Задача 1

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце. (*2 балла*)

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi + 1\Big), \quad u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^3\varphi, \quad u\big|_{r=3} = \pi - |\varphi|. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi\Big), \quad u\big|_{r=3} = \cos^2\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^3\varphi, \quad u\big|_{r=3} = \varphi^2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi + 1\Big), \quad u\big|_{r=3} = \cos^2\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u\big|_{r=2} = \pi^2 - \varphi^2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi - 1\Big), \quad u\big|_{r=3} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u\big|_{r=3} = |\varphi|. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \varphi^2, \quad u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u'_r\big|_{r=2} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi\Big). \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \pi - |\varphi|, \quad u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u\big|_{r=3} = |\varphi|. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \varphi^2, \quad u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u\big|_{r=3} = \pi^2 - \varphi^2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \pi^2 - \varphi^2, \quad u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\varphi, \quad u\big|_{r=2} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi - 1\Big). \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \pi - |\varphi|, \quad u'_r\big|_{r=3} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u'_r\big|_{r=2} = |\varphi|. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi - 1\Big), \quad u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u\big|_{r=2} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi + 1\Big). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \pi - |\varphi|, \quad u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u\big|_{r=2} = |\varphi|. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \pi - |\varphi|, \quad u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\varphi, \quad u\big|_{r=3} = \varphi^2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi + 1\Big), \quad u'_r\big|_{r=3} = \cos^2\varphi. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi, \quad u\big|_{r=2} = |\varphi|. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u\big|_{r=1} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi + 1\Big), \quad u'_r\big|_{r=2} = \cos^2\varphi. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\varphi, \quad u\big|_{r=2} = \varphi^2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi - 1\Big), \quad u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 1 < r < 3, \ \ -\pi \leqslant \varphi < \pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\varphi, \quad u\big|_{r=3} = \frac{\pi}{2}\Lambda\Big(\frac{2}{\pi}\varphi - 1\Big). \end{cases}$

Задача 2

Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге. (*2 балла*)

1. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 3\cos^3\varphi - \sin\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^2\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \sin^3\varphi + 5\cos\varphi. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^3\varphi + \sin^2\varphi - \cos\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \sin^3\varphi + 3\cos\varphi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi - 2\sin\varphi. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi + 5\sin\varphi. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi - \sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi - 6\sin^3\varphi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi - \sin^2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^2\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin\varphi. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi + 5\sin\varphi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 3\cos^3\varphi + 5\cos\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi + 4\sin\varphi. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\varphi + \sin^3\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi + 12\sin^3\varphi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \cos^3\varphi - \sin^3\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^2\varphi + 5\sin\varphi. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \cos^3\varphi - 2\sin\varphi. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^2\varphi + 2\sin\varphi. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \sin^2\varphi - 3\sin\varphi. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \cos^3\varphi + 2\sin\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\varphi + 6\sin^3\varphi. \end{cases}$

Задача 3

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре. (*2 балла*)

1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<3, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=3} = 6\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<4, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<3, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \sin^2\vartheta(1+3\sin 2\varphi). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<3, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi + \cos 2\vartheta. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<3, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(1+\cos\vartheta\,\sin 2\varphi). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<4, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<3, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = 2\cos\vartheta + 3\sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<3, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(\cos\vartheta+\cos 2\varphi). \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<4, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<4, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(1+\sin 2\varphi). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<4, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<4, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \sin^2\vartheta(2\cos\vartheta+3\sin 2\varphi). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \sin\vartheta(\sin\vartheta+\cos\varphi). \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<4, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(3+\cos 2\varphi). \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<3, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<4, \ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi, \ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + \sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

Задача 4

Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре. (*2 балла*)

1. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = 6\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \sin^2\vartheta(1 + 3\sin 2\varphi). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi + \cos 2\vartheta. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(1 + \cos\vartheta\,\sin 2\varphi). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = 2\cos\vartheta + 3\sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(1 + \cos 2\varphi). \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(1 + \sin 2\varphi). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \sin^2\vartheta(2 + 3\sin 2\varphi). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 2, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \sin\vartheta(\sin\vartheta + \cos\varphi). \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(3 + \cos 2\varphi). \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leqslant r < 1, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leqslant r < 3, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leqslant r < 4, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + \sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$