Занятие 1. Алгебра высказываний

1. Определить, является ли данное слово формулой; внести исправления, если необходимо:
   а) $(A \wedge B)C\neg D$; б) $(A \wedge B) \to C$;
   в) $((C \to B) \wedge \neg B)$; г) $(((\neg A) \to B) \to \neg(C \vee D))$.

2. Определите, сколькими способами можно расставить скобки в слове, чтобы получилась формула; выберите вариант, сооветствующий установленному приоритету операций:
   а) $A \to \neg B \vee C \wedge A$; б) $B \to C \to D \to \neg B \to \neg D$.

3. Перечислите все подформулы записанной формулы:
   а) $(((A \to B) \wedge (C \to D)) \to ((\neg B) \vee D))$; б) $((A \to B) \to ((A \to (\neg B)) \to (\neg B)))$.

4. Докажите, что всякая формула, не являющаяся элементарной, имеет одно из следующих представлений: $\neg A$; $(A \wedge B)$; $(A \vee B)$; $(A \to B)$. Здесь A и B — некоторые формулы.

5. Докажите, что результат замены некоторого вхождения формулы C в формулу A другой формулой B (обозначение A^C_B) снова есть формула.

6. Докажите, что результат подстановки формулы P в формулу A вместо переменной x (т.е. замена всех вхождений переменной x формулой P) снова есть формула.

Далее используется упрощенный вариант записи, при котором: а) снимаются внешние скобки; б) действует правило приоритетов (приоритет 1 для $\to$ и $\sim$, приоритет 2 для $\vee$ и $\wedge$, приоритет 3 для $\neg$) и порядок операций одного приоритета.

7. Построить таблицы истинности следующих формул:
   а) $(A \to B) \vee (A \to B \wedge A)$; б) $A \wedge (B \to A) \to \neg A$; в) $A \wedge \neg B \to B \to (A \to B)$;
   г) $A \wedge (B \vee \neg A) \wedge ((\neg B \to A) \vee B)$; д) $\neg(A \to \neg(B \wedge A)) \to A \vee C$;
   е) $A \to (B \to C) \to (A \to B \to (A \to C))$.

8. Докажите выполнимость формул:
   а) $\neg(A \to \neg A)$; б) $A \to B \to (B \to A)$;
   в) $(B \to A \wedge C) \wedge \neg(A \vee C \to B)$; г) $(A \to B) \vee (A \to \neg B)$;

9. Докажите тождественную истинность формул:
   а) $(A \to B) \vee (B \to A)$; б) $(A \to B) \vee (A \to \neg B)$; в) $A \to (B \to A \wedge B)$;
   г) $A \to B \to (B \to C \to (A \to C))$; д) $\neg B \to \neg A \to (A \to B)$; е) $A \to (B \to A)$;
   ж) $A \vee \neg A$; з) $A \to B \to (A \to (B \to C) \to (A \to C))$; и) $A \wedge B \to A$; к) $A \wedge B \to B$;
   л) $A \to A \vee B$; м) $B \to A \vee B$; н) $A \to C \to (B \to C \to (A \vee B \to C))$;
   о) $A \to B \to (A \to \neg B \to \neg A)$; п) $\neg\neg A \to A$; р) $A \to \neg\neg A$;
   с) $\neg B \to A \to (\neg B \to \neg A \to B)$; т) $A \vee A \to A$; у) $B \to C \to (A \vee B \to A \vee C)$;
   ф) $A \to B \to A \to A$; х) $\neg P \to (P \to Q)$.

10. Укажите значения переменных, при которых ложны формулы
    а) $x \to y \wedge z \to (\neg y \to \neg x) \to \neg y$; б) $x \vee y \vee z \to (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
    в) $x \vee y \to \neg x \wedge y \vee (x \wedge \neg y)$; г) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \to x \wedge y \wedge z$;
    д) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (u \wedge v) \vee (u \wedge w) \vee (v \wedge w) \vee (\neg x \wedge \neg u)$.
    Ответ: а) $\equiv \neg y$; б) 001, 010; в) $\equiv x \mid y$; г) 011, 101, 110
    .

