

**6-й семестр, ИУ9 (2020-21 уч.г.)**  
**Дифференциальные уравнения в частных производных**  
**Модуль 1**  
**Вопросы для подготовки**

*Теоретические вопросы*

1. Дайте вывод формулы преобразования матрицы квадратичной формы квазилинейного дифференциального уравнения при замене координат. (4 балла)
2. Дайте классификацию квазилинейных дифференциальных уравнений. Приведите примеры. (4 балла)
3. Запишите уравнение характеристик и дайте определение характеристики. Дайте вывод уравнения характеристик в дифференциалах в случае двух переменных. (4 балла)
4. Дайте классификацию задач математической физики, опишите типы граничных условий. (4 балла)
5. Дайте определение корректной задачи по Адамару. Приведите пример некорректной задачи. (4 балла)
6. Найдите общее решение однородного одномерного волнового уравнения. (4 балла)
7. Выведите формулу Даламбера для задачи Коши для волнового уравнения. Докажите, что эта задача корректна. (4 балла)
8. Опишите метод отражений для полуограниченной струны. Опишите влияние граничного условия на решение задачи для полуограниченной струны. (4 балла)
9. Найдите частные решения трехмерного волнового уравнения. (4 балла)
10. Дайте определение оператора Штурма — Лиувилля, докажьте его свойства (самосопряженность, неотрицательность собственных значений). (4 балла)
11. Дайте вывод первой и второй формул Грина. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля. (4 балла)
12. Опишите общую схему метода Фурье. Разберите применение этого метода на примере одномерного волнового уравнения. (4 балла)
13. Дайте определение преобразования Фурье, сформулируйте его свойства (линейность, подобие, запаздывание-смещение, дифференцируемость, доказать одно из свойств дифференцируемости на выбор). (4 балла)
14. Дайте определение преобразования Фурье, установите взаимосвязь между гладкостью функции и скоростью убывания. (4 балла)
15. Дайте определение свертки функций, сформулируйте ее свойства. Докажите теорему о преобразовании Фурье свертки. (4 балла)
16. Дайте определение обратного преобразования Фурье и приведите условия его существования. (4 балла)
17. Опишите преобразование Фурье в  $L_2(\mathbb{R})$ . Докажите теорему Планшереля. (4 балла)
18. Дайте определение преобразования Лапласа и сформулируйте его свойства (доказать одно на выбор). (4 балла)
19. Докажите теорему об обращении преобразования Лапласа. (4 балла)

### Типовой вариант билета

1. Дайте определение корректной задачи по Адамару. Приведите пример некорректной задачи. (4 балла)

2. Определите тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0,$$

приведите его к каноническому виду. (2 балла)

3. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (4 балла):

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b; \\ u|_{x=0} &= \cos \frac{\pi y}{2b}, & u|_{x=a} &= \cos \frac{7\pi y}{2b}, & u'_y|_{y=0} &= \sin \frac{5\pi x}{a}, & u|_{y=b} &= \sin \frac{3\pi x}{a}. \end{aligned}$$

4. Вычислите свертку  $\varphi \circ \psi$ , где  $\varphi(x) = \operatorname{rect} \frac{x}{2}$ , функция  $\psi(x)$  вне отрезка  $[0, 2]$  равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки  $A(0, 2)$ ,  $B(1, 3)$ ,  $C(2, 0)$ . (2 балла)

5. Найдите преобразование Фурье функции  $f(x)$ , которая вне отрезка  $[0, 6]$  равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(2, 1)$ ,  $D(4, -1)$ ,  $E(6, 1)$ . (2 балла)