Задача 1 *(2 балла)*

Для заданной обобщенной функции $f(x)$ найти вторую обобщенную производную.

Вар.	$\boldsymbol{f(x)}$
1	$e^t+\eta(t+1)+2\delta(t)+\lvert t^2-1\rvert$
2	$\sin t+\operatorname{sign}(t)+\delta(t-1)$
3	$[t]+2t-3+\delta(t-1/2)$
4	$\{t\}+28t^3-\delta'(t-1/2)$
5	$\lvert\cos t\rvert+\operatorname{arctg} t+\delta'(t+2)$
6	$e^t+\lvert t+1\rvert+\lvert t-1\rvert+\eta(t)+2\delta(t)$
7	$[t]+2t-3+\delta'(t+1/2)$
8	$\lvert t-1\rvert+t^2-\delta(t-2)$
9	$\eta(t-1)+\operatorname{arctg} t+\delta'(t)$
10	$[t]+\operatorname{sh} t+\delta'(t-2)$
11	$\lvert\sin t\rvert+\eta(t)+\delta(t-1)$
12	$\lvert t^2-1\rvert+\operatorname{arctg} t+\delta(t+1)$
13	$\{t\}+\operatorname{ch} t+\delta'(t-2)$
14	$\eta(t-1)+\eta(t-2)+t^2+\delta(t-3)$
15	$\lvert t-1\rvert+\lvert t+1\rvert+e^t+\delta(t-2)$

Вар.	$\boldsymbol{f(x)}$
16	$\lvert\cos t\rvert+\sin t+\delta'(t+1)$
17	$\{t\}+\operatorname{ch}(t-1)+\delta'(t+1)$
18	$\lvert t^2-3t+2\rvert+t^2+3t+2+\delta'(t-1)$
19	$\operatorname{rect}(t-1)+\operatorname{ch} 2t+\delta(2t+2)$
20	$\Lambda(t-1)-\Lambda(t-2)+e^t+\delta(t+3)$
21	$[t-1/2]+\cos t+\delta(3t)$
22	$\operatorname{rect}(t-1)+2\operatorname{rect}(t-2)+2e^t-\delta(t+1)$
23	$\lvert\sin 2t\rvert+\cos t+\delta(2t-1)$
24	$\eta(t)+\lvert t-1\rvert+2t+\delta'(t-2)$
25	$\lvert t\rvert-\lvert t-2\rvert+\operatorname{arctg} t+\delta(2t)$
26	$\operatorname{rect}(t/2-1)+\Lambda(t-2)+e^{t^2}+\delta(2t)$
27	$\lvert t^2+t-2\rvert+\operatorname{sh} t+\delta(t-3)$
28	$\{t-1/2\}+e^t+\delta(t-1)$
29	$\Lambda(2t-1)+\cos t+\delta'(2t)$
30	$(2t+1)\eta(t)+t^2+t+\delta(t-2)$

Примечание.

$$\operatorname{rect} x=\eta\Big(\frac{1}{2}-|x|\Big); \qquad \Lambda(x)=(1-|x|)\,\eta(1-|x|);$$

$[x]$ — целая часть числа x; $\{x\}$ — дробная часть числа x.

Задача 2 (*1 балл*)

Методами операционного исчисления найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения.

1. $x'' + 4x = f_1(t)$.

2. $x'' + 9x = f_8(t)$.

3. $x'' - 4x = f_{10}(t)$.

4. $x'' + 4x' + 4x = f_3(t)$.

5. $x'' + 2x' + 2x = f_4(t)$.

6. $x'' + 2x' + x = f_9(t)$.

7. $x'' - 3x' = f_5(t)$.

8. $x'' - 4x = f_7(t)$.

9. $x'' - 4x' + 5x = f_6(t)$.

10. $x'' + 2x' + x = f_3(t)$.

11. $x'' - 4x' = f_5(t)$.

12. $x'' + 3x' + 2x = f_9(t)$.

13. $x'' + x' - 2x = f_3(t)$.

