Занятие 1. Свертка

Определение. Свойства: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность. Теорема смещения:

$$(S_\alpha f) * (S_\beta g) = S_{\alpha+\beta}(f * g),$$

где $(S_\alpha f)(x) = f(x-\alpha)$ (сдвиг на α).

1. Вычислить автосвертки функций:
а) $e^{-|x|}$; б) e^{-x^2}.

Ответ: а) $(1+|x|e^{-|x|})$; б) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. Вычислить свертку функций $f(x) = x$ и $g(x) = e^{-x^2}$.

Свертка полуфинитных функций

3. Вычислить свертки функций:
а) $f(x) = g(x) = \eta(x)$; б) $f(x) = x\eta(x)$, $g(x) = \eta(x)$; в) $f(x) = x^m\eta(x)$, $g(x) = x^k\eta(x)$.

Ответ: а) $x\eta(x)$; б) $\dfrac{1}{2}x^2\eta(x)$; в) $\dfrac{m!\,k!}{(m+k+1)!}x^{m+k+1}\,\eta(x)$.

Свертка кусочно линейных финитных функций

Пример. Найти автосвертку функций $\mathrm{rect}(x)$ (рис. 1.1) и $\Lambda(x)$ (рис. 1.2).

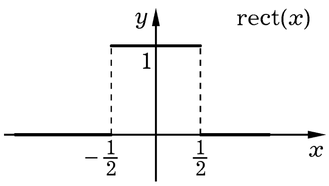

Рис. 1.1

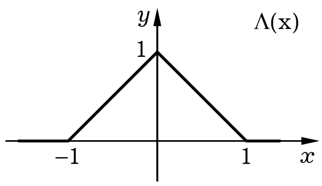

Рис. 1.2

Решение: Поскольку $\mathrm{rect}(x) = \eta(x+0{,}5) - \eta(x-0{,}5)$, находим

$$\mathrm{rect}*\mathrm{rect} = S_{0,5}\eta * S_{0,5}\eta - 2 * S_{0,5}\eta * S_{-0,5}\eta + S_{-0,5}\eta * S_{-0,5}\eta = S_1(\eta*\eta) - 2\eta*\eta + S_{-1}(\eta*\eta).$$

Следовательно, с учетом $(\eta * \eta)(x) = x\eta(x)$

$$\mathrm{rect}*\mathrm{rect}(x) = (x-1)\eta(x-1) - 2x\eta(x) + (x+1)\eta(x+1) = \Lambda(x).$$

Далее, полагая $f(x) = x\eta(x)$

$$\begin{aligned}\Lambda * \Lambda &= (S_1 f - 2f + S_{-1}f) * (S_1 f - 2f + S_{-1}f) = \\ &= S_2(f*f) + 4f*f + S_{-2}(f*f) - 4S_1(f*f) + 2f*f - 4S_{-1}(f*f) = \\ &= S_2(f*f) - 4S_1(f*f) + 6f*f - 4S_{-1} + S_{-2}(f*f).\end{aligned}$$

Для функции $f(x) = x\eta(x)$ имеем $(f*f)(x) = \dfrac{x^3}{6}\,\eta(x)$. Поэтому

$$\Lambda*\Lambda(x) = \frac{(x-2)^3}{6}\eta(x-2) - \frac{4}{6}(x-1)^3\eta(x-1) + x^3\eta(x) - \frac{4}{6}(x+1)^3\eta(x+1) + \frac{(x+2)^3}{6}\eta(x+2).$$

Такое представление не очень удобно. Его можно переписать следующим образом:

$$\Lambda * \Lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,\ -2); \\ \dfrac{(x+2)^3}{6}, & x \in [-2,\ -1); \\ \dfrac{(x+2)^3}{6} - \dfrac{4}{6}(x+1)^3, & x \in [-1,\ 0); \\ \dfrac{(x+2)^3}{6} - \dfrac{4}{6}(x+1)^3 + x^3, & x \in [0,\ 1); \\ \dfrac{(x+2)^3}{6} - \dfrac{4}{6}(x+1)^3 + x^3 - \dfrac{4}{6}(x-1)^3, & x \in [1,\ 2); \\ \dfrac{(x+2)^3}{6} - \dfrac{4}{6}(x+1)^3 + x^3 - \dfrac{4}{6}(x-1)^3 + \dfrac{(x-2)^3}{6}, & x \in [2,\ +\infty). \end{cases}$$

Упрощая, окончательно получаем:

$$\Lambda * \Lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty,\ -2); \\ \dfrac{(x+2)^3}{6}, & x \in [-2,\ -1); \\ \dfrac{-3x^3 - 6x^2 + 4}{6}, & x \in [-1,\ 0); \\ \dfrac{3x^3 - 6x^2 + 4}{6}, & x \in [0,\ 1); \\ \dfrac{-x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{6}, & x \in [1,\ 2); \\ 0, & x \in [2,\ +\infty). \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 1.3.

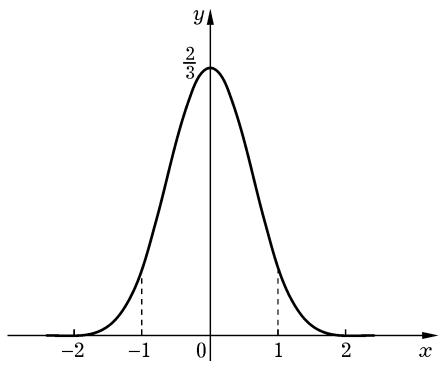

Рис. 1.3

4. Найти свертку функций $\mathrm{rect}(x)$ и $\Lambda(x)$.

5. Найти свертки функций, заданных графически на рис. 1.4, с функцией $\mathrm{rect}(x)$.

На дом

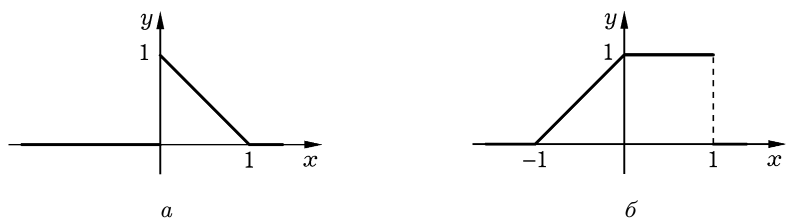

Рис. 1.4

1. Вычислить автосвертки функций:
а) $\dfrac{1}{1+|x|}$; б) $\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. Вычислить свертку функций $f(x) = x$ и $g(x) = e^{-|x|}$.

3. Вычислить свертки функций:
а) $f(x) = x\eta(x)$ и $g(x) = \sin(x)\,\eta(x)$; б) $f(x) = \operatorname{sh}(x)\,\eta(x)$ и $g(x) = \sin(x)\,\eta(x)$;
в) $f(x) = \eta(x)$ и $g(x) = x\eta(x-1)$; г) $f(x) = x\eta(x)$ и $g(x) = \eta(x+1)$;
д) $f(x) = x\eta(x-1)$ и $g(x) = (x-1)\eta(x)$; е) $f(x) = g(x) = \eta(a-|x|)$.

4. Вычислить свертки функций, заданных графически (рис. 1.5, 1.6).

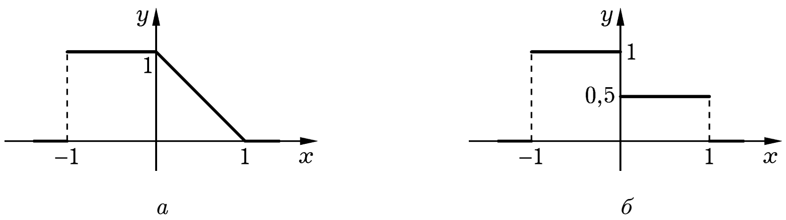

Рис. 1.5

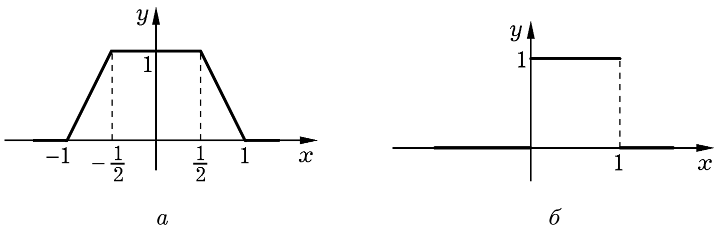

Рис. 1.6

Занятие 2. Классификация уравнений 2-го порядка

Преобразование уравнения при замене переменных. Уравнение характеристик. Случай двух переменных. Типы дифференциальных уравнений. Техника приведения к каноническому виду.

1. Определить вид уравнения, привести к каноническому виду
а) $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$; б) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - u_x - u_y = 0$;
в) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$; г) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0$.

2. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$(l + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Исследовать зависимость областей от параметра l.

3. Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его вид сохраняется.
а) $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$; б) $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$; в) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$;
г) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$; д) $(\sin^2 x)\, u_{xx} - 2y(\sin x)\, u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

На дом:
Будак и др., гл. 1. Задачи: 5, 11, 16, 21, 22, 23.

Занятие 3. Метод распространяющихся волн

1. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx}$ с начальными условиями $u\big|_{t=0} = e^{-x^2}$, $u_t\big|_{t=0} = axe^{-x^2}$. Какое это решение, классическое или обобщенное?

2. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx}$ с начальными условиями $u\big|_{t=0} = 0$, $u_t\big|_{t=0} = \Lambda(x/a)$. Какое это решение, классическое или обобщенное? Нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2$.

3. Рассматривается задача Коши для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ (колебания струны). Как изменение начальных условий на интервале $(2, 3)$ скажется на значении $u(t, x)$ при $t = 1$ в точке $x = 0$?

4. Найти решение следующих смешанных задач:

а) $u_{tt} = a^2u_{xx},\ x > 0,\ t > 0;$
$u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = 0;\ u\big|_{x=0} = \sin\omega t.$

б) $u_{tt} = a^2u_{xx},\ x > 0,\ t > 0;$
$u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = 0;\ -u_x\big|_{x=0} = \Lambda(t - 1).$

5. Найти решение следующих задач:

а) $u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$
$u\big|_{t=0} = xe^{-x}, \quad u_t\big|_{t=0} = e^{-x};$
$u\big|_{x=0} = 0;$

б) $u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0;$
$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = xe^{-x};$
$-u_x\big|_{x=0} = 0.$

6. В задаче

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0;$$
$$u\big|_{t=0} = \frac{1}{2}\Lambda(2x - 3), \quad u_t\big|_{t=0} = 0; \qquad u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=3} = 0$$

найти профиль при $t = 10$.

Занятие 4. Метод Фурье

1. Исследовать задачу Штурма — Лиувилля на отрезке для различных типов граничных условий.

2. Решить следующие задачи:

а) $$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ &u\big|_{t=0} = x(l-x), \quad u_t\big|_{t=0} = x; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ &u\big|_{t=0} = l - x^2, \quad u_t\big|_{t=0} = 0; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=l} = 0; \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ &u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0; \\ &u_x\big|_{x=0} = t, \quad u\big|_{x=l} = 0; \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + x(l-x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ &u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0; \\ &u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

3. Решить следующие краевые задачи:

а) $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=a} = 0; \\ &u\big|_{y=0} = 2ax - x^2, \quad u_y\big|_{y=b} = \sin\frac{\pi x}{2a}; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ &u_x\big|_{x=0} = \sin\frac{\pi y}{2b}, \quad u_x\big|_{x=a} = 0; \\ &u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=b} = \cos\frac{\pi x}{a}; \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} &\Delta u = xy, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ &u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=a} = 0; \\ &u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=b} = \cos\frac{\pi x}{a}; \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} &\Delta u = \cos\frac{\pi x}{2a}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ &u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = \sin\frac{3\pi y}{2b}; \\ &u\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

Занятие 5. Преобразование Фурье

Определение. Свойства:

– линейность $F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g]$;

– теорема подобия $\widehat{f(\alpha t)}(\omega) = \dfrac{1}{\alpha}\widehat{f}\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$;

– теорема смещения $\widehat{e^{iat}f(t)}(\omega) = \widehat{f}(\omega - a)$;

– теорема запаздывания $\widehat{f(t-a)}(\omega) = e^{-ia\omega}\widehat{f}(\omega)$;

– дифференцирование оригинала $\widehat{f^{(n)}(t)}(\omega) = (i\omega)^n\widehat{f}(\omega)$;

– дифференцирование изображения $(\widehat{-it)^n f}(t)(\omega) = (\widehat{f})^{(n)}(\omega)$;

– преобразование свертки $F[f * g] = F[f]\,F[g]$.

Формула обращения. Достаточные условия.

1. Вычислить прямым интегрированием преобразование Фурье функций:
а) $\operatorname{rect}\dfrac{x}{2a}$; б) $\chi_{[a,b]}(x)$; в) $\Lambda\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$; г) $e^{-x}\eta(x)$; д) $e^{-a|x|}$; е) $xe^{-|x|}$;
ж) $xe^{|x-3|}$; з) e^{-ax^2}.

2. Вычислить преобразование Фурье рациональных функций (по таблице и по лемме Жордана):
а) $\dfrac{1}{x^2+1}$; б) $\dfrac{x}{x^2+1}$; в) $\dfrac{x-2}{x^2+4}$; г) $\dfrac{2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$;

3. Используя различные приемы, найти преобразование Фурье функций:
а) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x-1)$; б) $\dfrac{\sin x}{x^2+1}$; в) $x\sin x \cdot e^{-x}\eta(x)$;
г) $(e^{-x}\eta(x)) * \dfrac{\sin x}{x^2+1}$; д) $\operatorname{rect}\dfrac{x-a}{b} * (xe^{-x}\eta(x))$.

Указание: а) продифференцировать оригинал; б) использовать смещение; в) смещение + дифференциование; г) преобразование свертки; д) свертка + дифференцирование

4. Найти преобразование Фурье финитной функции, график которой является ломаной с вершинами:
а) $A(-1,\ 1)$, $B(0,\ 3)$, $C(1,\ 1)$; б) $A(-1,\ 0)$; $B(1,\ 2)$, $C(2,\ 0)$; в) $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$.

Решение: а) функция представима в виде $f(x) = \operatorname{rect}(x/2) + 2\Lambda(x)$. Используя образы прямоугольного и треугольного импульсов, а также теоремы подобия и запаздывания, находим:
$$F(\omega) = 2\operatorname{sinc}\omega + 2\operatorname{sinc}^2\frac{\omega}{2},$$
где $\operatorname{sinc} x = \dfrac{\sin x}{x}$.

б) функция представима в виде $f(x) = \Lambda(x) + 2\Lambda(x-1)$. Поэтому
$$F(\omega) = \operatorname{sinc}^2\frac{\omega}{2} + 2e^{i\omega}\operatorname{sinc}^2\frac{\omega}{2}.$$

в) В этом случае функция не сводится к комбинации прямоугольных и треугольных импульсов. Преобразование Фурье можно вычислить непосредственным интегрированием. Отметим, что заданную функцию путем сдвига и преобразований подобия можно свести к стандартной функции $p(x)$, которая задается соотношенеием $y = x$, $x \in [0,\ 1]$, т.е. к случаю $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 1$:

$$f(x) = y_1 \operatorname{rect}\left(\frac{x - \dfrac{x_1 + x_2}{2}}{x_2 - x_1}\right) + p\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Для функции $p(x)$ считаем преобразование Фурье непосредственно интегрированием:

$$P(\omega) = \int\limits_0^1 x e^{-i\omega x} dx = \frac{ie^{-i\omega}}{\omega} + \frac{e^{-i\omega} - 1}{\omega^2}.$$

5. Найти преобразование Фурье финитной функции, график которой является ломаной с вершинами $(1,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(7,\ 0)$.

Р е ш е н и е: График рассматриваемой функции представлен на рис. 5.7. Разложим заданную функцию в линейную комбинацию стандартных. Будем последовательно выделять («отщипывать») слагаемые и контролировать остаток. На 1-м шаге выделим треугольный импульс, тем самым убирая скачки исходной функции. Получим $f_1(x) = \operatorname{rect}\left(\dfrac{x - 2{,}5}{5}\right)$. Остаток $r_1(x) = f(x) - f_1(x)$ показан на рис. 5.8. В дальнейшем, выделяя очередные слагаемые, стремимся к тому, чтобы ломаная упрощалась за счет уменьшения количества узлов. На рис. 5.8 серым показано очередное слагаемое $f_2(x) = \Lambda\left(\dfrac{x - 3}{2}\right)$.

На рис. 5.9 показан остаток $r_2(x) = r_1(x) - f_2(x)$. Там же серым показано очередное слагаемое $f_3(x) = 2{,}5\Lambda(x - 4)$.

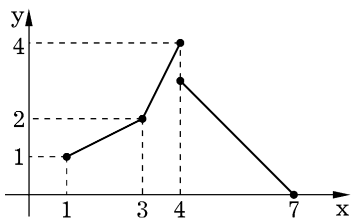

Рис. 5.7

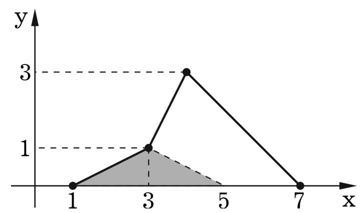

Рис. 5.8

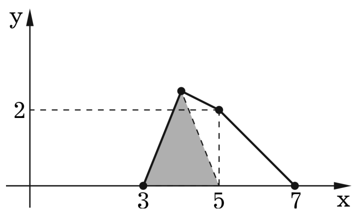

Рис. 5.9

На рис. 5.10 показан остаток $r_3(x) = r_2(x) - f_3(x)$. Серым показано очередное слагаемое $f_4(x) = 2\Lambda(x - 5)$. На рис. 5.11 показан остаток $r_4(x) = r_3(x) - f_4(x)$. Видно, что это треугольный импульс: $f_5(x) = \Lambda(x - 6)$.