11. Доказать эквивалентность формул:
    а) $X \to Y \equiv \neg X \vee Y$; б) $\neg(X \to Y) \equiv X \wedge \neg Y$; в) $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \equiv X$;
    г) $(X \vee Y) \wedge (Y \vee Z) \wedge (Z \vee X) \equiv (X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z) \vee (Z \wedge X)$.
12. Построить формулу X, для которой тавтологией является следующая формула:
    а) $X \wedge y \to \neg x \to (x \to \neg y \to X)$; б) $z \to \neg y \wedge x \to X \to X \wedge (x \to y) \wedge z$.
13. Привести к дизъюнктивной нормальной форме и конъюнктивной нормальной форме:
    а) $(x \to y) \to (z \to \neg x) \to (\neg y \to \neg z)$; б) $x \to y \to \neg x \to \neg y \to \neg z \to z$;
    в) $x \to (y \to z) \to (x \to \neg z) \to (x \to \neg y)$.
14. Найти СДНФ, эквивалентную формуле:
    а) $\neg x \to \neg y \to (y \wedge z \to x \wedge z)$; б) $(x \to y \to \neg x) \to (x \to y \wedge x)$;
    в) $\neg(x \wedge y \to \neg x) \wedge \neg(x \wedge y \to \neg y)$.
15. Найти СКНФ, эквивалентную формуле:
    а) $z \to x \to \neg(y \vee z \to x)$; б) $\neg(x \wedge y \to x) \vee (x \wedge (y \vee z))$; в) $\neg(x \wedge (y \vee x)) \to \neg(x \wedge y \vee z)$.
16. По СКНФ формулы X построить:
    а) СДНФ X^*; б) СКНФ $\neg X$; в) СДНФ $\neg X$.
17. Построить полином Жегалкина:
    а) $(x \to y) \to (z \to \neg x) \to (\neg y \to \neg z)$; б) $x \to y \to \neg x \to \neg y \to \neg z \to z$;
    в) $x \to (y \to z) \to (x \to \neg z) \to (x \to \neg y)$.
18. Найти все существенные переменные формул:
    а) $(y \wedge x) \vee (\neg y \wedge z)$; б) $x \wedge y \vee \neg x$; в) $x \to (y \to z) \to (x \to y \to (x \to z))$.
19. Выразить формулой:
    а) $\wedge$ и $\to$ через $\vee$ и $\neg$; б) $\vee$ и $\to$ через $\wedge$ и $\neg$; в) $\wedge$ и $\vee$ через $\to$ и $\neg$;
    г) $\neg$ через $\to$ и 0; д) $\neg$ через $\oplus$ и 1; е) $\vee$ через $\to$.
20. Доказать, что нельзя выразить формулой:
    а) $\neg$ через $\wedge$, $\vee$, $\to$ и $\sim$; б) $\to$ через $\vee$ и $\wedge$; в) $\wedge$ через $\vee$ и $\to$.
    Ответ: а) $\wedge, \vee, \to, \sim \in T_1$; б) $\vee, \wedge \in M$
    .
21. Установить полноту системы функций:
    а) $\{\vee,\ \neg\}$; б) $\{\to,\ \neg\}$; в) $\{\to,\ 0\}$; г) $\{|\}$; д) $\{\oplus,\ \vee,\ 1\}$.
22. Доказать, что система функций не является полной:
    а) $\{\wedge,\ \vee,\ \to\}$; б) $\{\neg\}$.
23. Установить независимость системы функций (ни одна функция не выражается через остальные):
    а) $\{\neg,\ \sim\}$; б) $\{\neg,\ \oplus\}$; в) $\{\sim,\ \oplus\}$; г) $\{\sim,\ \vee\}$.
24. Доказать, что система функций полна и независима:
    а) $\{\to,\ /\}$, где $x/y \equiv \neg(y \to x)$; б) $\{0,\ 1,\ [\cdot,\cdot,\cdot]\}$, где $[x,y,z] = (y \wedge x) \vee (\neg y \wedge z)$;
    в) $\{\sim,\ \vee,\ 0\}$.