14. $x'' - 2x' = f_1(t)$.

15. $x'' - x' - 2x = f_4(t)$.

16. $x'' + 4x = f_8(t)$.

17. $x'' - 6x' + 8x = f_2(t)$.

18. $x'' - 3x' = f_{10}(t)$.

19. $x'' - 2x' + 2x = f_6(t)$.

20. $x'' + 9x = f_7(t)$.

21. $x'' - 4x = f_3(t)$.

22. $x'' + 4x' + 3x = f_8(t)$.

23. $x'' + 2x' - 3x = f_5(t)$.

24. $x'' - x' - 6x = f_7(t)$.

25. $x'' + 6x' + 8x = f_6(t)$.

26. $x'' + 6x' + 10x = f_9(t)$.

27. $x'' + 2x' + 5x = f_4(t)$.

28. $x'' + 4x' = f_1(t)$.

29. $x'' - 3x' - 4x = f_{10}(t)$.

30. $x'' + x' + x = f_2(t)$.

Примечание.

$$f_1(t) = \Lambda(t-1) + \Lambda(t-2),$$
$$f_2(t) = 2\Lambda(t-1) - \Lambda(t-2),$$
$$f_3(t) = \Lambda(t-1) + 2\Lambda(t-3),$$
$$f_4(t) = \Lambda(t-1) + 2\Lambda(t-2),$$
$$f_5(t) = (1-t)\big(\eta(t) - \eta(t-1)\big) + \Lambda(t-1),$$
$$f_6(t) = \Lambda(t-1) + \Lambda(t-2) + \Lambda(t-3),$$
$$f_7(t) = \Lambda_1(t-1) - 2\Lambda\left(\frac{t-4}{2}\right),$$
$$f_8(t) = 2\Lambda(t-1) + 3\Lambda(t-2) + 2\Lambda(t-3),$$
$$f_9(t) = t\eta(t) + \Lambda(t-1) - t\eta(t-2),$$
$$f_{10}(t) = 3\Lambda(t-1) + 2\Lambda(t-2) + \Lambda(t-3).$$

Задача 3 (*1 балл*)

Найти фундаментальное решение оператора.

1. $\dfrac{d^3}{dt^3} - \dfrac{d^2}{dt^2} - \dfrac{d}{dt} + 1$.

2. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 5\dfrac{d^2}{dt^2} + 8\dfrac{d}{dt} - 4$.

3. $\dfrac{d^3}{dt^3} + \dfrac{d^2}{dt^2} - 2$.

4. $\dfrac{d^3}{dt^3} + 2\dfrac{d^2}{dt^2} - 4\dfrac{d}{dt} - 8$.

5. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 3\dfrac{d}{dt} - 2$.

6. $\dfrac{d^3}{dt^3} - \dfrac{d^2}{dt^2} - 5\dfrac{d}{dt} - 3$.

7. $\dfrac{d^3}{dt^3} + \dfrac{d^2}{dt^2} - 8\dfrac{d}{dt} - 12$.

8. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 7\dfrac{d^2}{dt^2} + 15\dfrac{d}{dt} - 9$.

9. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 4\dfrac{d^2}{dt^2} + 5\dfrac{d}{dt} - 2$.

10. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 2\dfrac{d^2}{dt^2} - 5\dfrac{d}{dt} + 6$.

11. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 7\dfrac{d}{dt} - 6$.

12. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 4\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{d}{dt} + 6$.

13. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 3\dfrac{d^2}{dt^2} - 4\dfrac{d}{dt} + 12$.

14. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 3\dfrac{d^2}{dt^2} - \dfrac{d}{dt} + 3$.

15. $\dfrac{d^3}{dt^3} - \dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{d}{dt} - 1$.

16. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 2\dfrac{d}{dt} + 4$.

17. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 3\dfrac{d^2}{dt^2} + 4\dfrac{d}{dt} - 2$.

18. $\dfrac{d^3}{dt^3} - \dfrac{d^2}{dt^2} + 2$.

19. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 4\dfrac{d^2}{dt^2} + 6\dfrac{d}{dt} - 4$.

20. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 3\dfrac{d^2}{dt^2} + 3\dfrac{d}{dt} - 1$.

21. $\dfrac{d^3}{dt^3} - \dfrac{d^2}{dt^2} - 4\dfrac{d}{dt} + 4$.

22. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 2\dfrac{d^2}{dt^2} + 4\dfrac{d}{dt} - 8$.

23. $\dfrac{d^3}{dt^3} + 3\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{d}{dt} - 5$.

24. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 5\dfrac{d^2}{dt^2} + 8\dfrac{d}{dt} - 6$.

25. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 2\dfrac{d^2}{dt^2} - 7\dfrac{d}{dt} - 4$.

26. $\dfrac{d^3}{dt^3} - 2\dfrac{d^2}{dt^2} - 4\dfrac{d}{dt} + 8$.

27. $\dfrac{d^3}{dt^3} + 3\dfrac{d^2}{dt^2} - 6\dfrac{d}{dt} - 8$.

28. $\dfrac{d^3}{dt^3} + 4\dfrac{d^2}{dt^2} + 6\dfrac{d}{dt} + 4$.

29. $\dfrac{d^3}{dt^3} + \dfrac{d^2}{dt^2} - 8\dfrac{d}{dt} - 12$.

30. $\dfrac{d^3}{dt^3} + 6\dfrac{d^2}{dt^2} + 9\dfrac{d}{dt} + 4$.

Задача 4 (*2 балла*)

Найти функцию Грина заданной краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в области $\Omega = \{(r,\ \varphi)\colon r > 0,\ \ \alpha < \varphi < \beta\}$. С помощью полученной функции Грина записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи.

Вар.	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	**Граничные условия**		$\boldsymbol{f}$
1	$\pi/4$	$3\pi/4$	$u(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	e^{-r^2}
2	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$u(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^2+1}$
3	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	e^{-r^2+2}
4	$-\pi/4$	$\pi/4$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^2+5}$
5	$\pi/2$	π	$u(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	re^{-r^2}
6	π	$3\pi/2$	$u(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^4+3}$
7	$-\pi/2$	0	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$\frac{3}{r^2+1}$
8	$-\pi$	$-\pi/2$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$e^{-r^2}\sin r$
9	$\pi/4$	$3\pi/4$	$u(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$e^{-r^2}\cos r$
10	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^2+1}$
11	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	$u(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	e^{-r^2+2}
12	$-\pi/4$	$\pi/4$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{\sin r}{r^2+1}$
13	$\pi/2$	π	$u(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$r^2e^{-r^2}$
14	π	$3\pi/2$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^4+3}$
15	$-\pi/2$	0	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^2+1}$
16	$-\pi$	$-\pi/2$	$u(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$(r^2+1)e^{-r^2}$
17	$\pi/4$	$3\pi/4$	$u(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$(r^3+r)e^{-r^2}$
18	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^2+1}e^{-r^2}$
19	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	$u(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$(r^2-2)e^{-r^2+2}$
20	$-\pi/4$	$\pi/4$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{\sin r}{r^2+1}$
21	$\pi/2$	π	$u(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$2re^{-r^2}$
22	π	$3\pi/2$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$\frac{r^3e^{-r^4}}{r^4+3}$
23	$-\pi/2$	0	$u(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$\frac{3}{r^2+1}$
24	$-\pi$	$-\pi/2$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	re^{-r^2}
25	$\pi/4$	$3\pi/4$	$u(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	$e^{-r^2}\sin r$
26	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$u(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^2+1}$
27	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	e^{-r^2+2}
28	$-\pi/4$	$\pi/4$	$u_\varphi(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^2+5}$
29	$\pi/2$	π	$u(r,\alpha)=0$	$u_\varphi(r,\beta)=0$	e^{-r^2}
30	π	$3\pi/2$	$u(r,\alpha)=0$	$u(r,\beta)=0$	$\frac{1}{r^4+3}$