

6-й семестр, ИУ9 (2020-21 уч.г.)
Дифференциальные уравнения в частных производных
Модуль 2
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы

1. Дать определение пространства основных функций. Доказать, что операция дифференцирования в этом пространстве непрерывна. (4 балла)
2. Дать определение обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Доказать, что дельта-функция является сингулярной. (4 балла)
3. Дать определение носителя обобщенной функции. Доказать лемму о функции, локально равной нулю. (4 балла)
4. Доказать теорему о склеивании. (4 балла)
5. Дать определение обобщенных функций $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x \pm i0}$. Вывести формулы Сохоцкого. (4 балла)
6. Дать определение замены переменных в обобщенной функции. Проверить функцию $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ на четность. (4 балла)
7. Дать определение производной обобщенной функции. Доказать, что дифференцирование обобщенных функций — линейный непрерывный оператор. (4 балла)
8. Сформулировать и доказать свойства оператора дифференцирования для обобщенных функций. (4 балла)
9. Дать определение первообразной одномерной обобщенной функции. Доказать, что любая обобщенная функция имеет первообразную. (4 балла)
10. Дать определение свертки обобщенных функций. Сформулировать и доказать условия существования свертки. (4 балла)
11. Дать определение обобщенной функции медленного роста. Доказать теорему Шварца. (4 балла)
12. Дать определение преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста. Сформулировать его свойства и доказать одно на выбор. (4 балла)
13. Дать определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора. Доказать теорему о преобразовании Фурье фундаментального решения. (4 балла)
14. Вывести фундаментальное решение уравнения теплопроводности. (4 балла)
15. Вывести фундаментальное решение уравнения Лапласа. (4 балла)
16. Построить решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с помощью функции Грина. (4 балла)

Типы задач

1. Задачи на вычисление производных обобщенных функций.
2. Задачи на преобразование Фурье обобщенных функций.
3. Задачи на фундаментальное решение дифференциального оператора.
4. Задачи на функцию Грина угловой области.

Примеры задач

1. Вычислить вторую производную обобщенной функции:
1.1. $x^2 + 2|x| + 1$. 1.2. $\arcsin(\sin x)$. 1.3. $\delta(3x + 1)$. 1.4. $e^{-|x+1|}$. 1.5. $\eta(x^2 + 2x)$.
1.6. $\delta\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$.
2. Вычислить преобразование Фурье обобщенной функции:
2.1. $\delta(2x + 4)$. 2.2. $\sin x * \delta'(3x)$. 2.3. $1 + x + \delta(x)$. 2.4. $x \sin x$.
2.5. $\delta(x)(\cos 2x + \sin 3x)$.

3. Найти фундаментальное решение дифференциального оператора:

3.1. $\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} - 3I$. 3.2. $\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + I$. 3.3. $\frac{d^3}{dx^3} + \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$.

4. Построить функцию Грина смешанной задачи Дирихле — Неймана для двумерного уравнения Лапласа в первой координатной четверти:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad x > 0, \quad y > 0; \\ u(0, y) &= f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, 0) = g(x).\end{aligned}$$

С помощью полученной функции Грина записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи.

Типовой вариант билета

1. Дать определение обобщенных функций $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x \pm i0}$. Вывести формулы Сохоцкого. (4 балла)

2. Найти вторую производную обобщенной функции $\Lambda(x)$. (4 балла)

3. Найти фундаментальное решение оператора (3 балла)

$$\frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} - I.$$

4. Построить функцию Грина смешанной задачи Дирихле — Неймана для двумерного уравнения Лапласа в первой координатной четверти:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \quad x > 0, \quad y > 0; \\ u(0, y) &= f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, 0) = g(x).\end{aligned}$$

С помощью полученной функции Грина записать в интегральном виде решение рассматриваемой задачи. (3 балла)