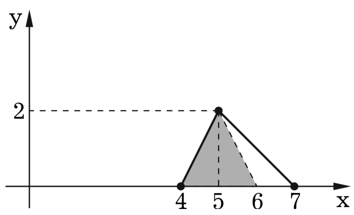

Рис. 5.10

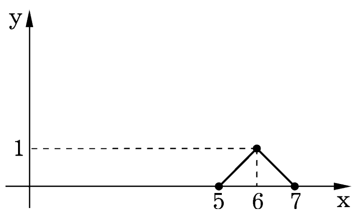

Рис. 5.11

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + f_5(x) = \\ &= \operatorname{rect}\left(\frac{x - 2{,}5}{5}\right) + \Lambda\left(\frac{x - 3}{2}\right) + \frac{5}{2}\Lambda(x - 4) + 2\Lambda(x - 5) + \Lambda(x - 6). \end{aligned}$$

Из этого представления находим:

$$F(\omega) = 5e^{-2{,}5i\omega} \operatorname{sinc} \frac{5\omega}{2} + 2e^{-3i\omega} \operatorname{sinc}^2 \omega + \frac{5}{2} e^{-4i\omega} \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega}{2} + 2e^{-5i\omega} \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega}{2} + e^{-6i\omega} \operatorname{sinc}^2 \frac{\omega}{2}.$$

На дом:

1. Вычислить преобразование Фурье функций:
а) e^{-ax^2+bx+c}; б) $\dfrac{x+1}{x^2+4x+5}$; в) $\dfrac{x\cos x}{x^2+4}$.

2. Используя различные свойства, найти преобразование Фурье функций:
а) $\chi_{[c,d]}(x) * \Lambda\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$; б) $\chi_{[0,1]}(x) * \big(x^2\chi_{[0,2]}(x) + (6-x)\chi_{[2,4]}(x) + 2\chi_{[4,5]}(x)\big)$;
в) $\big(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x-1)\big)\cos x$.

Занятие 6. Подготовка к рубежному контролю

Задача 1. Определите тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} + 2u_x + 3u_y + 5u = 0.$$

приведите его к каноническому виду

Решение: Уравнение характеристик в дифференциалах имеет следующий вид:

$$(dy)^2 - dxdy - 6(dx)^2 = 0.$$

Поскольку дискриминант квадратного уравнения положителен ($\Delta = 1+24 > 0$), уравнение относится к гиперболическому типу.

Решая уравнение характеристик, находим

$$dy = 3dx, \quad dy = -2dx.$$

Решая эти уравнения, получаем: $y - 3x = C_1$, $y + 2x = C_2$. Отсюда вытекает замена переменных:

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y + 2x.$$

Выполняем найденную замену переменных. Пересчитываем первые производные:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -3u_\xi + 2u_\eta, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta. \end{aligned}$$

Повторное применение этих формул дает

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 9u_{\xi\xi} - 12u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= -3u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Подставляем найденные выражения в дифференциальное уравнение. Сначала производные 2-го порядка:

$$\begin{array}{r|rcrcrl} 1 & u_{xx} = & 9u_{\xi\xi} & - & 12u_{\xi\eta} & + & 4u_{\eta\eta}, \\ 1 & u_{xy} = & -3u_{\xi\xi} & - & u_{\xi\eta} & + & 2u_{\eta\eta}, \\ -6 & u_{yy} = & u_{\xi\xi} & + & 2u_{\xi\eta} & + & u_{\eta\eta}, \\ \hline & & 0 \cdot u_{\xi\xi} & - & 25u_{\xi\eta} & + & 0 \cdot u_{\eta\eta}. \end{array}$$

Аналогично считаем производные 1-го порядка:

$$\begin{array}{r|rcrcl} 2 & u_x = & -3u_\xi & + & 2u_\eta, \\ 3 & u_y = & u_\xi & + & u_\eta, \\ \hline & & -3u_\xi & + & 7u_\eta. \end{array}$$

В итоге:

$$-25u_{\xi\eta} - 3u_\xi + 7u_\eta + 5u = 0,$$

или

$$u_{\xi\eta} + \frac{3}{25}u_\xi - \frac{7}{25}u_\eta - \frac{1}{5}u = 0.$$

Задача 2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = \cos\frac{7\pi y}{2b}, \quad u_y\big|_{y=0} = \sin\frac{5\pi x}{a}, \quad u\big|_{y=b} = 0.$$

Р е ш е н и е: Искомое решение представим в виде $u = v + w$, где v и w — решения следующих задач:

$$\Delta v = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=a} = 0,$$
$$v_y\big|_{y=0} = \sin\frac{5\pi x}{a}, \quad v\big|_{y=b} = 0;$$

$$\Delta w = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$
$$w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=a} = \cos\frac{7\pi y}{2b},$$
$$w_y\big|_{y=0} = 0, \quad w\big|_{y=b} = 0.$$

Первая задача — типа I–I, собственные функции $X_n(x) = \sin\omega_n x$, $\omega_n = \dfrac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, \ldots$ Решение ищем в виде $v = \sum\limits_n X_n(x)\,Y_n(y)$, где $Y_n(y)$ — искомые функции. Подставив в дифференциальное уравнение, находим (из равенства ряда нулю следует равенство нулю всех его коэффициентов): $Y_n'' - \omega_n^2 Y_n = 0$.

Подставляем в левое граничное условие по переменной y:

$$\sum_n X_n(x) Y_n'(0) = \sin\frac{5\pi x}{a} = X_5(x).$$

Из этого равенства заключаем, что

$$Y_5'(0) = 1, \quad Y_n'(0) = 0 \ \text{при} \ n \neq 5.$$

Подставляем в правое граничное условие по переменной y:

$$\sum_n X_n(x) Y_n(b) = 0.$$

Следовательно,

$$Y_n(b) = 0 \ \text{при всех} \ n.$$

Мы получили два вида задач:

при $n = 5$:

$$\begin{cases} Y_5'' - \omega_5^2 Y_5 = 0, \\ Y_5'(0) = 1, \\ Y_5(b) = 0; \end{cases}$$

при $n \neq 5$:

$$\begin{cases} Y_n'' - \omega_n^2 Y_n = 0, \\ Y_n'(0) = 0, \\ Y_n(b) = 0; \end{cases}$$

Правая задача имеет нулевое решение, т.е. $Y_n(y) = 0$ при $n \neq 5$. Найдем решение левой задачи. Общее решение дифференциального уравнения $Y_5'' - \omega_5^2 Y_5 = 0$ есть

$$Y_5(y) = A_5 \operatorname{ch}\omega_5 y + B_5 \operatorname{sh}\omega_5 y.$$

Подставляя первое граничное условие $Y_5'(0) = 1$, находим $\omega_5 B_5 = 1$, откуда $B_5 = \dfrac{1}{\omega_5}$. Подставляя второе граничное условие, получаем $A_5 \operatorname{ch}\omega_5 b + B_5 \operatorname{sh}\omega_5 b = 0$, откуда

$$A_5 = -B_5 \operatorname{th}\omega_5 b = -\frac{\operatorname{th}\omega_5 b}{\omega_5}.$$

Таким образом,

$$Y_5(y) = -\frac{\operatorname{th}\omega_5 b}{\omega_5}\operatorname{ch}\omega_5 y + \frac{1}{\omega_5}\operatorname{sh}\omega_5 y$$

и окончательно

$$v(x,y) = X_5(x)Y_5(y) = \frac{a}{5\pi}\Big(-\operatorname{th}\frac{5\pi b}{a}\operatorname{ch}\frac{5\pi y}{a} + \operatorname{sh}\frac{5\pi y}{a}\Big)\sin\frac{5\pi x}{a}.$$

Вторая задача — типа II–I, собственные функции $Y_n(y) = \cos\omega_n y$, $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$, $n = 0, 1, \ldots$ Решение ищем в виде $v = \sum\limits_n X_n(x)\,Y_n(y)$, где $X_n(x)$ — искомые функции. Подставив в дифференциальное уравнение, находим (из равенства ряда нулю следует равенство нулю всех его коэффициентов): $X_n'' - \omega_n^2 X_n = 0$.

Подставляем в левое граничное условие по переменной x:

$$\sum_n X_n(0)Y_n(y) = 0.$$

Следовательно,

$$X_n(0) = 0 \text{ при всех } n.$$

Подставляем в правое граничное условие по переменной x:

$$\sum_n X_n(a)Y_n(y) = \cos\frac{7\pi y}{2b} = Y_3(y).$$

Из этого равенства заключаем, что

$$X_3(a) = 1, \quad X_n'(a) = 0 \text{ при } n \neq 3.$$

Мы получили два вида задач:

$$\text{при } n=3: \quad \begin{cases} X_3'' - \omega_3^2 X_3 = 0, \\ X_3(0) = 0, \\ X_3(a) = 1; \end{cases} \qquad \text{при } n \neq 3: \quad \begin{cases} X_n'' - \omega_n^2 X_n = 0, \\ X_n(0) = 0, \\ X_n(a) = 0; \end{cases}$$

Правая задача имеет нулевое решение, т.е. $X_n(x) = 0$ при $n \neq 3$. Найдем решение левой задачи. Общее решение дифференциального уравнения $X_3'' - \omega_3^2 X_3 = 0$ есть

$$X_3(x) = A_3\operatorname{ch}\omega_3 x + B_3\operatorname{sh}\omega_3 x.$$

Подставляя первое граничное условие $X_3(0) = 0$, находим $A_3 = 0$ Подставляя второе граничное условие, получаем $B_3\operatorname{sh}\omega_3 a = 1$, откуда $B_3 = \frac{1}{\operatorname{sh}\omega_3 a}$. Таким образом,

$$X_3(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}\omega_3 a}\operatorname{sh}\omega_3 x$$

и окончательно

$$w(x,y) = X_3(x)Y_3(y) = \frac{\operatorname{sh}\frac{7\pi x}{2b}}{\operatorname{sh}\frac{7\pi a}{2b}}\cos\frac{7\pi y}{2b}.$$

Итоговое решение получается сложением v и w:

$$u(x,y) = \frac{a}{5\pi}\Big(-\operatorname{th}\frac{5\pi b}{a}\operatorname{ch}\frac{5\pi y}{a} + \operatorname{sh}\frac{5\pi y}{a}\Big)\sin\frac{5\pi x}{a} + \frac{\operatorname{sh}\frac{7\pi x}{2b}}{\operatorname{sh}\frac{7\pi a}{2b}}\cos\frac{7\pi y}{2b}.$$

Задача 3. Вычислить свертку $\varphi * \psi$, где $\varphi(x) = \operatorname{rect}\frac{x}{2}$, функция $\psi(x)$ вне отрезка $[0, 2]$ равна нулю, а на этом отрезке отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,\ 2)$, $B(1,\ 3)$, $C(2,\ 0)$.

Р е ш е н и е: Графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представлены на рис. 6.12 и 6.13.

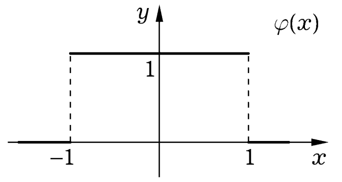

Рис. 6.12

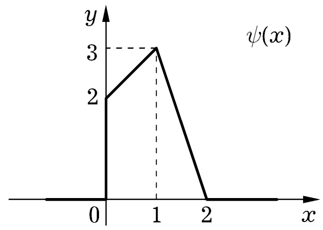

Рис. 6.13

Представим их с помощью оператора смещения и базовых функций $h_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}\eta(x)$:

$$\varphi(x) = \eta(x+1) - \eta(x-1) = S_{-1}h_0 - S_1 h_0.$$

$$\psi(x) = (x+2)\big(\eta(x) - \eta(x-1)\big) - (x-2)\big(\eta(x-1) - \eta(x-2)\big) = \\ = 2S_0h_0 + S_0h_1 - 3S_1h_1 + 2S_2h_1.$$

Теперь свертку вычисляем, используя правило композиции сдвигов и линейность:

$$\varphi * \psi = (S_{-1}h_0 - S_1h_0) * (2S_0h_0 + S_0h_1 - 3S_1h_1 + 2S_2h_1) = \\ = (2S_{-1}h_1 + S_{-1}h_2 - 3S_0h_2 + 2S_1h_2) - (2S_1h_1 + S_1h_2 - 3S_2h_2 + 2S_3h_2) = \\ = S_{-1}(2h_1 + h_2) - 3S_0h_2 + S_1(3h_2 - 2h_1) - 3S_2h_2 + 2S_3h_2.$$

Запишем теперь результат с помощью базовых функций:

$$\varphi * \psi = \Big(2(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2}\Big)\eta(x+1) - \frac{3x^2}{2}\eta(x) + \\ + \Big(\frac{3(x-1)^2}{2} - 2(x-1)\Big)\eta(x-1) - \frac{3(x-2)^2}{2}\eta(x-2) + (x-3)^2\eta(x-3).$$

Задача 4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0, 6]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0,\ 1)$, $B(1,\ 2)$, $C(2,\ 1)$, $D(4,\ -1)$, $E(6,\ 1)$.

Р е ш е н и е: График функции $f(x)$ показан на рис. 6.14.

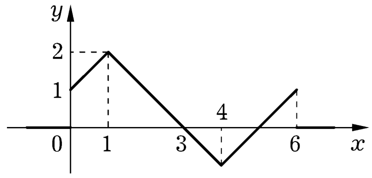

Рис. 6.14

Представим эту функцию в виде линейной комбинации базовых функций $\operatorname{rect}(x)$ и $\Lambda(x)$ с учетом подобия и смещения:

$$f(x) = \operatorname{rect}\Big(\frac{x-3}{6}\Big) + \Lambda(x-1) - 2\lambda\Big(\frac{x-4}{2}\Big).$$

Известно, что $\operatorname{rect}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc}\dfrac{x}{2}$, $\Lambda(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc}^2\dfrac{x}{2}$, где $\operatorname{sinc} x = \dfrac{\sin x}{x}$. Используя теоремы подобия и смещения, находим

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 6\operatorname{sinc}(3\omega)e^{-3i\omega} + \operatorname{sinc}\frac{\omega}{2}e^{-i\omega} - 4\operatorname{sinc}^2\omega e^{-4i\omega}.$$

Занятие 7. Преобразование Лапласа

Таблица оригиналов и изображений. Теоремы разложения.

1. Найти изображения следующих функций:
а) e^t; б) $\operatorname{sh} t$; в) $\sin t$; г) $e^{-2t}\cos t$; д) $(t+1)\cos t$; е) $\dfrac{1-\cos t}{t^2}$.

2. Найти оригиналы изображений:
а) $\dfrac{1}{p^2}$; б) $\dfrac{p}{p^2-1}$; в) $\dfrac{p+1}{p^2+2p+2}$; г) $\dfrac{p+1}{(p-1)^2(p-2)}$.

3. Решить задачи Коши:
а) $x''+x=e^t$, $x(0)=x'(0)=1$; б) $x''-x=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$;
в) $x''-2x'+x=e^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$; г) $x''+x=\Lambda(t)$, $x(0)=x'(0)=0$;
д) $x''-x=\dfrac{e^t}{1+e^t}$, $x(0)=x'(0)=0$;
е) $\begin{cases} x'=3y-x, & x(0)=1, \\ y'=y+x+e^t, & y(0)=1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x'=-y-z, & x(0)=-1, \\ y'=-x-z, & y(0)=0, \\ z'=-x-y, & z(0)=1. \end{cases}$

На дом:

1. Найти изображения следующих функций:
а) $(t^2+t)\operatorname{ch} t$; б) $\dfrac{\sin t}{t}$; в) $\dfrac{1-\cos t}{t^2}$; г) $\cos(t)\,\eta(t)$.

2. Найти оригиналы изображений:
а) $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$; б) $\dfrac{1}{p^4+1}$; в) $\dfrac{e^{-p}}{p^2}$.

3. Решить задачи Коши:
а) $x''+x=\sin t$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$; б) $x''-x=\sin t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$;
в) $x''-2x'+x=\cos t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$; г) $x''+x=\operatorname{rect}(t)$, $x(0)=x'(0)=0$;
д) $x''-4x=\dfrac{e^t}{1+e^t}$, $x(0)=x'(0)=0$; е) $\begin{cases} x'=x+2y+t, & x(0)=1, \\ y'=2x+y+t, & y(0)=2; \end{cases}$
ж) $\begin{cases} x'=-x+y+z+e^t, & x(0)=-1, \\ y'=x-y+z+e^{3t}, & y(0)=0, \\ z'x+y+z+4, & z(0)=1. \end{cases}$

Занятие 8. Обобщенные функции

Задача 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Выяснить, является ли данная последовательность сходящейся в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:
а) $\dfrac{1}{k}\varphi(x)$; б) $\dfrac{1}{k}\varphi(kx)$; в) $\dfrac{1}{k}\varphi\left(\dfrac{x}{k}\right)$.

Решение: В случае а) все функции последовательности $\psi_n(x) = \dfrac{1}{k}\varphi(x)$ имеют один и тот же носитель — множество $\operatorname{supp}\varphi$, которое является компактом в $\mathbb{R}$. Для любого натурального m $\psi_k^{(m)}(x) = \dfrac{1}{k}\varphi^{(m)}(x)$, откуда $\psi_k^{(m)}(x) \rightrightarrows 0$ в $\mathbb{R}$. Поэтому в случае а) последовательность сходится в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

В случае б) носителем функции $\psi_n(x)$ будет множество $\dfrac{1}{k}\operatorname{supp}\varphi$ (т.е. множество $\operatorname{supp}\varphi$, сжатое в k раз. Ясно, что все носители $\operatorname{supp}\psi_n$ являются подмножествами $\operatorname{supp}\varphi$. Поэтому первое условие сходимости (ограниченность носителей) выполнено. Однако $\psi_n \rightrightarrows 0$, в то время как функция $\psi_n'(x) = \varphi'(kx)$ к нулю равномерно не стремится, поскольку

$$\sup\|\psi_n'(x)\| = \sup\|\varphi'(kx)\| = \sup\|\varphi'(x)\| = \mathrm{const} > 0.$$

В случае в) нарушается требования ограниченности последовательности носителей. Носитель функции $\psi_k(x) = \dfrac{1}{k}\varphi\left(\dfrac{x}{k}\right)$ получается растягиванием носителя $\varphi(x)$ в k раз:

$$\operatorname{supp}\psi_n = k\operatorname{supp}\varphi.$$

Задача 2. Пусть $K \subset \Omega$ — компакт, χ_K — его характеристическая функция,

$$\psi(x) = \int\limits_{\Omega} \chi_K(\xi)\, w_\varepsilon(x-\xi)\, d\xi,$$

где w_ε — «шапочка». Доказать, что $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ при достаточно малом значении ε. При этом $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$; $\psi(x) = 1$ в любой точке x, которая принадлежит K вместе со своей ε-окрестностью; $\psi(x) \equiv 0$ вне $O_\varepsilon(K)$.

