# 6-й семестр, ИУ9 (2020-21 уч.г.)
# Дифференциальные уравнения в частных производных
# Модуль 3
# Вопросы для подготовки

### *Теоретические вопросы*

**1.** Дать определение гармонической функции. Доказать теорему о среднем. (*4 балла*)

**2.** Дать определение гармонической функции. Доказать принцип максимума для гармонических функций. (*4 балла*)

**3.** Записать уравнение Бесселя. Вывести формулу для ограниченного решения этого уравнения. (*4 балла*)

**4.** Записать уравнение Бесселя. Дать определение функций Бесселя и функций Неймана. Объяснить, в чем принципиальное различие между этими функциями. (*4 балла*)

**5.** Сформулировать и доказать свойства функций Бесселя, связанных с дифференцированием. (*4 балла*)

**6.** Доказать свойство ортогональности функции Бесселя и вывести формулу для квадрата нормы функции Бесселя. (*4 балла*)

**7.** Построить ортогональную систему собственных функций оператора Лапласа в круге (граничные условия I рода). (*4 балла*)

**8.** Дать определение функций Эйлера и установить связь между ними. (*4 балла*)

**9.** Дать определение Г-функции Эйлера и вывести для них второе функциональное свойство. (*4 балла*)

**10.** Записать уравнение Лежандра и получить все его ограниченные решения. (*4 балла*)

**11.** Дать определение многочленов Лежандра и показать, что они являются решениями уравнения Лежандра. (*4 балла*)

**12.** Доказать свойство ортогональности многочленов Лежандра и вывести для них формулу квадрата нормы. (*4 балла*)

**13.** Записать присоединенное уравнение Лежандра. Показать, что система функций $\{P_m^n(t)\}$, $m = n,\ n+1,\ \ldots$, является полной ортогональной. (*4 балла*)

**14.** Записать присоединенное уравнение Лежандра. Показать, что присоединенные функции Лежандра являются решениями присоединенного уравнения Лежандра. (*4 балла*)

**15.** Получить систему собственных функций оператора Лапласа на сфере и в шаре. (*4 балла*)

### *Типовой вариант билета*

**1.** Сформулировать и доказать свойства функций Бесселя, связанных с дифференцированием. (*4 балла*)

**2.** Проверить, является ли функция $u(x,y,z) = \dfrac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}$ гармонической. Если является, то указать, в какой области. (*4 балла*)

**3.** Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце (*4 балла*):

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi;$$
$$u\big|_{r=1} = 1 + \sin^2\varphi, \quad u'_r\big|_{r=2} = \cos\varphi.$$

**4.** Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре (*4 балла*):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 1, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$$