Задача 1

Над алфавитом $A = abcdef$ построить нормальный алгорифм, реализующий заданную словарную функцию (в заданиях X^r — слово X в обратном порядке, $|X|$ — длина слова X, W, Y, Z — слова в A, возможно пустые) (*5 баллов*).

1. $f(X) = Xab$, если в X есть два вхождения c, $f(X) = baX$ в противном случае.

2. $f(X) = aXb$, если в X нет a и b рядом, $f(x) = bXa$ в противном случае.

3. $f(X) = cX$, если в X не менее трех вхождений a, иначе $f(X) = Xc$.

4. $f(X) = cX$, если в X одно вхождение a и два вхождения b, иначе $f(X) = c$.

5. $f(X) = Z^r aY$, если $X = YaZ$ и a не входит в Y, иначе $f(X) = Xa$.

6. $f(X) = YcW$, если $X = WaYbZ$, иначе $f(X) = \Lambda$.

7. $f(X) = Ya$, если X содержит $aYcZb$ (первое вхождение), иначе $f(X) = Xc$.

8. $f(X) = Xc$, если $X = WcYaZ$, $c \notin W$, $a \notin Y$, иначе $f(X) = cX$.

9. $f(X) = Xb$, Если в X есть не менее двух вхождений a, иначе $f(X) = Xa$.

10. $f(X) = cX$, если $|X| \leqslant 5$, иначе $f(X) = Xc$.

11. $f(X) = ZaY$, если $X = YaZ$ и Y не содержит a, иначе $f(X) = Xa$.

12. $f(X) = cXc$, если a есть левее c или b есть правее c, иначе $f(X) = aX$.

13. $f(X) = ZcY$, если в X есть $aYcZb$ (последнее вхождение), иначе $f(X) = \Lambda$.

14. $f(X) = X^r$, если в X входит b, иначе $f(X) = b$.

15. $f(X) = Y^r aZ$, если $X = YaZ$ и Z не содержит a, иначе $f(X) = \Lambda$.

16. $f(X) = c$, если в X два вхождения a и одно вхождение b, иначе $f(X) = a$.

17. $f(X) = ZbY$, если $X = WaYbZ$, иначе $f(X) = \Lambda$.

18. $f(X) = X^r$, если в X нет a и b рядом, иначе $f(X) = Xc$.

19. $f(X) = Y^r cZ$, если в X есть $aYcZb$ (первое вхождение), иначе $f(X) = \Lambda$.

20. $f(X) = Y^r aZ$, если $X = YaZ$ и a не входит в Z, иначе $f(X) = aX$.

21. $f(X) = ZbY$, если $X = YaZ$ и Z не содержит a, иначе $f(X) = X^r$.

22. $f(X) = cX$, если левее c есть вхождения a и b, иначе $f(X) = Xc$.

23. $f(X) = X^r$, если в X есть вхождения a и b, иначе $f(X) = \Lambda$.

24. $f(X) = ZaYaW$, если $X = WaYaZ$ и W, Y не содержат a, иначе $f(X) = aX$.

25. $f(X) = a$, если $|X| = 3$, $f(X) = b$, если $|X| = 4$ и $f(X) = \Lambda$ в противном случае.

26. $f(X) = YbW$, если $X = WaYbZ$, иначе $f(X) = \Lambda$.

27. $f(X) = ZbW$, если $X = WaYbZ$, иначе $f(X) = Xab$.

28. $f(X) = abX$, если $2 \leqslant |X| \leqslant 5$, иначе $f(X) = Xab$.

Задача 2

Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $g(m,n)$ от натуральных аргументов m и n (*5 баллов*).

Примечание. Используемые ниже функции определяются следующим образом:

$$\operatorname{sg}(m) = \begin{cases} 0, & m = 0; \\ 1, & m > 0; \end{cases} \qquad \overline{\operatorname{sg}}(m) = 1 - \operatorname{sg}(m); \qquad r(m,n) = \begin{cases} m, & n = 0; \\ m \mathbin{\mathsf{mod}} n, & n > 0, \end{cases}$$

где $x \mathbin{\mathsf{mod}} y$ — остаток от деления x на y. Квадратные скобки обозначают целую часть действительного числа.

1. $g(m,n) = 2r(m+n,6)$.

2. $g(m,n) = \operatorname{sg}\big((m+n) \dot{-} 7\big)$.

3. $g(m,n) = (m \dot{-} n) + 2$.

4. $g(m,n) = \min(m,n)$.

5. $g(m,n) = \left[\dfrac{m + (n \dot{-} 6)}{4}\right]$.

6. $g(m,n) = r\big((m \dot{-} 2) + (n \dot{-} 3), 5\big)$.

7. $g(m,n) = 3\big((m \dot{-} 2) + (n \dot{-} 5)\big)$.

8. $g(m,n) = \max(m,n) \dot{-} 1$.

9. $g(m,n) = \operatorname{sg}\big((m+n) \dot{-} 4\big)$.

10. $g(m,n) = |m-n| \dot{-} 2$.

11. $g(m,n) = \overline{\operatorname{sg}}\big((m \dot{-} 4) + (n \dot{-} 2)\big)$.

12. $g(m,n) = 5 + \operatorname{sg}(|m-n|)$.

13. $g(m,n) = (m+1) \dot{-} (n+4)$.

14. $g(m,n) = r(3(m+n),2)$.

15. $g(m,n) = \left[\dfrac{m+n}{3}\right] \dot{-} 1$.

16. $g(m,n) = \overline{\operatorname{sg}}((m \dot{-} 5) + n)$.

17. $g(m,n) = r(|m-n|,3)$.

18. $g(m,n) = \operatorname{sg}(r((m+n) \dot{-} 1, 4))$.

19. $g(m,n) = 5\big((m \dot{-} 2) + (n \dot{-} 4)\big) + 3$.

20. $g(m,n) = 3\big((m+n) \dot{-} 5\big) \dot{-} 2$.

21. $g(m,n) = 2|m-n|$.

22. $g(m,n) = 4(m \dot{-} n)$.

23. $g(m,n) = \left[\dfrac{m + (n \dot{-} 5)}{5}\right]$.

24. $g(m,n) = r\big((m \dot{-} 1) + (n \dot{-} 5), 6\big)$.

25. $g(m,n) = 6(m + (n \dot{-} 3)) \dot{-} 4$.

26. $g(m,n) = r(m + (n \dot{-} 2), 2) \dot{-} 3$.

27. $g(m,n) = 4 + 7\big((m \dot{-} 3) + n\big)$.

28. $g(m,n) = 2 + \overline{\operatorname{sg}}\big((m \dot{-} 2) + (n \dot{-} 1)\big)$.

Задача 3

Показать, что функция $g(m,n)$ (см. задачу 2) является примитивно рекурсивной (*5 баллов*).