Занятие 2. Исчисление высказываний

1. Выяснить, являются ли выводами в ИВ следующие последовательности формул:
   а) $X \to X \vee Y$;
   б) $X \to X \vee Y, \quad X \to X \vee Y \to (X \to (X \to X \vee Y)), \quad X \to (X \to X \vee Y)$;
   в) $X \to (Y \to X), \quad X \to (Y \to X) \to Y, \quad Y$.

2. Найти минимальный список формул Γ, такой, что следующая последовательность формул будет выводом из гипотез Γ:
   а) $X \to (Y \to Z), \quad X, \quad Y \to Z, \quad Y, \quad Z$;
   б) $X \to \neg\neg Y \to (\neg Y \to \neg X), \quad X \to \neg\neg Y, \quad \neg Y \to \neg X, \quad \neg Y, \quad \neg X$.

3. Построить выводы формул
   а) $X \vee X \to X$; б) $X \to X \wedge X$; в) $X \vee Y \to Y \vee X$; г) $X \wedge Y \to Y \wedge X$.

4. Построить выводы секвенций:
   а) $Y \vdash X \to Y$; б) $X \to Y, Y \to Z \vdash X \to Z$; в) $X \to (Y \to Z), X \to Y, X \vdash Z$.

5. Доказать следующие правила:
   а) $\dfrac{\Gamma, \neg Y \vdash \neg X}{\Gamma, X \vdash Y}$; б) $\dfrac{\Gamma, X \vdash Y;\ \Gamma, Y \vdash X}{\Gamma \vdash X \sim Y}$; в) $\dfrac{\Gamma \vdash X \sim Y}{\Gamma, X \vdash Y}$.

6. Построить вывод следующих секвенций:
   а) $X \to (Y \to Z) \vdash Y \to (X \to Z)$; б) $X \to (Y \to Z) \vdash X \wedge Y \to Z$;
   в) $X \wedge Y \to Z \vdash X \to (Y \to Z)$; г) $X \to Y \vdash Y \to Z \to (X \to Z)$;
   д) $X \to Y \vdash X \wedge Z \to Y \wedge Z$; е) $X \to Y, Y \to X \vdash X \sim Y$; ж) $X \sim Y \vdash Y \sim X$.

7. Построить вывод следующих формул:
   а) $(X \wedge Y) \wedge Z \sim X \wedge (Y \wedge Z)$; б) $X \wedge (Y \vee Z) \sim (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$; в) $\neg\neg X \sim X$;
   г) $\neg(X \vee Y) \sim \neg X \wedge \neg Y$; д) $X \wedge Y \sim \neg(X \to \neg Y)$.

8. Вывести следующие эквивалентности:
   а) $(X \to Y \to \neg X) \wedge (\neg X \to \neg Y) \sim \neg Y$;
   б) $(X \to Y \to (\neg X \to \neg Y) \to (\neg X \to Y \wedge Z)) \sim (X \vee Y)$;
   в) $(\neg(X \to Z) \to (X \vee Y \to Y)) \sim (\neg X \vee Y \vee Z)$;
   г) $\neg(\neg(Y \to Z) \to (X \to \neg Y)) \sim (X \wedge Y \wedge \neg Z)$.

Занятие 3. Алгебра предикатов

1. Пусть f, g и h — соответственно одно-, двух- и трехместный функциональные символы в односортном языке. Выясните, являются ли термами слова:
а) $f(g(x,y))$; б) $g(f(z,h(x,y,z)))$; в) $f(g(x),h(x,y,z))$.

2. Пусть f, g и h — соответственно одно-, двух- и трехместный функциональные символы, p, q — одно- и трехместный предикатный символ в односортном языке. Выясните, являются ли формулами слова:
а) $q(x,f(y),h(y,z,z))$; б) $(p(x) \to \forall y(q(x,y,z) \wedge p(g(x,y))))$;
в) $q(p(x),f(y),f(z))$; г) $f((h(x,y,z)))$.

3. В заданной формуле идентифицировать все вхождения переменных, указав связанные и свободные:
а) $\forall x\,(p(x,y) \to \forall y\,q(y))$; б) $\forall x\,(p(x,y) \to \forall y\,r(x,y))$; в) $(\neg\exists z\,q(z,z) \wedge r(f(y,z)))$.