Решение: Интеграл свертки отличен от нуля, если для данного x под интегралом оба множителя хотя бы в окрестности одной точки отличны от нуля. Это возможно при одновременном выполнении условий $\xi \in K$, $|x-\xi| < \varepsilon$. Два неравенства означают, что $x \in K_\varepsilon$, где $K_\varepsilon = O_\varepsilon(K)$ — «ε-раздутие компакта K:

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-K| < \varepsilon\},$$

где $|x-K| = \inf\limits_{\xi\in K}|x-\xi|$ — расстояние от точки до множества. Таким образом, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{K}_\varepsilon$ (черта сверху — замыкание множества). Отсюда вытекает, что $\psi(x) = 0$ вне $\overline{K}_\varepsilon$, а в силу непрерывности ψ и вне K_ε.

При достаточно малом значении ε имеем $\overline{K}_\varepsilon \subset \Omega$. Поэтому интеграл, определяющий $\psi(x)$ можно ограничить компактом $\overline{K}_\varepsilon$. Так как «шапочка» бесконечно дифференцируема, интеграл можно дифференцировать по параметру. Это означает, что $\psi(x)$ бесконечно дифференцируема и, следовательно, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Так как оба множителя под интегралом неотрицательны, сам интеграл принимает неотрицательные значения, т.е. $\psi(x) \geqslant 0$. С другой стороны,

$$\int\limits_{\Omega} \chi_K(\xi)\, w_\varepsilon(x-\xi)\, d\xi \leqslant \int\limits_{\Omega} w_\varepsilon(x-\xi)\, d\xi = 1$$

в силу неравенства $\chi_K(x) \leqslant 1$ и свойств «шапочки». Поэтому $\psi(x) \leqslant 1$.

Если $O_\varepsilon(x) \subset K$, то функция $w_\varepsilon(x-\xi)$ равна нулю вне K. В этом случае

$$\psi(x) = \int\limits_{O_\varepsilon(x)} \chi_K(\xi)\, w_\varepsilon(x-\xi)\, d\xi = \int\limits_{O_\varepsilon(x)} w_\varepsilon(x-\xi)\, d\xi = 1.$$

Указание: Проиллюстрируйте решение рисунком, проанализировав на нем взаимное расположение компакта K и носителя функции $w_\varepsilon(x-\xi)$.

Задача 3. Пусть f — финитная непрерывная в $\mathbb{R}^n$ функция. Показать, что функция

$$f_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, w_\varepsilon(x-\xi)\, d\xi$$

основная с носителем в $O_\varepsilon(\operatorname{supp} f)$ и что $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ при $\varepsilon \to 0$ в $\mathbb{R}^n$.

Решение: Функция $f_\varepsilon(x)$ задана интегралом с параметром, который фактически является определенным (собственным), поскольку его можно ограничить отрезком, содержащим носитель функции f. Этот интеграл можно дифференцировать по параметру, поскольку под знаком интеграла будет дифференцироваться «шапочка», являющаяся бесконечно дифференцируемой. В силу последнего дифференцировать по параметру можно любое число раз. Следовательно, функция f_ε бесконечно дифференцируемая, т.е. гладкая.

Покажем, что $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset O_\varepsilon(\operatorname{supp} f)$. Для этого достаточно показать, что $f_\varepsilon(x) = 0$ при $x \notin O_\varepsilon(\operatorname{supp} f)$. Последнее условие означает, что для любого $\xi \in \operatorname{supp} f$ верно неравенство $|x-\xi| \geqslant \varepsilon$. Пусть $x \notin O_\varepsilon(\operatorname{supp} f)$. Для любого значения $\xi \in \mathbb{R}$ либо $\xi \in \operatorname{supp} f$ и тогда $\omega_\varepsilon(x-\xi) = 0$, либо $\xi \notin \operatorname{supp} f$ и тогда $f(\xi) = 0$. В любом случае $f(\xi)\,\omega_\varepsilon(x-\xi) = 0$, а значит, $f_\varepsilon(x) = 0$.

Функция f, непрерывная на компакте $\operatorname{supp} f$, равномерно непрерывна на нем, а значит, равномерно непрерывна в $\mathbb{R}$. поскольку вне $\operatorname{supp} f$ равна нулю. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых $x, \xi \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x - \xi < \delta$, верно неравенство $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$. Используя это неравенство, а также условие нормировки «шапочки», получаем при $\rho < \delta$

$$|f_\rho(x) - f(x)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\omega(x-\xi)\, d\xi - f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(x-\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bigl(f(\xi) - f(x)\bigr)\,\omega(x-\xi)\, d\xi \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bigl|f(\xi) - f(x)\bigr|\,\omega(x-\xi)\, d\xi \leqslant \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(x-\xi)\, d\xi = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_\rho(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \rho < \delta.$$

Это означает, что f_ρ сходится к f при $\rho \to 0$ по sup-норме, т.е. равномерно в $\mathbb{R}$.

Задача 4. Найти образ линейного оператора D: $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, где $(D\varphi)(x) = \varphi'(x)$. Является ли этот оператор мономорфизмом?

Решение: Производная пробной функции φ является пробной функцией, причем $\operatorname{supp}\varphi' \subset \operatorname{supp}\varphi$. Однако не каждая пробная функция является производной другой пробной функции. В чему тут дело? Пусть φ — некоторая пробная функция. Если она есть производная некоторой другой пробной функции ψ, то ψ есть первообразная функции φ. При этом $\operatorname{supp}\varphi$ попадает в некоторый отрезок $[-a,\ a]$ и вне этого отрезка $\varphi(x) = 0$.

Значит, функция ψ, как первообразная, вне отрезка $[-a,\ a]$ постоянная: например при $a < x_1 < x_2$

$$\psi(x_2) = \psi(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Однако постоянные значения функции ψ правее a и левее $-a$ могут быть разными, разность этих значений такова:

$$\psi(a) - \psi(-a) = \int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx.$$

Например, для «шапочки» эта разность равна 1. Мы можем считать, что $\psi(x) = 0$ при $x < -a$, положив

$$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Среди первообразных функции φ это единственная функция, равная нулю слева при $x \to -\infty$. Чтобы эта первообразная была пробной, необходимо выполнение условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Из этого рассуждения вытекает, что образом оператора D является множество пробных функций, удовлетворяющих условию (1). Оператор D является мономорфизмом, поскольку имеет нулевое ядро. Действительно, если $\varphi'(x) = 0$, то среди первообразных функции φ только постоянные, среди которых единственная функция, являющаяся пробной, — нулевая.

Задача 5. Показать, что δ-функция — сингулярная обобщенная функция.

Решение: Есть разные варианты доказательства этого факта. Приведем два из них, один — с использованием свойств интеграла, второй — с использованием свойств обобщенных функций. Доказательство приведем для одномерного варианта δ-функции.

Вариант 1. Предположим, что существует локально интегрируемая в $\mathbb{R}$ функция $f(x)$, такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

В качестве функции φ рассмотрим функцию

$$\psi_\varepsilon(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(\xi)\,w_\varepsilon(x-\xi)\,d\xi,$$

определяемую механизмом сглаживанием характеристической функции $\chi_[a,b](x)$ отрезка $[a,\ b]$. Как было выяснено в задаче 2), функция $\psi_\varepsilon(x)$ равна единице на отрезке $a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$, нулю вне отрезка $a-\varepsilon,\ b+\varepsilon]$, а на интервалах $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$ принимает значения из $[0,\ 1]$. Ясно, что $\psi_{\varepsilon_n}(x)$ сходится при $\varepsilon_n \to 0$ к функции $\chi_{[a,b]}(x)$ всюду, кроме точек a и b, оставаясь ограниченной значением 1. По теореме Лебега о сходимости под знаком интеграла заключаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\chi_{[a,b]}(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\psi_\varepsilon(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(0) = \chi_{[a,b]}(0)$$

(предполагаем, что $a,\, b \neq 0$). Но

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\chi_{[a,b]}(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Поэтому функция

$$F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(x)\,dx$$

постоянна при $x > 0$ и при $x < 0$, так как, например, при $0 < a < b$ имеем

$$F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \chi_{[a,b]}(0) = 0.$$

Но функция $F(x)$ непрерывна и $F(0) = 0$. Значит, $F(x) \equiv 0$, откуда следует, что $f(x) = 0$ почти всюду. Но тогда функционал, порожденный функцией $f(x)$ чисто нулевой, что противоречит предположению.

Вариант 2. Используем понятие носителя обобщенной функции и операцию умножения обобщенной функции на гладкую функцию. Очевидно, что δ-функция обращается в нуль на любом интервале, не содержащем нуля. Значит, носитель δ-функции состоит из единственной точки: $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$. Согласно определению произведения обобщенной функции на гладкую функцию α $\langle \alpha f,\, \varphi\rangle = \langle f,\, \alpha\varphi\rangle$. Поэтому

$$\langle \alpha\delta,\, \varphi\rangle = \langle \delta,\, \alpha\varphi\rangle = \alpha(0)\,\varphi(0).$$

В частности, $x\delta(x) = 0$ (нулевая обобщенная функция). Если бы функция $\delta(x)$ была регулярной и порождалась локальной интегрируемой функцией $f(x)$, то и функция $x\delta(x)$ была бы регулярной и порождалась бы функцией $xf(x)$. Но тогда из $x\delta(x) = 0$ получаем $x(f(x) = 0$ почти всюду. Отсюда и $f(x) = 0$ почти всюду. Такая функция порождает нулевую обобщенную функцию, что противоречит предположению.

Задача 6. Найти предел $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$:
а) $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\varepsilon}\eta(\varepsilon - |x|)$; б) $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$; в) $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-x^2/(4\varepsilon)}$;
г) $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}$.

Р е ш е н и е: Все четыре последовательности близки: при $\varepsilon \to 0$ график функции стягивается к точке 0 так, что площадь под графиком функции остается неизменной, но доля этой площади на любом отрезке $[-\delta,\ \delta]$ стремится к 1. Детали связаны с распределение этой площади.

В варианте а) функция $f_\varepsilon(x)$ финитна и при $\varepsilon \to 0$ носитель функции стягивается в точку. Действие соответствующей обобщенной функции описывается интегралом

$$\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

В данном случае, используя вид функции f_ε и теорему о среднем для интегралов, получаем

$$\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \varphi(\vartheta\varepsilon),$$

где $\vartheta \in (-1,\ 1)$ — некоторое число. При $\varepsilon \to 0$ имеем $\varphi(\vartheta\varepsilon) \to \varphi(0)$. Следовательно,

$$\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle \to \varphi(0), \quad \varepsilon \to 0.$$

В случае а) пределом последовательности функций в топологии пространства обобщенных функций оказалась δ-функция.

В варианте б) имеем

$$\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{y^2+1}\,dy$$

(использована замена $x = \varepsilon y$). В последнем интеграле на основании теоремы Лебега о предельном переходе в интеграле по мере можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0)}{y^2+1}\,dy = \varphi(0).$$

В данном случае следует рассмотреть меру $d\mu(y) = \dfrac{dy}{1+y^2}$, которая на числовой оси является конечной. Подинтегральная функция имеет ограниченную (а значит, интегрируемую) мажоранту $\sup|\varphi(x)|$.

Вариант в) аналогичен варианту б) и его предлагается рассмотреть самостоятельно.

Вариант г) более сложный, поскольку функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не является интегрируемой по Лебегу. Оценку удается провести благодаря специфике рассматриваемой функции. Отметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega x}{x}\,dx = \pi, \quad \omega > 0.$$

Поэтому, полагая $\omega = 1/\varepsilon$, получаем

$$\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle - \pi\varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\frac{\sin\omega x}{x}\,dx - \varphi(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega x}{x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\sin\omega x\,dx.$$

Получился интеграл

$$I(\omega) = \int\limits_{-R}^{R} g(x)\sin\omega x\,dx,$$

где параметр R выбран так, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,\ R]$, а функция

$$g(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$$

является непрерывно дифференцируемой на $[-R,\ R]$. Покажем, что $I(\omega) \to 0$ при $\omega \to \to +\infty$. Для этого используем интегрирование по частям:

$$\int\limits_{-R}^{R} g(x)\sin\omega x\,dx = -g(x)\frac{\cos\omega x}{\omega}\Big|_{-R}^{R} + \frac{1}{\omega}\int\limits_{-R}^{R} g'(x)\,\cos\omega x\,dx.$$

Учитывая, что функции $g(x)$ и $g'(x)$ ограничены на $[-R,\ R]$, также $|\cos\omega x| \leqslant 1$, заключаем, что $I(\omega) \to 0$ при $\omega \to +\infty$ (или $\varepsilon \to +0$).

В результате для варианта г) получаем вывод:

$$\langle f_\varepsilon,\ \varphi\rangle \to \pi\varphi(0), \quad \varepsilon \to 0.$$

Значит, $f_\varepsilon \to \pi\delta$ при $\varepsilon \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})^*$.

Задача 7. Доказать, что $\delta(ax) = \frac{1}{|a|^n}\delta(x)$, $a \neq 0$.

Р е ш е н и е: Согласно определению, для произвольного диффеоморфизма $\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\langle f\circ\gamma,\ \varphi\rangle = \left\langle f,\ \varphi\circ\gamma^{-1}|\det\partial\gamma^{-1}|\right\rangle.$$

В рассматриваемом случае $\gamma(x) = \alpha x$. Поэтому матрица Якоби $\partial\gamma^{-1}$ есть диагональная матрица с диагонфльными элементами $1/\alpha$. Следовательно,

$$\langle f(\alpha x),\ \varphi\rangle = \left\langle f,\ \varphi(x/\alpha)|\alpha|^{-n}\right\rangle,$$

так как

$$|\det\partial\gamma^{-1}| = \left|\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n\right| = \frac{1}{|\alpha|^n}.$$

Для δ-функции получаем

$$\langle\delta(\alpha x),\ \varphi\rangle = \frac{1}{|\alpha|^n}\langle\delta,\ \varphi(x/\alpha)\rangle = \frac{1}{|\alpha|^n}\varphi(x/\alpha)\big|_{x=0} = \frac{1}{|\alpha|^n}\varphi(0).$$

Следовательно, $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|^n}$.

Задача 8. Проверить, совпадают ли данные обобщенные функции:
а) $e^t\delta'$ и $-\delta + \delta'$; б) $\cos t\cdot\delta'$ и δ';

Р е ш е н и е: Для проверки равенства обобщенных функций надо сравнить их действие на произвольную пробную функцию.

В варианте а) имеем

$$\left\langle e^t\delta'(t),\ \varphi(t)\right\rangle = \left\langle\delta'(t),\ e^t\varphi(t)\right\rangle = -\left\langle\delta(t),\ (e^t\varphi(t))'_t\right\rangle = -\left\langle\delta(t),\ e^t\varphi(t) + e^t\varphi'(t)\right\rangle =$$
$$= -\left\langle\delta(t),\ e^t\varphi(t)\right\rangle - \left\langle\delta(t),\ e^t\varphi'(t)\right\rangle = -\left\langle\delta(t),\ e^t\varphi(t)\right\rangle - \left\langle\delta(t),\ e^t\varphi'(t)\right\rangle = -\varphi(0) - \varphi'(0).$$

Для второй обобщенной функции действуем аналогично:

$$\langle-\delta + \delta',\ \varphi\rangle = \langle-\delta,\ \varphi\rangle + \langle\delta',\ \varphi\rangle = -\langle\delta,\ \varphi\rangle - \langle\delta,\ \varphi'\rangle = -\varphi(0) - \varphi'(0).$$

Поскольку действия двух обобщенных функций совпали, сами функции тоже совпадают.

Вариант б) предлагается решить самостоятельно.

Занятие 9. Дифференцирование обобщенных функций

Задача 1. Доказать равенства:
а) $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x)$, $m \geqslant 1$; б) $x^k\delta^{(m)}(x) = 0$ при $m < k$.

Решение: Равенство обобщенных функций — то же, что и равенство двух отображений. Надо проверить, что действие двух обобщенных функций на произвольную пробную функцию дает одинаковый результат.

Вариант а) вытекает из выкладок

$$\left\langle x\delta^{(m)},\, \varphi \right\rangle = \left\langle \delta^{(m)},\, x\varphi \right\rangle = (-1)^m \big(x\varphi(x)\big)^{(m)}\Big|_{x=0} =$$
$$= (-1)^m \big(x\varphi^{(m)}(x) + m\varphi^{(m-1)}(x)\big)\Big|_{x=0} = (-1)^m m\varphi^{(m-1)}(0) = -m\left\langle \delta^{(m-1)},\, \varphi \right\rangle;$$

Так как $\left\langle x\delta^{(m)},\, \varphi \right\rangle = -m\left\langle \delta^{(m-1)},\, \varphi \right\rangle$, то $x\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)}$.

б) сделать самостоятельно.

Задача 2. Вычислить:
а) $\eta'(-x)$; б) $\eta^{(m)}(x - x_0)$; в) $(\operatorname{sign} x)^{(m)}$; г) $(|x|)^{(m)}$; д) $(\eta(x)\, \cos x)'$; е) $(\eta(x)\, e^{\lambda x})^{(m)}$.

