

Дифференциальные уравнения в частных производных 6-й семестр, ИУ9 (2020-21 уч.г.)

Экзамен

Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы

1. Квазилинейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Преобразование матрицы квадратичной формы (вывод формулы) и классификация квазилинейных уравнений.
2. Уравнение характеристик. Вывод уравнения характеристик в дифференциалах в случае двух переменных.
3. Классификация задач математической физики, типы граничных условий. Корректные задачи по Адамару. Пример некорректной задачи.
4. Одномерное волновое уравнение. Вывод формулы Даламбера для задачи Коши для волнового уравнения. Корректность этой задачи. Отражение волн для полуограниченной струны.
5. Определение оператора Штурма — Лиувилля, его свойства (самосопряженность, неотрицательность собственных значений).
6. Первая и вторая формулы Грина, их вывод.
7. Общая схема метода Фурье. Применение этого метода на примере одномерного волнового уравнения.
8. Определение преобразования Фурье, его свойства (линейность, подобие, запаздывание-смещение, дифференцируемость и интегрируемость, доказать одно на выбор). Взаимосвязь между гладкостью функции и скоростью убывания.
9. Обратное преобразование Фурье и условия его существования (необходимые условия, условия на функцию-оригинал).
10. Свертка функций, условия существования, свойства. Теорема о преобразовании Фурье свертки.
11. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Теорема Планшереля (с доказательством).
12. Преобразования Лапласа и его свойства (доказать одно на выбор). Теорема об обращении преобразования Лапласа (с доказательством).
13. Пространство основных функций. Доказательство непрерывности операции дифференцирования в этом пространстве.
14. Обобщенные функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Доказательство сингулярности дельта-функции.
15. Носитель обобщенной функции. Лемма о функции, локально равной нулю (с доказательством). Формулировка теоремы о склеивании.
16. Определение замены переменных в обобщенной функции. Четность функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.
17. Производная обобщенной функции. Доказательство того, что дифференцирование обобщенных функций — линейный непрерывный оператор. Свойства оператора дифференцирования для обобщенных функций.
18. Определение первообразной одномерной обобщенной функции. Совокупность всех первообразных. Доказательство того, что любая обобщенная функция имеет первообразную.
19. Свертки обобщенных функций. Условия существования свертки (формулировки и доказательство).
20. Обобщенные функции медленного роста. Теорема Шварца (с доказательством).
21. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Его свойства (доказательство одного на выбор).
22. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора. Теорема о преобразовании Фурье фундаментального решения (с доказательством).
23. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа.
24. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.

25. Гармонические функции. Теорема о среднем. Принцип максимума для гармонических функций.

26. Уравнение Бесселя. Его определитель Вронского. Ограниченное решение уравнения Бесселя.

27. Функции Бесселя и их свойства (дифференцирование, свойство ортогональности, формула для квадрата нормы).

28. Ортогональная система собственных функций оператора Лапласа в круге (граничные условия I рода).

29. Функции Эйлера и их свойства.

30. Уравнение Лежандра и его ограниченные решения.

31. Многочлены Лежандра и их связь с уравнением Лежандра.

32. Свойство ортогональности многочленов Лежандра и формула квадрата нормы многочленов Лежандра.

33. Присоединенное уравнение Лежандра. Присоединенные функции Лежандра и их связь с присоединенным уравнением Лежандра.

34. Присоединенные функции Лежандра. Доказать, что система присоединенных функций Лежандра образует полную ортогональную систему. Формула для квадрата нормы присоединенной функции Лежандра.

35. Ортогональная система собственных функций оператора Лапласа на сфере и в шаре.

Типы задач

1. Преобразование Фурье.
2. Фундаментальное решение дифференциального оператора.
3. Дифференцирование обобщенных функций.
4. Уравнение Лапласа в прямоугольнике.
5. Уравнение Лапласа в кольце.
6. Уравнение Лапласа в шаре.
7. Решение уравнения Лапласа в угловой области с помощью функции Грина.

Типовой вариант билета

1. Квазилинейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Преобразование матрицы квадратичной формы (вывод формулы) и классификация квазилинейных уравнений.

2. Обобщенные функции медленного роста. Теорема Шварца (с доказательством).

3. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, которая вне отрезка $[0, 4]$ равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(2, 0)$, $D(3, 1)$, $E(4, 1)$.