4. Выяснить является ли свободной подстановка $y \to T$ для формулы W, если:
а) $T = f(x,z),\ W = \forall x\,p(x,y)$; б) $T = f(y,x),\ W = (p(y,x) \to \exists x\,q(x))$.

5. Пусть $\mathcal{M}$ — односортный язык без констант, функцональных символов, с двумя трехместными предикатными символами p и s. В качестве модели этого языка выберем носитель $D = \mathbb{N}_0$ с такой интерпретацией предикатных символов: $p(x,y,z) \equiv (xy = z)$, $s(x,y,z) \equiv (x+y = z)$. Записать формулу с одной переменной x, истинную в заданной модели тогда и только тогда, когда:
а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) x четное; г) x простое.

6. В условиях предыдущей задачи записать формулу с двумя свободными переменными, истинную в заданной модели тогда и только тогда, когда:
а) $x = y$; б) $x \leqslant y$; в) x делит y.

7. В условиях предыдущей задачи записать формулу с тремя свободными переменными, истинную в заданной модели тогда и только тогда, когда
а) z — наибольший общий делитель x и y;
б) z — наименьшее общее кратное x и y.

8. В условиях предыдущей задачи записать предложение, которое в заданной модели выражает утверждение, что уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ имеет в точности два различных корня.

9. В условиях предыдущей задачи записать предложение, которое в заданной модели выражает утверждение, что система $3x - y = 0$, $x + y = 1$ не имеет решений.

10. Построив соответствующий язык записать в нем: а) аксиомы группы; б) аксиомы абелевой группы; в) аксиомы кольца; г) аксиомы модуля M над кольцом K.

Занятие 4. Выполнимость формул в алгебре предикатов

1. Выяснить, выполнимы ли формулы:
   а) $\exists x \forall y\,(q(x,x) \wedge \neg q(x,y))$; б) $\exists x \exists y\,(p(x) \wedge \neg p(y))$; в) $\exists x \forall y\,(q(x,y) \to \forall z\, r(x,y,z))$; г) $p(x) \to \forall y\, p(y)$.

2. Выяснить, являются ли тождественно истинными формулы:
   а) $\exists x\, p(x) \to \forall x\, p(x)$; б) $\neg(\exists x\, p(x) \to \forall x\, p(x))$;
   в) $\exists x \forall y\, q(x,y) \to \forall y \exists x\, q(x,y)$; г) $\forall x \exists y\, q(x,y) \to \exists y \forall x\, q(x,y)$.

3. Доказать, что бескванторная формула тождественно истинная тогда и только тогда, когда она может быть получена из некоторой тавтологии алгебры высказываний.

4. Формулы $\forall x\, X \to X_t^x$ и $X_t^x \to \exists x\, X$ являются логическими законами при условии, что подстановка $\binom{x}{t}$ правильная. Привести примеры, когда эти законы нарушаются.

   О т в е т: $\forall x(\exists y(x < y) \to \exists y(t < y))$, $\forall y(t \geqslant y) \to \exists x \forall y(x \geqslant y)$.

5. Доказать, что формула $\exists x \forall y\,(p(x,y) \to (\neg p(y,x) \to (p(x,x) \sim p(y,y))))$ истинна в любой модели, содержащей не более трех элементов.

6. Доказать, что формула $\exists x \forall y \exists z (p(y,z) \to p(x,z)) \to (p(x,x) \to p(y,x))$ истинна во всякой конечной модели, но не тождественно истинна.

7. Доказать, что формула

   $$\forall x \exists y\, p(x,y) \wedge \forall x \forall y (p(x,y) \to \neg p(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \to (p(y,z) \to p(x,z)))$$

   выполнима в некоторой бесконечной модели и ложна во всех конечных.