Решение: *Вариант* а). Обобщенная функция $\eta'(-x)$ получена с помощью двух преобразований: дифференцирования и преобразования аргумента, причем преобразование $f(x) \to f(-x)$ выполняется по правилу $\langle f(-x),\, \varphi(x)\rangle = \langle f(x),\, \varphi(-x\rangle$. Следовательно,

$$\langle \eta'(-x),\, \varphi(x)\rangle = \langle \eta'(x),\, \varphi(-x)\rangle = -\langle \eta x,\, (\varphi(-x))'_x\rangle = \langle \eta x,\, \varphi'(-x)\rangle =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(x)\, \varphi'(-x)\, dx = \int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(-x)\, dx = -\int\limits_{0}^{-\infty} \varphi'(y)\, dy = \varphi(0) - \varphi(-\infty) = \varphi(0).$$

В этой выкладке следует различать обозначения $(\varphi(-x))'_x$ и $\varphi'(-x)$: первое — это производная сложной функции $\varphi(-x)$, второе — значение производной φ' в точке $-x$. Выкладка показывает, что $\eta'(-x)$ есть δ-функция $\delta(x)$. Полученный ответ легко понять, если учесть, что $\eta'(x) = \delta(x)$ и что δ-функция является четной.

Вариант б) аналогичен предыдущему. Несложно проверить, что $\eta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ (получается из формулы $\eta'(x) = \delta(x)$ заменой $y = x - x_0$). Дальнейшее дифференцирование — это дифференцирование δ-функции. Поэтому $\eta^{(m)}(x - x_0) = \delta^{(m-1)}(x - x_0)$. Действие этой функции описывается формулой

$$\left\langle \delta^{(m-1)}(x - x_0),\, \varphi(x) \right\rangle = (-1)^{m-1}\varphi^{(m-1)}(x_0).$$

Вариант в). Ответ вытекает из равенства $\operatorname{sign} x = 2\eta(x) - 1$.

Вариант г). Достаточно один раз продифференцировать. По определению

$$\langle (|x|)',\, \varphi\rangle = -\langle |x|,\, \varphi'\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)\, dx.$$

Интеграл можно разделить на два и вычислить по частям каждый:

$$\langle (|x|)',\, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\, dx - \int\limits_{0}^{\infty} x\varphi'(x)\, dx =$$
$$= x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx - x\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} x\, \varphi(x)\, dx.$$

Таким образом, $(|x|)' = \operatorname{sign} x$, что соответствует обычному дифференцированию. Далее можно использовать вариант в).

Варианты д) и е) предлагаются для самостоятельного решения.

Задача 3. Доказать, что функции δ, δ', …, $\delta^{(m)}$ линейно независимы.

Р е ш е н и е: Задача простая в основе своей, но наталкивается на определенные технические сложности, связанные с построение пробных функций.

Доказательство строится по стандартной схеме: надо показать, что из равенства нулю линейной комбинации следует равенство нулю всех ее коэффициентов. Итак приравниваем нулю линейную комбинацию:

$$\alpha_0\delta + \alpha_1\delta' + \ldots + \alpha_m\delta^{(m)} = 0.$$

Равенство обобщенной функции нулю означает, что равно нулю действие этой обобщенной функции на произвольную пробную функцию:

$$\left\langle \alpha_0\delta + \alpha_1\delta' + \ldots + \alpha_m\delta^{(m)},\ \varphi \right\rangle = 0$$

Преобразуем это равенство:

$$\alpha_0 \langle \delta,\ \varphi\rangle + \alpha_1 \langle \delta',\ \varphi\rangle + \ldots + \alpha_m \left\langle \delta^{(m)},\ \varphi \right\rangle = 0.$$

Так как

$$\left\langle \delta^{(k)},\ \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta,\ \varphi^{(k)} \right\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0),$$

то

$$\alpha_0\varphi(0) - \alpha_1\varphi'(0) + \ldots + (-1)^m\alpha_m\varphi^{(m)}(0) = 0.$$

Это равенство должно выполняться для любой пробной функции. Остается предъявить пробную функцию, для которой равенство возможно только при нулевых коэффициентах. Например, взять пробную функцию φ, для которой $\varphi^{(k)}(0) = (-1)^k\alpha_k$. Тогда получим $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_m^2 = 0$, что эквивалентно равенству $\alpha_k = 0$ для всех коэффициентов.

Вопрос: как построить пробную функцию, которая имеет в нуле заданные значения производных? Многочлен здесь не пройдет, так как он не есть финитная функция.

Пусть

$$p(x) = \alpha_0 - \alpha_1 x + \ldots + \frac{(-1)^m\alpha_m}{m!}x^m.$$

Многочлен $p(x)$ — как раз тот, у которого заданные значения производных в нуле: $p^{(k)}(0) = (-1)^k\alpha_k$. Также рассмотрим функцию $\psi(x)$ из задачи 2 занятия 8. Произведение $\varphi(x) = p(x)\,\psi(x)$ является пробной функцией, а так как у функции $\psi(x)$ все производные в нуле нулевые, то $\varphi^{(k)}(0) = p^{(k)}(0)$. Таким образом, построенная функция $\varphi(x)$ и есть требуемая пробная функция.

Задача 4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta^{(k)}(x-k)$ сходится при любых a_k.

Р е ш е н и е: Согласно теореме о полноте достаточно доказать, что указанный ряд сходится слабо, т.е. для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ сходится ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle a_k\delta^{(k)}(x-k),\ \varphi \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left\langle \delta^{(k)}(x-k),\ \varphi \right\rangle. \tag{2}$$

Знак суммы оказался за пределами свертки (действия) вот по каким соображениям. Надо взять частичную сумму ряда, действие частичной суммы на пробную функцию и убедиться, что есть предел. Предел как раз и будет рядом из действий.

Ряд (2) имеет конечное число ненулевых слагаемых, а именно для тех k, для которых $k \in \operatorname{supp} \varphi$. Поэтому сходимость ряда (2) для каждой конкретной φ очевидна.

Следующие задачи построены на правилах дифференцирования кусочно-непрерывных функций: к обычной производной добавляем слагаемые $h_k\delta(x - x_k)$ в каждой точке разрыва x_k, значение h_k — скачок функции в точке x_k, т.е. разность $f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$. Далее для того, чтобы различать обычную производную такой функции и ее производную как обобщенной функции (обобщенную производную), будем использовать обозначения:

- $f^{(m)}(x)$ — обычная производная;
- $\partial^m f(x)$ — обобщенная производная.

В тех случаях, когда обычная производная не существует (например для сингулярных обобщенных функций), можно использовать оба обозначения для обобщенных производных: двусмысленностей в этом случае не возникает.

5. Вычислить $\partial^m f$ для функций:
а) $f(x) = \eta(a - |x|)$; б) $f(x) = [x]$ ($[x]$ — целая часть числа x); в) $f(x) = \operatorname{sign} \sin x$.

Ответ: а) $\partial^m f(x) = \delta^{(m-1)}(x + a) - \delta^{(m-1)}(x - a)$; б) $\partial^m f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(m-1)}(x - k)$;
в) $\partial^m f(x) = 2 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta^{(m-1)}(x - k)$.

6. Найти все производные функций:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 0; \\ x + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^2 + 1, & x \geqslant 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1; \\ (x + 1)^2, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ x^2 + 1, & x \geqslant 0; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \leqslant \pi; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

Ответ: а) $\partial f(x) = 2x \operatorname{rect}(1 - |x|) + \delta(x + 1) - \delta(x - 1)$,
$\partial^2 f(x) = 2 \operatorname{rect}(1 - |x|) + \delta'(x + 1) - \delta'(x - 1) - 2\delta(x - 1) - 2\delta(x + 1)$,
$\partial^k f(x) = \delta^{(k-1)}(x+1) - \delta^{(k-1)}(x-1) - 2\delta^{(k-2)}(x-1) - 2\delta^{(k-2)}(x+1) + \delta^{(k-3)}(x+1) - \delta^{(k-3)}(x-1)$, $k \geqslant 3$.

Указание: Остальные варианты записываются аналогично: при каждом дифференцировании учитываем скачки. Функция rect использована для краткости записи функций.

7. Пусть f — (2π)-периодическая функция, для которой $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2\pi}$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Найти ∂f и f'.

Ответ: $f'(x) = -\dfrac{1}{2\pi}$; $\partial f(x) = -\dfrac{1}{2\pi} + \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta\big(x - (2k + 1)\pi\big)$.

Занятие 10. Свертка и преобразование Фурье обобщенных функций

Задача 1. Доказать, что:
а) $\langle u \times \delta,\, \varphi\rangle = \langle u,\, \varphi(\cdot, 0)\rangle$; б) $\langle u \times \delta',\, \varphi\rangle = -\langle u,\, \varphi'_t(\cdot, 0)\rangle$; в) $\delta \times \delta = \delta(\cdot,\cdot)$.

Решение: В варианте а) имеем

$$\langle u(x) \times \delta(y),\, \varphi(x,y)\rangle = \langle u(x),\, \langle \delta(y),\, \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle u(x),\, \varphi(x,0)\rangle .$$

Варианты б) и в) аналогичны и предлагаются для самостоятельного решения.

Задача 2. Доказать равенства:
а) $\delta * f = f * \delta = f$; б) $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$; в) $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$.

Решение: В варианте а), используя предыдущую задачу, получаем:

$$\langle f * \delta,\, \varphi\rangle = \langle f(x) \times \delta(y),\, \varphi(x+y)\eta(x,y)\rangle = \langle f(x),\, \varphi(x)\eta(x,0)\rangle = \langle f(x),\, \varphi(x)\rangle .$$

Функция η выбрана так, что она финитна и равна 1 на пересечении носителей функции $f \times \delta$ (вертикальная прямая) и функции $\varphi(x+y)$ (наклонная полоса). В этом случае носитель функции $\eta(x,0)$ накрывает носитель функции $\varphi(x)$.

Вариант б) — сакмостоятельно.

В варианте в) имеем

$$\begin{aligned}\left\langle \delta^{(m)}(x-a) * f(x),\, \varphi\right\rangle &= \left\langle f(x) * \delta^{(m)}(x-a),\, \varphi\right\rangle = \\ &= \left\langle f(x),\, \left\langle \delta^{(m)}(y-a),\, \varphi(x+y)\eta(x,y)\right\rangle\right\rangle = \left\langle f(x),\, (-1)^m \varphi^{(m)}(x+a)\eta(x,a)\right\rangle = \\ &= \left\langle f(x),\, (-1)^m \varphi^{(m)}(x+a)\right\rangle = \left\langle f^{(m)}(x),\, \varphi(x+a)\right\rangle = \left\langle f^{(m)}(x-a),\, \varphi(x)\right\rangle .\end{aligned}$$

Отметим, что при раскрытии $\delta^{(m)}$ надо дифференцировать произведение $\varphi(x+y)\eta(x,y)$, но функция $\eta(x,y)$ имеет ненулевую производную там, где $\varphi(x+y) = 0$ вместе со своими производными.

Задача 3. Вычислить свертки:
а) $\eta * \eta$; б) $\eta(x) * (x^2\eta(x))$; в) $e^{-|x|} * e^{-|x|}$.

Решение: В всех вариантах свертка существует в обычном смысле. Обобщенная свертка будет совпадать с обычной. В частности,

$$(\eta * \eta)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi)\, \eta(x-\xi)\, d\xi = \int\limits_0^x d\xi = x\eta(x).$$

Выкладка проведена при $x > 0$, а при $x < 0$ подынтегральная функция равна нулю тождественно (пдынтегральная функция равна 1 при значениях ξ, удовлетворяющих неравенствам $\xi > 0$, $x - \xi > 0$; если $x < 0$, это множество пусто).

Отметим, что здесь можно использовать свойства сверки в преобразовании Лапласа. Так, $h_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\eta(x) \risingdotseq p^{-(n+1)}$. Поэтому $h_n * h_m = h_{n+m+1}$.

Задача 4. Используя свойства преобразования Фурье, доказать:
а) $\mathcal{F}[\delta(x-a)](\omega) = e^{-ia\omega}$; б) $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta$; в) $\mathcal{F}\Big[\dfrac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2}\Big] = \cos a\omega$.

Решение: а). Согласно теореме запаздывания

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)](\omega) = e^{-ia\omega}\mathcal{F}[\delta(x)](\omega) = e^{-ia\omega}.$$

б). Используем обратное преобразование Фурье. Известно, что $\mathcal{F}[\delta](\omega) = 1$. Значит, $\mathcal{F}^{-1}[1](x) = \delta(x)$. Но $\mathcal{F}^{-1}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f](-\omega)$. Поэтому

$$\mathcal{F}[1](x) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[1](-\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega).$$

Вариант в) сводится к варианту а) и предлагается для самостоятельного решения.

Задача 5. Найти:

а) $\mathcal{F}[\eta]$; б) $\mathcal{F}[\eta(x)\, e^{-ax}]$; в) $\mathcal{F}[e^{-a|x|}]$; г) $\mathcal{F}\Big[\dfrac{2a}{a^2+x^2}\Big]$.

Р е ш е н и е: а). Преобразование Фурье функции Хевисайда найдено в конспекте лекций путем предельного перехода для функции варианта б). Рассмотрим процедуру непосредственного вычисления $\mathcal{F}[\eta]$.

Согласно определению $\langle \mathcal{F}[\eta],\, \varphi\rangle = \langle \eta,\, \mathcal{F}[\varphi]\rangle$. Правую часть можно вычислить непосредственно, так как η — регулярная функция:

$$\langle \eta,\, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \int\limits_0^\infty \mathcal{F}[\varphi](x)\, dx = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Перестановка интегралов напрямую невозможна, поскольку внутренний интеграл в получаемом повторном расходится. Рассмотрим

$$H(T) = \int\limits_0^T dx \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Здесь внутренний интеграл сходится абсолютно, а внешний — простой определенный. Переставить пределы можно:

$$H(T) = \int\limits_{-\infty}^\infty d\xi \int\limits_0^T \varphi(\xi) e^{-i\xi x} dx = \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \frac{1-e^{-i\xi T}}{i\xi} d\xi.$$

Полученный определенный интеграл нужно разделить на два. Однако оба получаемых интеграла из-за особенности в нуле расходятся, но их можно понимать в смысле главного значения (как в формулах Сохоцкого). Получаем

$$H(T) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(\xi)}{i\xi} d\xi - \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \frac{e^{-i\xi T}}{i\xi} d\xi = H_1(T) - H_2(T).$$

Первая часть от T не зависит и представляет собой функцию $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, деленную на i, т.е. $H_1 = -i\,\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$.

Вторую часть разобъем на два слагаемых. Пусть $h(\xi) = \eta(\delta - |\xi|)$ (функция равна единице на $(-\delta,\, dl)$ и нулю вне этого интервала). Полагаем

$$H_2(T) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)h(\xi)}{i\xi} e^{-i\xi T} d\xi + \varphi(0) \cdot \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{h(\xi)}{i\xi} e^{-i\xi T} d\xi = H_{2a}(T) + H_{2b}(T).$$

Слагаемое $H_{2a}(T)$ есть значение преобразования Фурье гладкой финитной функции в точке T и при T стремится к нулю, как преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой функции. Для второй части используем вид функции h:

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{i\xi} e^{-i\xi T} d\xi = \text{v.p.} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{-i\xi T}}{i\xi} d\xi = \text{v.p.} \int\limits_{-\delta T}^{\delta T} \frac{e^{-iz}}{iz} dz.$$

При $T \to +\infty$ последний интеграл стремится к несобственному по всей числовой оси. В результате получаем

$$\langle \mathcal{F}[\eta],\, \varphi \rangle = -i \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x},\, \varphi \right\rangle - K\varphi(0),$$

где

$$K = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz}}{iz} dz.$$

Интеграл K можно вычислить с помощью теории вычетов (нижний полукруг с круговым вырезом в нуле). Он равен π. В результате

$$\mathcal{F}[\eta] = -i\,\mathcal{P}\frac{1}{x} + \pi\delta.$$

в). Функция — регулярная, пнреобразование Фурье для нее существует в обычном смысле. Можно использовать пункт б). Действительно,

$$e^{-a|x|} = e^{-ax}\eta(x) + e^{ax}\eta(-x).$$

(выделили правую часть с помощью $\eta(x)$ и левую с помощью $\eta(-x)$). Пусть $f(x) = e^{-ax}\eta(x)$. Тогда $e^{-a|x|} = f(x) + f(-x)$. Следовательно, $\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[f](-\omega)$. Так как $\mathcal{F}[f](\omega) = \dfrac{1}{a + i\omega}$, то

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \frac{1}{a + i\omega} + \frac{1}{a - i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

г). Самостоятельно, используя в) и обратное пиреобразование Фурье.

Задача 6. Используя различные приемы, найти преобразование Фурье функций: а) $\eta^{(k)}$; б) $\operatorname{sign}(x)$; в) $\dfrac{1}{x + i0}$; г) $\eta(x)\,x^k$; д) $|x|^k$; е) $x^k\delta^{(m)}(x)$; ж) $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$; з) $x^2 + x + 1$; и) $x\cos x$; к) e^x.

Решение: а). Используем равенство $\eta^{(k)}(x) = \delta^{(k-1)}(x)$. Для δ-функции $\delta \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$. Ис пользуя теорему о дифференцировании оригинала, находим $\delta^{(k-1)} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^{k-1}$. Значит, $\eta^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^{k-1}$.

б). Функция знака выражается через функцию Хевисайда: $\operatorname{sign} x = 2\eta(x) - 1$. Далее используем свойства преобразования Фурье и соотношение $1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta$. В результате

$$\operatorname{sign} x \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta - 2i\,\mathcal{P}\frac{1}{x} - 2\pi\delta = -2i\,\mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Отметим, что $\operatorname{sign} x$ нечетная функция, что объясняет, почему Фурье-образ оказался чисто мнимым.

в). Функция $\dfrac{1}{x+i0}$ выражается через $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, которая в свою очередь есть часть Фурье-образа функции $\eta(x)$. Детали выкладок предлагается сделать самостоятельно.

