\limits_{m=n}^{N} c_m P_m^n(t)$, что

$$\Big\| g(t) - \sum_{m=n}^{N} c_m P_m^n(t) \Big\| < \varepsilon.$$

Для каждой функции $g \in L^2[-1,1]$ можно найти непрерывную функцию $G(t)$, такую, что

$$\big\| g(t) - (1-t^2)^{\frac{n}{2}} G(t) \big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция $G(t)$ может быть аппроксимирована в $L^2[-1,1]$ полиномами (например, частичными суммами ряда по полной ортогональной системе полиномов Лежандра). Следовательно, существует полином $P(t)$, для которого

$$\big\| G(t) - P(t) \big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left\|(1-t^2)^{\frac{n}{2}}G(t)-(1-t^2)^{\frac{n}{2}}P(t)\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Последовательность полиномов $(P_m(t))^{(n)}$ позволяет выразить в виде линейной комбинации любой полином $P(t)$, т.е.

$$P(t)=\sum_{m=n}^{N}c_m(P_m(t))^{(n)}.$$

Отсюда

$$\left\|g(t)-\sum_{m=n}^{N}c_mP_m^n(t)\right\|\leqslant\left\|g(t)-(1-t^2)^{\frac{n}{2}}G(t)\right\|+\left\|(1-t^2)^{\frac{n}{2}}G(t)-\sum_{m=n}^{N}c_mP_m^n(t)\right\|<\varepsilon.$$

Так как система функций $P_m^n(t)$ замкнута, она полна, т.е. содержит все ограниченные решения присоединенного уравнения Лагранжа. ►

7.7. Шаровые и сферические функции

Вернемся к задаче определения собственных функций оператора Лапласа в шаре. Задача на собственные функции распалась на три уравнения:

по переменной φ

$$\Phi-\lambda_\varphi\Phi=0,\quad \Phi(2\pi)=\Phi(0),\ \ \Phi'(2\pi)=\Phi'(0);$$

решением которой является

$$\Phi_n^{\mathrm{c}}(\varphi)=\cos n\varphi,\ \ n=0,\,1,\,\ldots,\qquad \Phi_n^{\mathrm{s}}(\varphi)=\sin n\varphi,\quad n=1,\,2,\,\ldots,$$

с собственнными значениями $-n^2$;

по переменной ϑ для каждого значения $n=0,\,1,\,\ldots$

$$\sin\vartheta(\sin\vartheta\Theta')'-(n^2+\mu\sin^2\vartheta)\Theta=0,$$

что заменой переменного $\cos\vartheta=t$ (т.е. $\Theta(\vartheta)=y(\cos\vartheta)=y(t)$) сводится к присоединенному уравнению Лежандра

$$(1-t^2)y''-2ty'-\Big(\frac{n^2}{1-t^2}+\mu\Big)y=0.$$

Его решения — присоединенные функции Лежандра $P_m^n(t)$ — дают решения уравнения по ϑ:

$$\Theta_{nm}(\vartheta)=P_m^n(\cos\vartheta),\ \ m=n,\,n+1,\,\ldots,$$

а соответствующие собственные значения равны $\mu_m=-m(m+1)$;

по переменной r для каждой пары значений n и m

$$\frac{(r^2R')'}{R}-\lambda r^2+\mu=0,$$

или (с переобозначением $\lambda=-\omega^2$)

$$(r^2R')'+(\omega^2r^2-m(m+1))R=0. \tag{7.29}$$

Уравнение (7.29) после раскрытия скобок принимает следующий вид:

$$r^2R''+2rR'+(\omega^2r^2-m(m+1))R=0.$$

Это отличается от уравнения Бесселя лишь коэффициентом при первой производной. Это различие можно ликвидировать. Для этого выполним замену переменной $R = r^\alpha y$, подобрав затем нужный параметр α. После сокращения на r^α получим:

$$r^2y'' + 2(\alpha+1)ry' + (\omega^2r^2 - m(m+1) + \alpha(\alpha+1))y = 0.$$

Чтобы скорректировать коэффициент при первой производной, положим $\alpha = -1/2$:

$$r^2y'' + ry' + \left(\omega^2r^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2\right)y = 0.$$

Это параметризованное* уравнение Бесселя полуцелого порядка. Его решением, ограниченным при $r \to 0$, является $y(r) = J_{m+1/2}(\omega r)$. Следовательно, решением уравнения (7.29) будет

$$R(r) = \frac{J_{m+1/2}(\omega r)}{\sqrt{r}}.$$

Функцию $R(r)$ нужно выбирать в соответствии с граничным условием поставленной задачи (7.20): $R(r_0) = 0$. В результате получаем $J_{m+1/2}(\omega r_0) = 0$. Обозначив $\mu_{m+1/2,k}$ нули функции Бесселя, получим решения

$$R_{nmk}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}J_{m+1/2}\Big(\frac{\mu_{m+1/2,k}r}{r_0}\Big), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Комбинируя найденные функции получаем:

1) собственные функции оператора Лапласа на сфере

$$\begin{aligned} Y^{\mathrm{c}}_{nm}(\vartheta,\varphi) &= P^n_m(\cos\vartheta)\,\cos n\varphi, \;\; n = 0,\, 1,\, \ldots, \\ Y^{\mathrm{s}}_{nm}(\vartheta,\varphi) &= P^n_m(\cos\vartheta)\,\sin n\varphi, \;\; n = 1,\, 2,\, \ldots, \quad m = 0,\, 1,\, \ldots \end{aligned}$$

с собственными значениями $\lambda_{nm} = -m(m+1)$;

2) собственные функции оператора Лапласа в шаре

$$\begin{aligned} Z^{\mathrm{c}}_{nmk}(r,\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{r}}J_{m+1/2}\Big(\frac{\mu_{m+1/2,k}r}{r_0}\Big)P^n_m(\cos\vartheta)\,\cos n\varphi, \;\; n = 0,\, 1,\, \ldots, \\ Z^{\mathrm{s}}_{nmk}(r,\vartheta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{r}}J_{m+1/2}\Big(\frac{\mu_{m+1/2,k}r}{r_0}\Big)P^n_m(\cos\vartheta)\,\sin n\varphi, \;\; n = 1,\, 2,\, \ldots, \end{aligned}$$

с собственными значениями $\lambda_{nmk} = -\Big(\frac{\mu_{m+1/2,k}}{r_0}\Big)^2$.

*Параметризованное — потому что включает параметр ω, его, напомним, можно убрать, взяв новую независимую переменную ωr.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: учеб. для вузов. 2-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

[2] Тверская Е.С., Чигирева О.Ю. Решение краевых задач для уравнения Лапласа: метод. указания к выполнению домашнего задания по курсу «Уравнения математической физики». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 48 с.

[3] Чигирева О.Ю. Ряды Фурье. Преобразование Фурье: метод. указания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 51 с.

[4] Шарохина И.В. Уравнения в частных производных: метод. указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 72 с.

[5] Малов Ю.И., Сержантова М.М., Чередниченко А.В. Волновое уравнение: метод. указания к выполнению типового расчета по курсу «Уравнения математической физики». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 47 с.

[6] Сборник задач по уравнениям математической физики / под ред. В.С. Владимирова. 4-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2003. 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