г). Преобразование Фурье функции $x^k\eta(x)$ можно получить k-кратным дифференцированием фурье-образа функции $\eta(x)$, так как в силу теоремы о дифференцировании изображения $x^k f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^k F^{(k)}(x)$. Из формулы $\eta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta - i\,\mathcal{P}\frac{1}{x}$ получаем

$$x^k\eta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^k\pi\delta^{(k)} - i^{(k+1)}\Big(\mathcal{P}\frac{1}{x}\Big)^{(k)},$$

где

$$\left\langle \Big(\mathcal{P}\frac{1}{x}\Big)^{(k)},\ \varphi \right\rangle = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{x}\,dx.$$

д). **Указание:** использовать формулу $|x|' = \operatorname{sign} x$ и результаты варианта б). Следует выделить саму функцию $|x|$. Для нее можно использовать представление $|x| = x\operatorname{sign} x$ и теорему о дифференцировании изображения.

е). **Указание:** использовать упрощающую формулу $x^k\delta^{(m)}(x) = \dfrac{(-1)^k m!}{(m-k)!}\delta^{(m-k)}$. Также можно использовать $\delta^m \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^m$ и дифференцирование изображения.

ж). **Указание:** использовать результаты варианта в).

з). Используя теорему дифференцирования оригинала, получаем формулу $\delta^{(m)} \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^m$. С помощью обратного преобразования Фурье (учитывая, что $\delta^{(k)}$ четная при четном k и нечетная при нечетном k) находим $x^m \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi(-i)^m\delta^{(m)}(-x) = 2\pi i^m\delta^{(m)}(x)$. Поэтому $x^2+x+1 \xrightarrow{\mathcal{F}} -2\pi\delta''(x) + 2\pi i\delta'(x) + 2\pi\delta(x)$.

и). Согласно результатам варианта з) $x \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi i\delta'(x)$. Далее представляем тригонометрическую функцию в экспоненциальной форме: $\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2$. Теперь можно использовать теорему смещения:

$$xe^{ix} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi i\delta'(x-1), \quad xe^{-ix} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi i\delta'(x+1) \ \ \to\ \ x\cos x \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi i\big(\delta'(x-1)+\delta'(x+1)\big).$$

k). Задача на внимательность. Функция e^x — регулярная обобщенная функция, но не является функцией медленного роста. Действительно, взяв $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, принадлежащую cS, обнаруживаем, что действие $\langle e^x,\ \varphi\rangle$ не определено, поскольку соответствующий несобственный интеграл расходится. Функционал $\langle e^x,\ \varphi\rangle$ корректно определен на финитных пробных функциях, но на пробные быстроубывающие функции не расширяется.

Занятие 11. Фундаментальное решение

Согласно конспекту лекций, фундаментальное решение одномерного дифференциального оператора может быть найдено как решение специальной задачи Коши.

Пусть задан одномерный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

$$Lu = \frac{d^m u}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{du}{dt} + a_m u.$$

Фундаментальным решением этого оператора является функция $u(t)\,\eta(t)$, где $\eta(t)$ — функция Хевисайда, а $u(t)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u(0) = 0, \ \ u'(0) = 0, \ \ \ldots, \ \ u^{(m-2)}(0) = 0, \ \ u^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Решение задачи (3) можно искать стандартным способом (общее решение через характеристическое уравнение, затем вычисление постоянных интегрирования). Однако проще использовать операционное исчисление. Переход к изображениям по Лапласу дает

$$L(p)U - 1 = 0,$$

откуда $U = 1/L(p)$. Остается изображение преобразовать в оригинал.

Задача 1. Найти фундаментальное решение операторов: а) $\dfrac{d}{dx} - a$; б) $\dfrac{d^2}{dx^2} - a^2$; в) $\left(\dfrac{d}{dx} - a\right)^m$.

Решение: а) Оператор $L = \dfrac{d}{dx} - a$ действует по правилу $Lu = \dfrac{du}{dx} - au$. Его характеристический многочлен $L(p) = p - a$. Поэтому $U = \dfrac{1}{p-a}$. Переходя к оригиналам, получаем $u = e^{at}\eta(t)$.

б) Оператор $L = \dfrac{d^2}{dx^2} - a^2$ имеет характеристический многочлен $L(p) = p^2 - a^2$. Следовательно, $U = \dfrac{1}{p^2 - a^2}$ и $u = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{sh}(at)\,\eta(t)$.

в) решить самостоятельно.

Задача 2. Построить функцию Грина для задачи Дирихле в области $x > 0$, $y > 0$. Решить задачу при условиях $u\big|_{x=0} = \dfrac{\sin y}{1+y^2}$, $u\big|_{y=0} = \dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Решение: Построение функции Грина базируется на методе отражений. Выбираем точечный источник $M_0(\xi,\ \eta)$ в нашей области, т.е. $\xi > 0$, $\eta > 0$. Пусть M_1 — точка, симметричная M_0 относительно оси Oy. Тогда $M_1 = (-\xi,\ \eta)$. На границе $x = 0$, т.е. на оси Oy, заданы условия I рода. Поэтому сумма $\mathcal{E}_2(x, y, \xi, \eta) - \mathcal{E}_2(x, y, -\xi, \eta)$ при $x = 0$ обращается в нуль. Действительно, фундаментальное решение $\mathcal{E}_2$ двумерного оператора Лапласа зависит от расстояния r между точками $(x,\ y)$ и $(\xi,\ \eta)$. Поэтому значения $\mathcal{E}_2(x, y, \xi, \eta)$ и $\mathcal{E}_2(x, y, -\xi, \eta)$ одинаковы, так как точки на оси Oy равноудалены от M_0 и M_1.

Однако разность $\mathcal{E}_2(x, y, \xi, \eta) - \mathcal{E}_2(x, y, -\xi, \eta)$ не удовлетворяет нужным условиям на оси Ox. Добавим точки $M_2(-\xi,\ -\eta)$ и $M_3(\xi,\ -\eta)$, симметричные точкам M_1 и M_0 относительно Ox. Везде расставляем знаки: M_0 — $+$; M_1 — $-$; M_2 — $+$; M_3 — $-$. В результате получаем функцию

$$G(x, y, \xi, \eta) = \mathcal{E}_2(x, y, \xi, \eta) - \mathcal{E}_2(x, y, -\xi, \eta) - \mathcal{E}_2(x, y, \xi, -\eta) + \mathcal{E}_2(x, y, -\xi, -\eta).$$

Эта функция на осях координат обращается в нуль (слагаемые разбиваются на пары, в которых слагаемые подавляют друг друга). Из всех слагаемых только первое (всегда со знаком плюс) имеет особую точку в заданной области, у остальных особая точка находится вне области, т.е. в области три дополнительных слагаемых являются гармоническими функциями. Они и обеспечивают требуемую добавку к фундаментальному решению.

Используя формулу для расстояния, и виду функции $\mathcal{E}_2(r) = \dfrac{1}{2\pi}\ln r$, можем записать:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} - \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2} - \\ - \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2} + \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}.$$

С помощью свойств логарифма эту сумму можно свернуть:

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2][(x+\xi)^2+(y+\eta)^2]}{[(x+\xi)^2+(y-\eta)^2][(x-\xi)^2+(y+\eta)^2]}.$$

Решение теперь можно записать с помощью интегрального представления. При записи криволинейных интегралов следует иметь в виду, что они 1-го рода. Они могут записываться как определенные (интегрирование ведется по координатным осям), но с важным ограничением: интегрирование должно вестись по возрастанию переменной, а нижний предел интегрирования должен быть больше верхнего. С учетом этого получаем (напомним, $(x,\ y)$ — это свободная точка, она будет бегать по границе, а $(xi,\ \eta)$ — это точечный источник, в этой точке будет считаться решение):

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_0^{+\infty}\mu_y(y)\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(0,y,\xi,\eta)\,dy + \int\limits_0^{+\infty}\mu_x(x)\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(x,0,\xi,\eta)\,dx,$$

где μ_y и μ_x — функции из граничных условий по осям Oy и Ox.

Разберемся, что такое $\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}$. На оси Oy нормаль направлена горизонтально влево, т.е. $\boldsymbol{n} = (-1,\ 0)$ и $\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} = -\dfrac{\partial G}{\partial x}$. Аналогично на оси Ox нормаль $\boldsymbol{n} = (0,\ -1)$ и $\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} = -\dfrac{\partial G}{\partial y}$. Таким образом,

$$u(\xi,\eta) = -\int\limits_0^{+\infty}\mu_y(y)\frac{\partial G}{\partial x}(0,y,\xi,\eta)\,dy - \int\limits_0^{+\infty}\mu_x(x)\frac{\partial G}{\partial y}(x,0,\xi,\eta)\,dx.$$

Считаем производную по x:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} - \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2} - \frac{x-\xi}{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2} + \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}\right).$$

При $x = 0$:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\xi}{\pi}\left(\frac{1}{\xi^2+(y+\eta)^2} - \frac{1}{\xi^2+(y-\eta)^2}\right) = -\frac{4y\xi\eta}{\left[\xi^2+(y-\eta)^2\right]\left[\xi^2+(y+\eta)^2\right]}.$$

При $y = 0$ выписываем, используя исмметрию:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{4x\xi\eta}{\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]\left[(x+\xi)^2+\eta^2\right]}.$$

Используя вид функций μ_y и μ_x, получаем окончательный ответ:

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y}{1+y^2}\,\frac{4y\xi\eta}{\left[\xi^2+(y-\eta)^2\right]\left[\xi^2+(y+\eta)^2\right]}\,dy+$$
$$+\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,\frac{4x*\xi\eta}{\left[(x-\xi)^2+\eta^2\right]\left[(x+\xi)^2+\eta^2\right]}\,dx.$$

Задача 3. Построить функцию Грина для задачи

$$\begin{cases}-\Delta u=f(r,\varphi), \quad r>0,\ \varphi\in(\pi/4,\ 3\pi/4);\\ u\Big|_{\pi=\pi/4}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\varphi=3\pi/4}=e^{-r}.\end{cases}$$

и записать решение этой задачи. Здесь r и φ — полярные координаты.

Р е ш е н и е: Выбираем произвольную точку $M_0=(\xi,\ \eta)$. Затем последовательно отражаем ее относительно сторон угла. Идем по часовой стрелке. Относительно правой стороны $\varphi=3\pi/4$ — $M_1=(-\eta,\ -\xi)$; относительно левой стороны $\varphi=\pi/4$ — $M_2=(-\xi,\ -\eta)$; снова относительно правой стороны — $M_3=(\eta,\ \xi)$. Если отражение относительно стороны с условием I рода, знак меняем, если II рода, знак сохраняем. Получится: M_0 — «+» (стартовая точка — всегда плюс); M_1 — «+»; M_2 — «−»; M_3 — «−» (рис. 11.15).

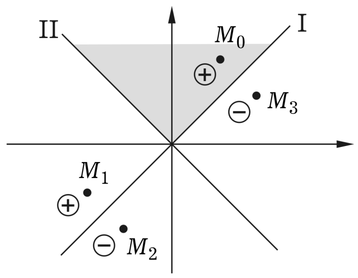

Рис. 11.15

Можно составить функцию Грина:

$$G(x,y,\xi,\eta)=\mathcal{E}_2(x,y,\xi,\eta)+\mathcal{E}_2(x,y,-\eta,-\xi)-$$
$$-\mathcal{E}_2(x,y,-\xi,-\eta)-\mathcal{E}_2(x,y,\eta,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2][(x+\eta)^2+(y+\xi)^2]}{[(x+\xi)^2+(y+\eta)^2][(x-\eta)^2+(y-\xi)^2]}.$$

Заменим декартовы координаты x, y пролярными:

$$G(r,\varphi,\xi,\eta)=\ln\frac{[(r\cos\varphi-\xi)^2+(r\sin\varphi-\eta)^2][(r\cos\varphi+\eta)^2+(r\sin\varphi+\xi)^2]}{[(r\cos\varphi+\xi)^2+(r\sin\varphi+\eta)^2][(r\cos\varphi-\eta)^2+(r\sin\varphi-\xi)^2]}.$$

Полярные координаты в данном случае интересны тем, что в них просто записывается граница ($\varphi=\mathrm{const}$), легко сужается функция на границу и производная по нормали записывается просто: $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\pm\dfrac{\partial u}{r\partial\varphi}$ (знак берется в зависимости от того, какому вращению соответствует нормаль: против часовой стрелки или по часовой).

При данных граничных условиях решение можно записать следующим образом:

$$u(\xi,\eta)=\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{\infty}f(r,\varphi)\,G(r,\varphi,\xi,\eta)\,r\,dr-$$
$$-\int\limits_0^{\infty}\mu_1(r)\frac{\partial G}{r\partial\varphi}(r,\pi/4,\xi,\eta)\,dr+\int\limits_0^{\infty}\mu_2(r)G(r,3\pi/4,\xi,\eta)\,dr.$$

Здесь $f(r,\varphi)$ — функция в правой части дифференциального уравнения, $\mu_1(r)$ и $\mu_2(r)$ — правые части граничных условий на левой и правой сторонах угловой области. В условии задачи $\mu_1(r) = 0$. Учитывая вид функции Грина и условие $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1\sqrt{2}$, получаем:

$$u(\xi,\eta) =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^\infty f(r,\varphi) \ln \frac{[(r\cos\varphi - \xi)^2 + (r\sin\varphi - \eta)^2][(r\cos\varphi + \eta)^2 + (r\sin\varphi + \xi)^2]}{[(r\cos\varphi + \xi)^2 + (r\sin\varphi + \eta)^2][(r\cos\varphi - \eta)^2 + (r\sin\varphi - \xi)^2]}\, r\,dr +$$

$$+ \int\limits_0^\infty e^{-r} \ln \frac{[(r/\sqrt{2} - \xi)^2 + (r/\sqrt{2} - \eta)^2][(r/\sqrt{2} + \eta)^2 + (r/\sqrt{2} + \xi)^2]}{[(r/\sqrt{2} + \xi)^2 + (r/\sqrt{2} + \eta)^2][(r/\sqrt{2} - \eta)^2 + (r/\sqrt{2} - \xi)^2]}\, dr.$$

На дом

1. Построить функцию Грина для задачи Дирихле в круге $x^2 + y^2 < R^2$.

2. Построить функцию Грина для задачи Дирихле — Неймана в области $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ с граничными условиями $u\big|_{\arg z = 0} = f(r)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\big|_{\arg z = \pi/3} = g(r)$.

Занятие 12. Подготовка к рубежному контролю 2

Подбор задач в домашнем задании и рубежном контроле модуля 2 различается. В домашнее задание входит задача на операционное исчисление (общее решение дифференциального уравнения), в РК такой задачи нет. Задача 2 в РК может быть двух типов: найти производную обобщенной функции и найти преобразование Фурье. В ДЗ есть задача только 1-го типа. Задача на функцию Грина также различается: в ДЗ однородные граничные условия, в РК однородным является дифференциальное уравнение.

В разборе задач ниже учтены все особенности и ДЗ, и РК.

Задача 1. Найти вторую производную функции $e^{-|x-1|}+|x+1|$.

Решение: Функция $f(x)=e^{-|x-1|}+|x+1|$ непрерывна и дифференцируема всюду, кроме точек -1 и 1. Следовательно $\partial f=f'$, т.е. обобщенная производная с овпадает с обычной (классической). Для упрощения выкладок используем представление $|x|=x\operatorname{sign}x$. Из него

$$(|x|)'=(x\operatorname{sign}x)'=\operatorname{sign}x+x\cdot(\operatorname{sign}x)'=\operatorname{sign}x.$$

В результае получим

$$\partial f(x)=f'(x)=-e^{-|x-1|}(|x-1|)'+(|x+1|)'=-e^{-|x-1|}\operatorname{sign}(x-1)+\operatorname{sign}(x+1).$$

Функция $f'(x)$ дифференцируема всюду, кроме точек -1, 1, в которых она имеет разрывы I рода. Можем вычислять производную каждого слагаемого отдельно. Функция $f_1(x)=-e^{-|x-1|}\operatorname{sign}(x-1)$ в точке $x=1$ имеет

$$f_1(1-0)=e^{x-1}\big|_{x=1}=1,\quad f_1(1+0)=-e^{-(x-1)}\big|_{x=1}=-1.$$

У этой функции в точке -1 скачок, равный $f_1(1+0)-f_1(1-0)=-2$. Поэтому

$$\partial f'(x)=f''(x)-2\delta(x-1)=e^{-|x-1|}\operatorname{sign}^2x-2\delta(x-1)=e^{-|x-1|}-2\delta(x-1).$$

Функция $f_2(x)=\operatorname{sign}(x+1)$ имеет нулевую обычную производную и скачок в 2 единицы в точке -1. Следовательно, $\operatorname{sign}(x+1)'=2\delta(x+1)$. Окончательный ответ:

$$\partial^2f(x)=e^{-|x-1|}-2\delta(x-1)+2\delta(x+1).$$

Задача 2. Найти преобразование Фурье функции $x\cos x$.

Решение: Решение задачи построено на использовании формул $\delta\xrightarrow{\mathcal{F}}1$, $1\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta$, а также на использовании свойств преобразования Лапласа.

Если $f\xrightarrow{\mathcal{F}}F$, то $xf\xrightarrow{\mathcal{F}}iF'$. Это вытекает из теоремы о дифференцировании изображения. Поэтому $x\xrightarrow{\mathcal{F}}i\delta'$. Функция $\cos x$ в силу формул Эйлера есть комбинация двух экспонент, которые учитываем с помощью теоремы смещения $e^{i\lambda x}f(x)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(x-\lambda)$. В результате $xe^{ix}\xrightarrow{\mathcal{F}}i\delta(x-1)$, $xe^{-ix}\xrightarrow{\mathcal{F}}i\delta(x+1)$. Поэтому

$$x\cos x=x\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{i}{2}\big(\delta(x-1)+\delta(x+1)\big).$$

Задача 3. Методами операционного исчисления найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $x''+x'+x=t\eta(t)+\Lambda(t-2)$.

Решение: Пусть $f(t)$ — правая часть уравнения, $F(p)$ — изображение $f(t)$. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Вводим произвольные начальные условия $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$. Тогда $x' \risingdotseq pX - x_0$, $x'' \risingdotseq p^2X - px_0 - x_0'$. Следовательно,

$$x'' + x' + x \risingdotseq p^2X - px_0 - x_0' + pX - x_0 + X = (p^2 + p + 1)X - (x_0 + x_0') - px_0.$$

В изображениях получаем уравнение

$$(p^2 + p + 1)X = F(p) + (x_0 + x_0') + px_0.$$

Его решение

$$X = \frac{F(p)}{p^2 + p + 1} + \frac{px_0 + (x_0 + x_0')}{p^2 + p + 1}.$$

Найдем функцию $F(p)$. Для этого выразим функцию $f(t)$ через функцию Хевисайда:

$$f(t) = t\eta(t) + \Lambda(t - 2) = t\eta(t) + (t - 1)\eta(t - 1) - 2(t - 2)\eta(t - 2) + (t - 3)\eta(t - 3).$$

По теореме запаздывания

$$F(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{2e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2} = \frac{1 + e^{-p} - 2e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2}.$$

Значит,

$$X = \frac{1 + e^{-p} - 2e^{-2p} + e^{-3p}}{p^2(p^2 + p + 1)} + \frac{px_0 + (x_0 + x_0')}{p^2 + p + 1}.$$

Необходимо найти оригиналы функций $\frac{1}{p^2(p^2 + p + 1)}$ и $\frac{\alpha p + \beta}{p^2 + p + 1}$. Первую функцию раскладываем на элементарные дроби:

$$\frac{1}{p^2(p^2 + p + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + p + 1}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим

$$\frac{1}{p^2(p^2 + p + 1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + p + 1}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{p^2 + p + 1} = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \risingdotseq \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{-t/2}$$

и в результате дифференцирования оригинала

$$\frac{p}{p^2 + p + 1} = e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),$$

получаем

$$\frac{1}{p^2(p^2 + p + 1)} \risingdotseq t - 1 + e^{-t/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) = g(t).$$

Также находим

$$\frac{\alpha p + \beta}{p^2 + p + 1} \risingdotseq e^{-t/2}\left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2\beta - \alpha}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Введем обозначения
$$C_1 = \alpha = x_0, \quad C_2 = \frac{2\beta - \alpha}{\sqrt{3}} = \frac{x_0 + 2x_0'}{\sqrt{3}}.$$
Тогда
$$\frac{\alpha p + \beta}{p^2 + p + 1} \risingdotseq e^{-t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$
Итоговый результат — общее решение:
$$x(t) = g(t)\eta(t) + g(t-1)\eta(t-1) - 2g(t-2)\eta(t-2) + g(t-3)\eta(t-3) + \\ + e^{-t/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Задача 4. Найти фундаментальное решение оператора $\dfrac{d^3}{dx^3} - 3\dfrac{d^2}{dx^2} + 3\dfrac{d}{dx} - I$.

Р е ш е н и е: Здесь символ I обозначает тождественный оператор. Иногда его обозначают цифрой 1 (а число a тогда обозначает оператор aI). Возможны два варианта решения.

1-й вариант (длинный). Составляем задачу Коши
$$\begin{cases} x''' - 3x'' + 3x' - x = 0, \\ x(0) = 0, \;\; x'(0) = 0, \;\; x''(0) = 1. \end{cases}$$
Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, или $(\lambda - 1)^3 = 0$. Имеет один корень $\lambda_1 = 1$ кратности 3. Фундаментальная система решений e^t, te^t, t^2e^t. Общее решение:
$$x(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^t.$$
Используя начальные условия, получаем систему уравнений относительно коэффициентов:
$$\begin{cases} C_0 = 0, \\ C_0 + C_1 = 0, \\ C_0 + 2C_1 + 2C_2 = 1. \end{cases}$$
Ее решение $C_0 = C_1 = 0$, $C_2 = 1/2$. Ответ: $x(t) = \dfrac{t^2}{2}e^t\eta(t)$.

2-й вариант (короткий). Переходя к изображениям по Лапласу, получаем уравнение $L(p) = 1$, или $(p-1)^3 = 1$. С ледовательно, $X(t) = \dfrac{1}{(p-1)^3}$. Переходя к оригиналу, получаем $x(t) = \dfrac{t^2}{2}e^t\eta(t)$ (функция-оригинал всегда содержит функцию Хевисайда, которая часто не пишется, но подразумевается).

В задаче на функцию Грина основные приемы показаны в двух задачах предыдущего задания. Требования по формлению будут различаться:

1) В ДЗ оформление полное, должна быть явно выписана функция Грина и явно выписано решение задачи с помощью функции Грина (благо, что производные функции Грина считать не придется);

2) В РК надо полностью выписать функцию Грина, решение представляем с заменой в формуле Грина производных по нормали частными производными в декартовых или полярных координатах, также должно быть аккуратно прописаны аргументы.

Здесь рассмотрим задачу 30-го варианта ДЗ и задачу пробного билета РК.

Задача 5. Найти функцию Грина заданной краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в области $\Omega = \{(r,\ \varphi)\colon r > 0,\ \alpha < \varphi < \beta\}$. С помощью полученной функции Грина записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи.

Исходные данные: $\alpha = \pi$, $\beta = 3\pi/2$, $u(r, \alpha) = 0$, $u(r, \beta) = 0$, $f(r) = \dfrac{1}{r^4 + 3}$.

Р е ш е н и е: Заданная область — 3-й квадрант плоскости. Расположение источников и знаки показаны на рис. 12.16. Координаты точек: $M_0(\xi,\ \eta)$, $M_1 = (-\xi,\ \eta)$, $M_2 = (-\xi,\ \eta)$, $M_3 = (\xi,\ -\eta)$.

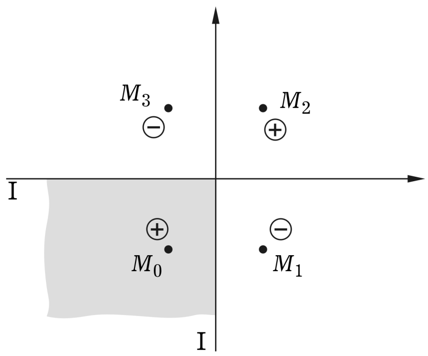

Рис. 12.16

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2][(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]}{[(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2][(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2]}.$$

Записываем 2-ю формулу Грина:

$$\iint\limits_{\Omega} (u\Delta G - G\Delta u)\, dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} - G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) dS.$$

Из нее

$$u(\xi, \eta) = \iint\limits_{\Omega} G\Delta u\, dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS - \int\limits_{\partial\Omega} G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS.$$

Последние два интеграла равны нулю, так как и G, и u удовлетворяют однородным граничным условиям. В данном случае первый из криволинейных интегралов равен 0, поскольку $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, а второй равен нулю, поскольку $G\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Решение представляется в виде

$$u(\xi, \eta) = \iint\limits_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) f(x, y)\, dxdy =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{-\infty}^{0} \ln \frac{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2][(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]}{[(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2][(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2]}\, f(x, y)\, dy.$$

Замечание. Может быть так, что на части границы области заданы условия I рода, а на части — II рода. Пусть Γ — вся граница, Γ_1 — первая часть, Γ_2 — 2-я часть, так что $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} \Big(u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} - G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) dS = \int\limits_{\Gamma_1} \Big(u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} - G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) dS + \int\limits_{\Gamma_2} \Big(u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} - G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big) dS =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_1} u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS - \int\limits_{\Gamma_2} G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS.$$

Убраны части, обращающиеся в нуль из-за условий на функцию Грина: $G\big|_{\Gamma_1} = 0$ и $\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0$. Как видим в оставшихся слагаемых используются только известные значения искомого решения: u на Γ_1 и $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ на Γ_2.

Задача 6. Построить функцию Грина для задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x > 0, \ y > 0; \\ u(0, y) = f(y), \quad u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

С помощью полученной функции записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи.

Решение: Выбираем источник $M_0 = (\xi,\ \eta)$, $\xi,\ \eta > 0$, затем строим симметричные: $M_1 = (-\xi,\ \eta)$, $M_2 = (-\xi,\ -\eta)$, $M_3 = (\xi,\ -\eta)$. Распределение знаков: M_0 — «+»; M_1 — «−»; M_2 — «+»; M_0 — «−».

Функция Грина:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2][(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]}{[(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2][(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2]}.$$

По 2-й формуле Грина

$$\iint\limits_{\Omega} (u\Delta G - G\Delta u)\, dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} - G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \Big) dS.$$

Отсюда

$$u(\xi, \eta) = \iint\limits_{\Omega} G\Delta u\, dxdy + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS - \int\limits_{\partial\Omega} G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS.$$

Полученный интеграл разделяем на два — по сторонам угловой области:

$$u(\xi, \eta) = \int\limits_{y=0} g(x)\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS + \int\limits_{x=0} f(y)\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\, dS.$$

Для производных по внешней нормали имеем:

$$\text{на } Ox\text{:} \quad \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{\partial G}{\partial y}; \qquad \text{на } Oy\text{:} \quad \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{\partial G}{\partial x}.$$

Заменяем также криволинейные интегралы определенными:

$$u(\xi, \eta) = -\int\limits_0^{+\infty} g(x)\frac{\partial G}{\partial y}(x, 0, \xi, \eta)\, dS - \int\limits_0^{+\infty} f(y)\frac{\partial G}{\partial x}(0, y, \xi, \eta)\, dS.$$

Ответ:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2][(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]}{[(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2][(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2]};$$

$$u(\xi, \eta) = -\int\limits_0^{+\infty} g(x)\frac{\partial G}{\partial y}(x, 0, \xi, \eta)\, dS - \int\limits_0^{+\infty} f(y)\frac{\partial G}{\partial x}(0, y, \xi, \eta)\, dS.$$

Замечание. В решении задачи в рамках РК желательно (как было показано выше) проиллюстрировать расположение области, источников, типы условий и знаки на рисунке.

Занятие 13. Краевые задачи в круге и кольце

Для решения краевых задач в круге используется полярная система координат. В полярной системе координат $(r,\ \varphi)$ круг $x^2 + y^2 < R^2$ записывается неравенством $r > R$. При этом по параметру φ рассматриваемые функции должны быть периодичны с периодом 2π. Их можно рассматривать только на периоде, например $[-\pi,\ \pi]$ или $[0,\ 2\pi]$, причем на концах отрезка длиной 2π должны выполняться условия периодичности, например $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$ для отрезка $[-\pi,\ \pi]$.

Оператор Лапласа Δ в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial \varphi}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Условия метода Фурье выполнены, его можно использовать. Выбираем собственные функции оператора $L = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. Этот оператор в классе функций, удовлетворяющих условиям периодичности, является самосопряженным. Действительно,

$$(Lu,\ v) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u''v\,d\varphi = u'v\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi} u'v'\,d\varphi = u'v\Big|_{-\pi}^{\pi} - uv'\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} uv''\,d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} uv''\,d\varphi = (u,\ Lv)\,,$$

поскольку в силу условий периодичности

$$u'v\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad uv'\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Кроме того,

$$(Lu,\ u) = u'u\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi} (u')^2\,d\varphi = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} (u')^2\,d\varphi \leqslant 0.$$

При этом равенство $(u,\ u) = 0$ возможно лишь при $u'(\varphi) \equiv 0$, что равносильно $u = \mathrm{const}$. Из этого вытекает, что есть собственное значение $\lambda_0 = 0$ с одной собственной функцией $\Phi_0(\varphi) = 1$, остальные собственные значения отрицательны.

Задача на собственные функции оператора L ставится следующим образом:

$$\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \lambda u, \quad u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi). \right.$$

Так как $\lambda \leqslant 0$, можно положить $\lambda = -\omega^2$. Решая эту задачу, мы приходим к следующему. Собственными значениями являются $\lambda_n = -\omega_n^2$, где $\omega_n = n$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$ Индексу $n = 0$ соответствует единственная (с точностиью до числового множителя) собственная функция $\Phi_0(\varphi) = 1$. Каждому индексу $n = 1,\ 2,\ \ldots$соответствуют две собственные функции (собственное пространство двумерно), при их выборе необходимо обеспечить условие ортогональности. Обычно используют следующий набор собственных функций:

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \quad \Phi_n^c(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \Phi_n^s(\varphi) = \sin n\varphi, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Это хорошо известная тригонометрическая система. Квадраты норм

$$\|\Phi_n\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big[\Phi_n(\varphi)\big]^2\,d\varphi$$

подсчитать несложно (в записи отпущен верхний индекс c или s, так как это относится к обеим сериям собственных функций). В результате получаем:

$$\|\Phi_0\|^2 = 2\pi, \quad \|\Phi_n^c\|^2 = \|\|\Phi_n^s\|^2 = \pi, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Полученная ортогональная система полна (это доказано в теории тригонометрических рядов). Мы можем для решения, например, задачи для уравнения Лапласа применить метод Фурье. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u = f, \quad r < r_0; \\ (\alpha u + \beta'_r)\big|_{r=r_0} = \mu(\varphi). \end{cases} \tag{4}$$

Решение ищем в виде ряда $u(r,\varphi) = \sum\limits_n R_n(r)\,\Phi_n(\varphi)$. Здесь запись носит условный характер, поскольку все функции тригонометрической системы Φ_0, Φ_n^c, Φ_n^s интерпретируются как единая последовательность $\{\Phi_n\}$. Слова «решение ищем в виде ряда» обоснованы тем, что любая функция $u(r,\varphi)$ может быть разложена по полной ортогональной системе с коэффициентами, зависящими от r (т.е. коэффициенты — это функции переменной r).

Подставляем в дифференциальное уравнение:

$$\Delta\left(\sum_n R_n(r)\,\Phi_n(\varphi)\right) = f.$$

Преобразуем левую часть (аргументы для краткости опускаем):

$$\Delta\left(\sum_n R_n\Phi_n\right) = \sum_n \frac{1}{r}\big(rR_n'\big)'\Phi_n + \sum_n R_n\frac{1}{r^2}\Phi_n'' =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_n \big(rR_n'\big)'\Phi_n - \frac{1}{r^2}\sum_n R_n\omega_n^2\Phi_n = \frac{1}{r^2}\sum_n\Big(r\big(rR_n'\big)' - \omega_n^2R_n\Big)\Phi_n.$$

В результате дифференциальное уравнение привелось к виду

$$\sum_n\Big(r\big(rR_n'\big)' - \omega_n^2R_n\Big)\Phi_n = r^2f(r,\varphi).$$

Ряд слева по ортогональной системе $\{\Phi_n\}$ оказался равным известной функции. Значит, коэффициенты ряда совпадают с коэффициентами Фурье правой части

$$f_n(r) = \frac{(r^2f,\ \Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2} = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} r^2f(r,\varphi)\,d\varphi,$$

т.е.

$$r\big(rR_n'\big)' - \omega_n^2R_n = f_n(r), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подстановка ряда в граничное условие задачи (4) дает:

$$\sum_n\big[\alpha R_n(r_0) + \beta R_n'(r_0)\big]\,\Phi_n(\varphi) = \mu(\varphi).$$

Отсюда

$$\alpha R_n(r_0) + \beta R_n'(r_0) = \mu_n,$$

где

$$\mu_n = \frac{(\mu,\, \Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2} = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mu(\varphi)\Phi_n(\varphi)\, d\varphi.$$

Мы пришли к задаче Коши для каждой функции R_n:

$$\begin{cases} r\big(rR_n'\big)' - \omega_n^2 R_n = f_n(r), \\ \alpha R_n(r_0) + \beta R_n'(r_0) = \mu_n. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение имеет особенность при $r = 0$. Из-за этого любая фундаментальная система уравнения имеет по крайней мере одно неограниченное решение. Следовательно, ограниченное решение определяется с точностью до числового множителя. Этот множитель определяется одним граничным условием.

Выделим случай $f(r, \varphi) \equiv 0$. В этом случае дифференциальное уравнение будет однородным:

$$r\big(rR_n'\big)' - \omega_n^2 R_n = 0,$$

или

$$r^2 R_n'' + rR_n' - \omega_n^2 R_n = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) представляет собой уравнение Эйлера. Его можно свести к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Но проще подобрать два решения этого уравнения, которые являются степенными функциями. Полагая $R_n(r) = r^\alpha$, получаем

$$r^2\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - \omega_n^2 r^\alpha = 0,$$

или

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \omega_n^2 = 0.$$

Отсюда $\alpha_1 = \omega_n = n$, $\alpha_2 = -\omega_n = -n$. Таким образом, есть два решения $R_{1,n} = r^n$ и $R_{2,n} = r^{-n}$. Второе решение в случае круга не подходит, так как не ограничено при $r \to 0$.

Задача 1. Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 2; \\ u(2, \varphi) = \sin^3 \varphi - \cos 2\varphi. \end{cases}$$

Решение: Решение ищем в виде ряда по собственным функциям $\Phi_0(\varphi) = 1$, $\Phi_n^c(\varphi) = \cos n\varphi$, $\Phi_n^s(\varphi) = \sin n\varphi$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$ Записываем ряд:

$$u(r, \varphi) = \frac{R_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^c(r)\cos n\varphi + R_n^s(r)\sin n\varphi\big)$$

(деление нулевого коэффициента пополам носит технический характер и позволяет считать коэффициенты по одной формуле, так как выравниваем квадраты норм).

Дифференциальное уравнение для функций R_n (как с индексом c, так и с индексом s) имеет вид:

$$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0$$

Граничное условие:

$$u(2, \varphi) = \frac{R_0(2)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^c(2)\cos n\varphi + R_n^s(2)\sin n\varphi\big) = \sin^3 \varphi - \cos 2\varphi. \tag{6}$$

Необходимо найти коэффициенты Фурье правой части. В данном случае (тригонометрическое выражение) нет необходимости считать интегралы. Можно правую часть разложить по синусам и косинусам кратных углов. Имеем

$$\sin^3\varphi = \sin^2\varphi\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\,\cos 2\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{4}(\sin 3\varphi - \sin\varphi) = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Таким образом, правая часть имеет вид

$$\mu(\varphi) = \frac{3}{4}\sin\varphi - \cos 2\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$$

и мы имеем равенство

$$\frac{R_0(2)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^c(2)\cos n\varphi + R_n^s(2)\sin n\varphi\big) = \frac{3}{4}\sin\varphi - \cos 2\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Записаны два разложения функции в ряд Фурье, только ненулевых слагаемых в правой части всего три. Сопоставляя коэффициенты левой и правой частей в (6), находим:

$$R_1^s(2) = \frac{3}{4},\quad R_2^c(2) = -1,\quad R_3^s(2) = -\frac{1}{4},$$

а остальные коэффициенты $R_n^c(2)$, $R_n^s(2)$ нулевые. Мы получаем следующий набор задач:

$$\begin{cases} r^2R_1^{s\prime\prime} + rR_1^{s\prime} - R_1^s = 0,\\ R_1^s(2) = \frac{3}{4}; \end{cases}\qquad \begin{cases} r^2R_2^{c\prime\prime} + rR_2^{c\prime} - 4R_2^c = 0,\\ R_2^c(2) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2R_3^{s\prime\prime} + rR_3^{s\prime} - 9R_3^s = 0,\\ R_3^s(2) = -\frac{1}{4}; \end{cases}\qquad \begin{cases} r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0,\\ R_n(2) = 0, \end{cases}$$

где в последней задаче индекс c/s опущен для упрощения выкладок. Последняя задача имеет нулевое решение. Остается три задачи.

В первой задаче общее решение

$$R_1^s(r) = A_1^s r + \frac{B_1^s}{r}.$$

Неограниченное слагаемое отбрасываем, а оставшийся коэффициент находим из граничного условия:

$$R_1^s(2) = 2A_1^s = \frac{3}{4}\ \rightarrow\ A_1^s = \frac{3}{8}.$$

Значит,

$$R_1^s(r) = \frac{3}{8}r.$$

Во второй задаче общее решение

$$R_2^c(r) = A_2^c r^2 + \frac{B_2^c}{r^2}.$$

Неограниченное слагаемое отбрасываем и из граничного условия находим оставшийся коэффициент:

$$A_2^c 2^2 = -1.$$

Следовательно,

$$R_2^c(r) = -\frac{1}{4}r^2.$$

В третьей задаче общее решение

$$R_3^s(r) = A_3^s r^3 + \frac{B_3^s}{r^3}.$$

Неограниченное слагаемое отбрасываем и из граничного условия находим оставшийся коэффициент:

$$A_3^s 2^3 = -\frac{1}{4}.$$

Значит,

$$R_3^s(r) = -\frac{1}{32}r^3.$$

Найдя нужные коэффициенты, записываем решение:

$$u(r,\varphi) = R_1^s(r)\sin\varphi + R_2^c(r)\cos 2\varphi + R_3^s(r)\sin 3\varphi = \frac{3}{8}r\sin\varphi - \frac{1}{4}r^2\cos 2\varphi - \frac{1}{32}r^3\sin 3\varphi.$$

Ответ: $\frac{3}{8}r\sin\varphi - \frac{1}{4}r^2\cos 2\varphi - \frac{1}{32}r^3\sin 3\varphi.$

Задача 2. Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 3; \\ u(3,\varphi) = (\varphi - \pi)^2, \ \ \varphi \in [0,\ 2\pi). \end{cases}$$

Решение: Эта задача отличается от предыдущей граничным условием. Повторяя ход решения, получаем взамен (6) уравнение

$$u(3,\varphi) = \frac{R_0(3)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^c(3)\cos n\varphi + R_n^s(3)\sin n\varphi\big) = (\varphi-\pi)^2.$$

Здесь необходимо получить разложение правой части прямым вычислением интегралов:

$$(\varphi-\pi)^2 = \frac{\mu_0^c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(\mu_n^c\cos n\varphi + \mu_n^s\sin n\varphi\big),$$

где

$$\mu_n^c = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\varphi-\pi)^2\cos n\varphi\,d\varphi, \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

$$\mu_n^s = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\varphi-\pi)^2\sin n\varphi\,d\varphi, \quad n = 1,\,2,\,\ldots$$

(нулевой коэффициент присоединен к косинусным для единства записи, но считать его все равно придется отдельно).

С этими коэффициентами мы получаем следующие задачи для функций R_n:

$$\begin{cases} r^2R_0'' + rR_0' = 0, \\ R_0(3) = \mu_0^c; \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2{R_n^c}'' + r{R_n^c}' - n^2R_n^c = 0, \\ R_n^c(3) = \mu_n^c; \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2{R_n^s}'' + r{R_n^s}' - n^2R_n^s = 0, \\ R_n^s(3) = \mu_n^s. \end{cases}$$

В первой задаче общее решение

$$R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r.$$

Неограниченное слагаемое отбрасываем, а оставшийся коэффициент находим из граничного условия:

$$R_0(3) = A_0 = \mu_0^c.$$

Значит,

$$R_0(r) = \mu_0^c.$$

Во второй задаче общее решение

$$R_n^c(r) = A_n^c r^n + \frac{B_n^c}{r^n}.$$

Неограниченное слагаемое отбрасываем и из граничного условия находим оставшийся коэффициент:

$$A_n^c 3^n = \mu_n^c.$$

Следовательно,

$$R_n^c(r) = \mu_n^c \left(\frac{r}{3}\right)^n.$$

В третьей задаче общее решение

$$R_n^s(r) = A_n^s r^n + \frac{B_n^s}{r^n}.$$

Неограниченное слагаемое отбрасываем и из граничного условия находим оставшийся коэффициент:

$$A_n^s 3^n = \mu_n^s.$$

Следовательно,

$$R_n^s(r) = \mu_n^s \left(\frac{r}{3}\right)^n.$$

Таким образом,

$$u(r,\varphi) = \frac{\mu_0^c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{3}\right)^n \bigl(\mu_n^c \cos n\varphi + \mu_n^s \sin n\varphi\bigr).$$

Осталось найти коэффициенты μ_n.

Нулевой коэффициент:

$$\mu_0^c = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\varphi - \pi)^2 d\varphi = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Косинус-коэффициенты:

$$\mu_n^c = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\varphi - \pi)^2 \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{4}{n^2} \cos n\pi = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Синус-коэффициенты:

$$\mu_n^s = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\varphi - \pi)^2 \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{4\pi}{n} \cos n\pi = \frac{4\pi(-1)^n}{n}.$$

Итог:

$$u(r,\varphi)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{r}{3}\Big)^n 4(-1)^n\Big(\frac{1}{n^2}\cos n\varphi+\frac{\pi}{n}\sin n\varphi\Big).$$

Задача 3. Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце:

$$\begin{cases}\Delta u=0, \quad 1<r<2;\\ u(1,\varphi)=\sin\varphi+\cos 2\varphi, \quad u_r(2,\varphi)=\sin 3\varphi.\end{cases}$$

Решение: Решение ищем в виде ряда по ортогональной системе $\Phi_0(\varphi)=1$, $\Phi_n^c(\varphi)=$ $=\cos n\varphi$, $\Phi_n^c(\varphi)=\sin n\varphi$, $n\in\mathbb{N}$. Соответствующий ряд имеет вид:

$$u(r,\varphi)=\frac{R_0(r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^c(r)\cos n\varphi+R_n^s(r)\sin n\varphi\big)$$

Дифференциальное уравнение (и для косинусов, и для синусов):

$$r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n=0.$$

Граничные условия:

$$\frac{R_0(1)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^c(1)\cos n\varphi+R_n^s(1)\sin n\varphi\big)=\sin\varphi+\cos 2\varphi,$$

$$\frac{R_0'(1)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^{c\prime}(1)\cos n\varphi+R_n^{s\prime}(1)\sin n\varphi\big)=\sin 3\varphi.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем (как в задаче 1) следующие задачи Коши:

$$\begin{cases}r^2R_1^{s\prime\prime}+rR_1^{s\prime}-R_1^s=0,\\ R_1^s(1)=1, \quad R_1^{s\prime}(2)=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}r^2R_2^{c\prime\prime}+rR_2^{c\prime}-4R_2^c=0,\\ R_2^c(1)=1, \quad R_2^{c\prime}(2)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}r^2R_3^{s\prime\prime}+rR_3^{s\prime}-9R_3^s=0,\\ R_3^s(1)=0, \quad R_1^{s\prime}(2)=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n=0,\\ R_n(1)=0, \quad R_n'(2)=0.\end{cases}$$

Последняя задача общая и имеет нулевое решение, т.е. все функции R_n, кроме трех, нулевые. Рассмотрим три содержательные задачи.

В первой задаче общее решение

$$R_1^s(r)=A_1^s r+\frac{B_1^s}{r}.$$

Неограниченное слагаемое здесь в игре (в отличие от задачи 1): центр $r=0$ находится за пределами области. Используя два граничных условия, получаем систему уравнений на коэффициенты:

$$\begin{cases}A_1^s+B_1^s=1,\\ A_1^s-\dfrac{B_1^s}{4}=0.\end{cases}$$

Решая систему, получаем

$$R_1^s(r)=\frac{r}{5}+\frac{4}{5r}.$$

Во второй задаче общее решение

$$R_2^c(r) = A_2^c r^2 + \frac{B_2^c}{r^2}.$$

Из граничных условий получаем систему:

$$\begin{cases} A_2^c + B_2^c = 1, \\ A_2^c - \dfrac{B_2^c}{16} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$R_2^c(r) = \frac{1}{17}r^2 + \frac{16}{17r^2}.$$

В третьей задаче общее решение

$$R_3^s(r) = A_3^s r^3 + \frac{B_3^s}{r^3}.$$

Из граничных условий получаем систему:

$$\begin{cases} A_3^s + B_3^s = 0, \\ 12A_3^s - \dfrac{3B_3^s}{16} = 1. \end{cases}$$

Решая ее, находим:

$$R_3^s(r) = \frac{16}{195}\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right).$$

В результате получаем решение:

$$u(r,\varphi) = R_1^s(r)\sin\varphi + R_2^c(r)\cos 2\varphi + R_3^s(r)\sin 3\varphi = \\ = \left(\frac{r}{5} + \frac{4}{5r}\right)\sin\varphi + \left(\frac{1}{17}r^2 + \frac{16}{17r^2}\right)\cos 2\varphi + \frac{16}{195}\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)\sin 3\varphi.$$

Ответ: $u(r,\varphi) = \left(\frac{r}{5} + \frac{4}{5r}\right)\sin\varphi + \left(\frac{1}{17}r^2 + \frac{16}{17r^2}\right)\cos 2\varphi + \frac{16}{195}\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)\sin 3\varphi.$

Уравнением Гельмгольца называют уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Оно возникает, например, при нахождении решений уравнения колебаний, периодических по времени. Следует обратить внимание, что уравнение Гельмгольца совпадает с уравнением на собственные функции оператора Лапласа. При определенных значениях параметра k задача на уравнение Гельмгольца будет некорректной, поскольку будет иметь неединственное решение.

Решение краевых задач в круге (кольце) строится методом Фурье с использованием тригонометрической ортогональной системы. Действительно, в полярной системе координат уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = f.$$

Мы можем выделить линейный оператор $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ и вспомнить, что он в классе периодических функций самосопряженный и неположительно определенный. Обозначим систему его собственных функций $\{\Phi_n\}$ (она явно выписана при анализе уравнения Лапласа), а соответствующую последовательность собственныых значений $\lambda_n - -\omega_n^2$. Тогда решение уравнение Гельмгольца можно представить в виде $u = \sum\limits_n R_n(r)\Phi_n(\varphi)$. Подстановка этого ряда в дифференциальное уравнение дает

$$\sum_n \Big(r\big(rR_n'\big)' - \omega_n^2 R_n + k^2 r^2 R_n\Big)\Phi_n = r^2 f(r,\varphi).$$

Переходя к коэффициентам Фурье и учитывая, что $\omega_n = n$, получаем

$$r\big(rR_n'\big)' - \omega_n^2 R_n + k^2 r^2 R_n = f_n,$$

или

$$r^2 R_n'' + rR_n' + (k^2r^2 - n^2)R_n = f_n.$$

Мы пришли к неоднородному варианту уравнения Бесселя. В частном случае $f(r,\varphi) = 0$ имеем чистое (т.е. однородное) уравнение Бесселя, а его общим решением будет

$$R_n(r) = A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr),$$

где J_n — функция Бесселя целого порядка n, а Y_n — функция Неймана (цилиндрическая функция II рода).

Если решается задача в круге слагаемое с функцией Неймана, как неограниченное, отбрасывается, а оставшийся коэффициент A_n находится по граничному условию. При решении задачи в кольце остаются оба слагаемых, а коэффициенты определяются двумя граничными условиями на внутренней и внешней границах кольца.

Задача 4. Решить следующую краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \quad r < 1; \\ u(1,\varphi) = \sin^3\varphi - \cos 2\varphi. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Решение ищем по ортогональной системе $\{\Phi_n\}$ в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{R_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^c(r)\cos n\varphi + R_n^s(r)\sin n\varphi\big)$$

Функции R_n^c и R_s^n являются решением уравнения

$$r^2 R_n'' + rR_n' + (k^2r^2 - n^2)R_n = 0.$$

Подставим ряд в граничное условие:

$$\frac{R_0(1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(R_n^c(1)\cos n\varphi + R_n^s(1)\sin n\varphi\big) = \sin^3\varphi - \cos 2\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \cos 2\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Сопоставляя коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получаем 4 задачи Коши:

$$\begin{cases} r^2 R_1^{s\prime\prime} + rR_1^{s\prime} + (4r^2 - 1)R_1^s = 0, \\ R_1^s(2) = \frac{3}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 R_2^{c\prime\prime} + rR_2^{c\prime} + (4r^2 - 4)R_2^c = 0, \\ R_2^c(2) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 R_3^{s\prime\prime} + rR_3^{s\prime} + (4r^2 - 9)R_3^s = 0, \\ R_3^s(2) = -\frac{1}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 R_n'' + rR_n' + (4r^2 - n^2)R_n = 0, \\ R_n(2) = 0, \end{cases}$$

где, как и выше в последней задаче для краткости опущен индекс c/s. Последняя задача имеет нулевое решение, т.е. все функции R_n, кроме трех, нулевые. Решаем остальные задачи.

В первой задаче общее решение

$$R_1^s(r) = A_1^s J_1(2r) + B_1^s Y_1(2r).$$

Второе слагаемое (неограниченное) отбрасываем, а оставшийся коэффициент находим из граничного условия:

$$R_1^s(2) = A_1^s J_1(2) = \frac{3}{4} \quad \to \quad A_1^s = \frac{3}{4J_1(2)}.$$

Значит,

$$R_1^s(r) = \frac{3}{4}\,\frac{J_1(2r)}{J_1(2)}.$$

Во второй задаче общее решение

$$R_2^c(r) = A_2^c J_2(2r) + B_2^c Y_2(2r).$$

Второе слагаемое отбрасываем и из граничного условия находим оставшийся коэффициент:

$$A_2^c J_2(2) = -1.$$

Следовательно,

$$R_2^c(r) = -\frac{J_2(2r)}{J_2(2)}.$$

В третьей задаче общее решение

$$R_3^s(r) = A_3^s J_3(2r) + B_3^s Y_3(2r).$$

Второе слагаемое отбрасываем и из граничного условия находим оставшийся коэффициент:

$$A_3^s J_3(2) = -\frac{1}{4}.$$

Значит,

$$R_3^s(r) = -\frac{1}{4}\,\frac{J_3(2r)}{J_2(2)}.$$

Все коэффициенты найдены, можно записать ответ:

$$u(r,\varphi) = R_1^s(r)\sin\varphi + R_2^c(r)\cos 2\varphi + R_3^s(r)\sin 3\varphi = \\ = \frac{3}{4}\,\frac{J_1(2r)}{J_1(2)}\sin\varphi - \frac{J_2(2r)}{J_2(2)}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\,\frac{J_3(2r)}{J_2(2)}\sin 3\varphi.$$

Ответ: $\frac{3}{4}\,\frac{J_1(2r)}{J_1(2)}\sin\varphi - \frac{J_2(2r)}{J_2(2)}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\,\frac{J_3(2r)}{J_2(2)}\sin 3\varphi.$

На дом:

1. Решить следующие краевые задачи для уравнения Лапласа в круге:

а) $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 1; \\ u(1,\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi), \quad \varphi \in [0,\ 2\pi); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 2; \\ u_r(2,\varphi) = \sin 3\varphi; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 3; \\ u_r(3,\varphi) = \sin 3\varphi + \cos^2\varphi. \end{cases}$

2. Решить следующие краевые задачи в кольце:

а) $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2; \\ u_r(1, \varphi) = \sin 3\varphi + \cos 2\varphi, \quad u_r(2, \varphi) = \cos \varphi; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 2 < r < 3; \\ u(2, \varphi) = \sin \varphi + \cos^2 \varphi, \quad u(3, \varphi) = \cos^3 \varphi. \end{cases}$

3. Решить следующие краевые задачи для уравнения Гельмгольца в круге:

а) $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, \quad r < 1; \\ u_r(1, \varphi) = \sin 3\varphi; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \Delta u + u = 0, \quad r < 2; \\ u(2, \varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi \end{cases}$

в) $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \quad r < 2; \\ u_r(2, \varphi) = \sin^3 \varphi. \end{cases}$

Занятие 14. Краевые задачи в шаре

Для решения задач в шаре (шаровом слое) используется сферическая система координат

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\,\cos\varphi, \\ y = r\sin\vartheta\,\sin\varphi, \\ z = r\cos\vartheta. \end{cases}$$

В этой системе координат оператор Лапласа имеет следующий вид:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Введем обозначения

$$\Delta_{\vartheta,\varphi}u = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}, \quad \Delta_r u = \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big).$$

Область определения оператора $\Delta_{\vartheta,\varphi}$ (это оператор Лапласа на сфере) составляют функции $v(\vartheta,\varphi)$, определенные на $[0,\,\pi]\times[-\pi,\,\pi]$, ограниченные при $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$, периодичебски по φ и дважды непрерывно дифференцируемые на $(0,\,\pi)\times[-\pi,\,\pi]$. Этот оператор является самосопряженным и неотрицательно определенным. Собственными функциями этого оператора являются сферические функции

$$Y^c_{nm}(\vartheta,\varphi) = P^n_m(\cos\vartheta)\,\cos n\varphi, \quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots, \quad m=n,\,n+1,\,\ldots,$$
$$Y^s_{nm}(\vartheta,\varphi) = P^n_m(\cos\vartheta)\,\sin n\varphi, \quad n=1,\,2,\,\ldots, \quad m=n,\,n+1,\,\ldots,$$

где $P^n_m(t)$ — присоединенные функции Лежандра порядка n.

Любую функцию $u(r,\vartheta,\varphi)$, определенную в шаре $x^2+y^2+z^2\leqslant r_0^2$, можно разложить в ряд Фурье по ортогональной системе сферических функций:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} R^c_{0m}(r)\,Y^c_{0m}(\vartheta,\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\big(R^c_{nm}(r)\,Y^c_{nm}(\vartheta,\varphi) + R^s_{nm}(r)\,Y^c_{nm}(\vartheta,\varphi)\big).$$

С учетом вида собственных функций это представление можно записать следующим образом:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} R^c_{0m}(r)\,P_m(\cos\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} P^n_m(\cos\vartheta)\big(R^c_{nm}(r)\,\cos n\varphi + R^s_{nm}(r)\,\sin n\varphi\big). \quad (7)$$

Индекс c в записи функций первого (однократного) ряда можно опустить, поскольку налогичных функций с индексом s нет. Для сокращения записи в общих рассуждениях мы будем записывать собственные функции без верхнего индекса, так что в краткогй записи разложение будет выглядеть следующим образом:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} R_{nm}(r)\,Y_{nm}(\vartheta,\varphi),$$

или, опуская аргументы:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} R_{nm}\,Y_{nm}. \quad (8)$$

Рассмотрим оператор Лапласа $\Delta = \frac{1}{r^2}\Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi}$. Уравнение Лапласа имеет следующий вид (соокращаем на r^2):

$$\Delta_r u + \Delta_{\vartheta,\varphi} = 0.$$

Здесь можно применить метод Фурье, поскольку переменные ϑ и φ имеют независимые области изменения, а оператор $\Delta_{\vartheta,\varphi}$ самосопряженный. Решение уравнения Лапласа записываем в виде (8). Подстановка ряда в дифференциальное уравнение дает:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} \Delta_r(R_{nm})\,Y_{nm} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} R_{nm}\,\Delta_{\vartheta,\varphi}(Y_{nm}) = 0.$$

Учтем, что Y_{nm} — собственные функции, т.е. $\Delta_{\vartheta,\varphi}(Y_{nm}) = \lambda_{nm}Y_{nm}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} \big[\Delta_r(R_{nm}) + \lambda_{nm}R_{nm}\big]Y_{nm} = 0.$$

Равенство нулю ряда означает равенство нулю всех его коэффициентов. Поэтому

$$\Delta_r(R_{nm}) + \lambda_{nm}R_{nm} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = n, n+1, \ldots$$

Учитывая вид оператора Δ_r и значения собственных чисел $\lambda_{nm} = -m(m+1)$, получаем серию уравнений

$$r^2R''_{nm} + 2rR'_{nm} - m(m+1)R_{nm} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = n, n+1, \ldots \tag{9}$$

Эти уравнения являются уравнениями Эйлера, решение таких уравнений следует искать в виде r^α. Полагая $R_{nm} = r^\alpha$, из дифференциального уравнения находим:

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + 2\alpha r^\alpha - m(m+1)r^\alpha = 0,$$

откуда

$$\alpha^2 + \alpha - m(m+1) = 0.$$

Решениями квадратного уравнения будут $\alpha_1 = m$ и $\alpha_2 = -m-1$. Таким образом, дифференциальное уравнение (9) имеет общее решение

$$R_{nm}(r) = A_{nm}r^m + \frac{B_{nm}}{r^{m+1}}$$

(похоже на ситуацию в круге). Среди решений в случае шара следует выделить те, которые ограничены при $r \to 0$. Поэтому

$$R_{nm}(r) = A_{nm}r^m.$$

В результате получаем представление решения уравнения Лапласа в шаре:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{0m}r^m\,P_m(\cos\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} P_m^n(\cos\vartheta)r^m\big(A^c_{nm}\cos n\varphi + A^s_{nm}\sin n\varphi\big).$$

Пусть в задаче поставлено граничное условие I рода $u\big|_{r=r_0} = \mu(\vartheta,\varphi)$. Подставляя в него ряд (8), получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} R_{nm}(r_0)\,Y_{nm}(\vartheta,\varphi) = \mu(\vartheta,\varphi).$$

Из равенства видно, что значения $R_{nm}(r_0)$ есть коэффициенты Фурье функции μ по системе Y_{nm}, которые вычисляются согласно общему правилу (интеграл берется по сфере радиусом r_0):

$$\mu_{mn} = \frac{1}{\|Y_{nm}\|^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi} \mu(\vartheta,\varphi)\, Y_{nm}(\vartheta,\varphi) r_0^2 \sin\vartheta d\vartheta.$$

С учетом вида собственных функций (и с разделением на косинусы и синусы) можем записать:

$$\mu^c_{mn} = \frac{r_0^2}{\|Y^c_{nm}\|^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos n\varphi\, d\varphi \int\limits_{0}^{\pi} \mu(\vartheta,\varphi)\, P^n_m(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta;$$

$$\mu^s_{mn} = \frac{r_0^2}{\|Y^c_{nm}\|^2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin n\varphi\, d\varphi \int\limits_{0}^{\pi} \mu(\vartheta,\varphi)\, P^n_m(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Здесь пока не известны значения $\|Y_{nm}\|^2$. Однако следует понимать, что из-за довольно сложного вида присоединенных функций Лежандра вычисление записанных интегралов в общем виде (т.е. для произвольных n и m) проблематично. В практических задачах будут встречаться функции μ, которые имеют конечное число ненулевых коэффициентов. В этом случае разложение в ряд будет аналогично разложению многочленов по некоторому базису, а квадраты норм собственных функций использоваться не будут.

Задача 1. Решить следующую краевую задачи для уравнения Лапласа в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 1; \\ u(1,\vartheta,\varphi) = \sin^3\vartheta\, \sin\varphi. \end{cases}$$

Решение: Решение u представляем в виде ряда (8):

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} R_{nm} Y_{nm},$$

где $R_{nm}(r)$ — неизвестные функции, подлежащие вычислению. Дифференциальное уравнение для этих функций имеет вид:

$$r^2 R''_{nm} + 2rR'_{nm} - m(m+1)R_{nm} = 0,$$

а общее решение:

$$R_{nm}(r) = A_{nm} r^m + \frac{B_{nm}}{r^{m+1}}.$$

С учетом условия ограниченности коэффициентов при $r = 0$ записываем:

$$R_{nm}(r) = A_{nm} r^m.$$

Подставляем ряд в граничное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} R_{nm}(1)\, Y_{nm}(\vartheta,\varphi) = \sin^3\vartheta\, \sin\varphi.$$

Запишем это более детально с учетом вида собственных функций:

$$\sum_{m=0}^{\infty} R^c_{0m}(1)\, P_m(\cos\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P^n_m(\cos\vartheta) \big(R^c_{nm}(1)\, \cos n\varphi + R^s_{nm}(1)\, \sin n\varphi\big) = \sin^3\vartheta\, \sin\varphi.$$

При фиксированном ϑ слева записан ряд по тригонометрической системе, а справа некоторая функция, вообще говоря, зависящая от φ. В данном случае это базисная функция $\sin\varphi$. Поэтому слева все коэффициенты $R_{nm}(1)$ равны нулю, кроме тех, для которых собственная функция Y_{nm} содержит $\sin\varphi$. Конкретно все $R^c_{nm}(1)$ нулевые, а R^s_{nm} нулевые все, кроме случая $n = 1$. Учитывая это, можем разложение сократить:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} R^s_{1m}(r) P^1_m(\cos\vartheta)\sin\varphi.$$

Соответственно упрощается граничное условие:

$$\sum_{m=1}^{\infty} R^s_{1m}(1) P^1_m(\cos\vartheta)\sin\varphi = \sin^3\vartheta\,\sin\varphi,$$

или

$$\sum_{m=1}^{\infty} R^s_{1m}(1) P^1_m(\cos\vartheta) = \sin^3\vartheta.$$

Надо разложить функцию $\sin^3\vartheta$ в линейную комбинацию присоединенных функций.

Вспомним, что

$$P^n_m(t) = (1-t^2)^{n/2}\frac{d^n}{dt^n}P_m(t).$$

Следовательно,

$$P^n_m(t) = (\sin\vartheta)^n\,Q(\cos\vartheta),$$

где $Q(\cos\vartheta)$ — многочлен от $\cos\vartheta$, его степень равна $m-n$. В нашем случае

$$\sin^3\vartheta = \sin\vartheta\cdot\sin^2\vartheta = \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta),$$

т.е. произведение $\sin\vartheta$ (соответствует $n = 1$) на некоторый многочлен от $\cos\vartheta$ степени 2.

Чтобы получить нужное разложение, необходимо определить собственные функции порядка 1 до уровня $m - 1 \leqslant 2$, т.е. нужны функции P^1_1, P^1_2, P^1_3.

Сначала вычисляем многочлены Лежандра до степени $m = 3$:

$$P_0(t) = \frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dt^0}(t^2-1)^0 = 1, \qquad P_1(t) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d^1}{dt^1}(t^2-1)^1 = t,$$
$$P_2(t) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dt^2}(t^2-1)^2 = \frac{3t^2-1}{2}, \qquad P_3(t) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dt^3}(t^2-1)^3 = \frac{5t^3-3t}{2}.$$

Затем вычисляем присоединенные функции:

$$P^1_1(t) = \sqrt{(1-t^2)}\,(P_1(t))' = \sqrt{1-t^2},$$
$$P^1_2(t) = \sqrt{(1-t^2)}\,(P_2(t))' = 3t\sqrt{1-t^2},$$
$$P^1_3(t) = \sqrt{(1-t^2)}\,(P_3(t))' = \frac{15t^2-3}{2}\sqrt{1-t^2}.$$

Записываем их через параметр ϑ:

$$P^1_1(\cos\vartheta) = \sin\vartheta, \qquad P^1_2(\cos\vartheta) = 3\sin\vartheta\,\cos\vartheta, \qquad P^1_3(\cos\vartheta) = \frac{\sin\vartheta\,(15\cos^2\vartheta^2 - 3)}{2}.$$

Разложение функции $\sin^3\vartheta$ содержит только P_1^1 и P_3^1. Получить его можно методом неопределенных коэффициентов:

$$\sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta) = A\cdot\sin\vartheta + B\cdot 3\sin\vartheta\,\cos\vartheta C\cdot\frac{\sin\vartheta\,(15\cos^2\vartheta^2-3)}{2},$$

или

$$1-t^2 = A+3Bt+C\frac{15t^2-3}{2}.$$

Сравнивая по степеням, находим $A=\frac{4}{5}$, $B=0$, $C=-\frac{2}{15}$. Таким образом,

$$\sin^3\vartheta = \frac{4}{5}P_1^1(\cos\vartheta) - \frac{2}{15}P_3^1(\cos\vartheta).$$

и, возвращаясь к собственным функциям,

$$\sin^3\vartheta\,\sin\varphi = \frac{4}{5}Y_{11}^s(\vartheta,\varphi) - \frac{2}{15}Y_{13}^s(\vartheta,\varphi) \tag{10}$$

Разложение правой части граничного условия получено. Мы теперь получаем следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} r^2(R_{11}^s)''+2r(R_{11}^s)'-2R_{11}^s=0,\\ R_{11}^s(1)=\frac{4}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2(R_{13}^s)''+2r(R_{13}^s)'-12R_{13}^s=0,\\ R_{13}^s(1)=-\frac{2}{15}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2R_{nm}''+2rR_{nm}'-m(m+1)R_{nm}=0,\\ R_{nm}(1)=0. \end{cases}$$

Последняя задача — общее описание остальных задач Коши независимо от индекса c/s. Все они имеют нулевое решение.

Решим первую задачу Коши. Общее решение ($m=1$, неограниченное слашаемое отбрасываем):

$$R_{11}^s(r) = A_{11}^s r.$$

Из граничного условия $A_{11}^s=\frac{4}{5}$. Значит, $R_{11}^s(r)=\frac{4}{5}r$.

Решим вторую задачу Коши. Общее решение ($m=3$, неограниченное слашаемое отбрасываем):

$$R_{13}^s(r) = A_{13}^s r^3.$$

Из граничного условия $A_{13}^s=-\frac{2}{15}$. Значит, $R_{11}^s(r)=-\frac{2}{15}r^3$.

Теперь можно собрать результат:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = R_{11}^s(r)\,Y_{11}^s(\vartheta,\varphi)+R_{13}^s(r)\,Y_{13}^s(\vartheta,\varphi) = \frac{4}{5}r\sin\vartheta\,\sin\varphi - \frac{1}{5}r^3\sin\vartheta\,(5\cos^2\vartheta^2-1)\,\sin\varphi.$$

Замечание 1. Полученное решение несложно записать в декартовых переменных:

$$u(x,y,z) = \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}y\big(4z^2-x^2-y^2\big).$$

Получился многочлен 3-й степени.

Замечание 2. Приведенное решение с дополнительными подробностями и разъяснениями. Эти подробности при практическом решении можно опустить.

Задача 2. Решить следующую краевую задачи для уравнения Гелигольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, \quad r < 1; \\ u(1, \vartheta, \varphi) = \sin^3 \vartheta \, \sin \varphi. \end{cases}$$

Решение: Решение u представляем в виде ряда (8):

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} R_{nm} \, Y_{nm}, \tag{11}$$

где $R_{nm}(r)$ — неизвестные функции, подлежащие вычислению.

Подставляем ряд (11) в дифференциальное уравнение и учитываем, что Y_{nm} — собственные функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \Big[\frac{1}{r^2} (r^2 R'_{nm})' + \Big(9 - \frac{m(m+1)}{r^2} \Big) R_{nm} \Big] Y_{nm} = 0.$$

Преобразуем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \big[(r^2 R'_{nm})' + (9r^2 - m(m+1)) R_{nm} \big] Y_{nm} = 0.$$

Неизвестные функции R_{nm} удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$r^2 R''_{nm} + 2r R'_{nm} + (9r^2 - m(m+1)) R_{nm} = 0.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения*:

$$R_{nm}(r) = A_{nm} \frac{J_{m+1/2}(3r)}{\sqrt{r}} + B_{nm} \frac{Y_{m+1/2}(3r)}{\sqrt{r}}$$

Функции R_{nm} должны быть ограничены в нуле. Поэтому неограниченное слагаемое с функцией Неймана отбрасываем:

$$R_{nm}(r) = A_{nm} \frac{J_{m+1/2}(3r)}{\sqrt{r}}.$$

Подставляем ряд (11) в граничное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} R_{nm}(1) \, Y_{nm}(\vartheta, \varphi) = \sin^3 \vartheta \, \sin \varphi.$$

Правую часть раскладываем в линейную комбинацию собственных функций (используем результаты (10) из решения предыдущей задачи):

$$\sin^3 \vartheta \, \sin \varphi = \frac{4}{5} Y_{11}^s(\vartheta, \varphi) - \frac{2}{15} Y_{13}^s(\vartheta, \varphi).$$

Сравнивая два разложения, заключаем, что $R_{11}^s(1) = \frac{4}{5}$, $R_{13}^s(1) = -\frac{2}{15}$, остальные значения $R_{nm}(1)$ нулевые. В результате приходим к следующим задачам Коши:

$$\begin{cases} r^2 (R_{11}^s)'' + 2r (R_{11}^s)' + (9r^2 - 2) R_{11}^s = 0, \\ R_{11}^s(1) = \frac{4}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 (R_{13}^s)'' + 2r (R_{13}^s)' (9r^2 - 12) R_{13}^s = 0, \\ R_{13}^s(1) = -\frac{2}{15}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 R''_{nm} + 2r R'_{nm} + (9r^2 - m(m+1)) R_{nm} = 0, \\ R_{nm}(1) = 0. \end{cases}$$

*Это то же уравнение, что и в задаче на собственные функции оператора Лапласа в шаре, в котором роль ω играет $k = 3$.

Последняя задача имеет нулевое решение, так что все $R_{nm} = 0$, кроме R_{11}^s и R_{13}^s.

Решим первую задачу Коши. Общее решение ($m = 1$, неограниченное слашаемое отбрасываем):

$$R_{11}^s(r) = A_{11}^s \frac{J_{3/2}(3r)}{\sqrt{r}}.$$

Из граничного условия

$$A_{11}^s = \frac{4}{5J_{3/2}(3)}.$$

Значит,

$$R_{11}^s(r) = \frac{4}{5}\,\frac{J_{3/2}(3r)}{J_{3/2}(3)\sqrt{r}}.$$

Решим вторую задачу Коши. Общее решение ($m = 3$, неограниченное слашаемое отбрасываем):

$$R_{13}^s(r) = A_{13}^s \frac{J_{7/2}(3r)}{\sqrt{r}}.$$

Из граничного условия

$$A_{13}^s = -\frac{2}{15J_{7/2}(3)}.$$

Значит,

$$R_{13}^s(r) = -\frac{2}{15}\,\frac{J_{7/2}(3r)}{J_{7/2}(3)\sqrt{r}}.$$

Найдя все неизвестные функции $R_{nm}(r)$, можем собрать результат:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = R_{11}^s(r)\,Y_{11}^s(\vartheta,\varphi) + R_{13}^s(r)\,Y_{13}^s(\vartheta,\varphi) =$$
$$= \frac{4}{5}\,\frac{J_{3/2}(3r)}{J_{3/2}(3)\sqrt{r}}\,\sin\vartheta\,\sin\varphi - \frac{1}{5}\,\frac{J_{7/2}(3r)}{J_{7/2}(3)\sqrt{r}}\sin\vartheta\,(5\cos^2\vartheta^2 - 1)\,\sin\varphi.$$