8. Доказать, что следующие формулы тождественно истинны:
   а) $\exists x\,(A(x) \wedge (B \to C(x))) \to (\forall x (A(x) \to \neg C(x)) \to \neg B)$ (x не входит свободно в B);
   б) $\forall x (A(x) \to \neg B(x)) \to \neg(\exists x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x))$;
   в) $\forall x (A(x) \to \neg B(x)) \to \neg(\forall x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x))$;

9. Привести к предваренной форме, считая X бескванторной:
   а) $\neg \exists x \forall y \exists z \forall u X$; б) $\exists x \forall y A(x,y) \wedge \exists x \forall y B(x,y)$;
   в) $\exists x \forall y A(x,y) \vee \exists x \forall y B(x,y)$; г) $\exists x \forall y A(x,y) \to \exists x \forall y B(x,y)$;
   д) $\forall x \exists y (A(x) \to B(y,z)) \to \exists x \forall z\,(B(x,z) \wedge A(y))$;
   е) $\forall x\, P(x) \to \forall y (\forall z\, Q(x,z) \to \forall x\, P(x))$.

Занятие 5. Формальные аксиоматические теории

1. Формальная теория имеет аксиомы: а) $p(x,x)$; б) $p(x,y) \to (p(x,z) \to p(y,z))$. Пользуясь техникой естественного вывода, построить вывод правил:
   а) $\dfrac{\Gamma \vdash p(T_1,T_2)}{\Gamma \vdash p(T_2,T_1)}$; б) $\dfrac{\Gamma \vdash p(T_1,T_2);\ \Gamma \vdash p(T_2,T_3)}{\Gamma \vdash p(T_1,T_3)}$.

2. В условиях формальной теории из предыдущей задачи привести такую модель, в которой формула $p(x,y) \to p(f(x),f(y))$ не является истинной.

3. В формальной арифметике доказать следующие формулы:
   а) $(X=0) \vee \exists u(u^+ = X)$;
   б) $(X \leqslant Y) \vee (Y \leqslant X)$;
   в) $(X+Y=0) \to (X=0) \wedge (Y=0)$;
   г) $(X=Y) \to (X+X=Y+Y)$;
   д) $(X \leqslant Y) \to (X+X \leqslant Y+Y)$;
   е) $X+X=Y+Y \to X=Y$;
   ж) $(X<Y) \to \big(\neg(Z=0) \to (XZ<YZ)\big)$;
   з) $\neg(Z=0) \wedge (XZ=YZ) \to X=Y$.

4. В формальной арифметике установить правила
   а) $\dfrac{\Gamma \vdash X=Y}{\Gamma \vdash XZ=YZ}$; б) $\dfrac{\Gamma \vdash X+Z=Y+Z}{\Gamma \vdash X=Y}$; в) $\dfrac{\Gamma \vdash X \leqslant Y}{\Gamma \vdash X+Z \leqslant Y+Z}$;
   г) $\dfrac{\Gamma \vdash X+Z \leqslant Y+Z}{\Gamma \vdash X \leqslant Y}$; д) $\dfrac{\Gamma \vdash X \leqslant Y}{\Gamma \vdash X \cdot Z \leqslant Y \cdot Z}$.

Обзорное занятие

1. Вывод в гильбертовском исчислении предикатов:
   а) $\forall x B(x) \vee \forall x C(x) \to \forall x (B(x) \vee C(x))$;
   б) $\exists x \neg\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \neg\big(\exists x P(x) \to \forall x Q(x)\big)$;
   в) $(\forall x P \to \exists x Q) \to \big(\forall x P \to \exists x \neg(P \wedge \forall x \neg Q)\big)$.

2. Вывод в формальной арифметике:
   а) $XY=Z \to (X \leqslant Z) \vee (Y=0)$; б) $\exists z\big((X=0^{++}z) \vee (X^+=0^{++}z)\big)$;
   в) $(X+Y=1) \to (X=0) \vee (Y=0)$.

3. Комплексное задание на истинность:
   а) $\exists x\,(A(x) \wedge (B \to C(x))) \to (\forall x(A(x) \to \neg C(x)) \to \neg B)$ (x не входит свободно в B);
   б) $\forall x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg(\exists x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x))$;
   в) $\forall x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg(\forall x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x))$;

Занятие 6. Нормальные алгорифмы Маркова

1. Описать действие нормальных алгорифмов над алфавитом A, которые заданы схемами:

$$\text{а) } a\xi \to a; \quad \text{б) } \xi a \to a; \quad \text{в) } \begin{cases} a\xi \to \xi a, \\ a \to\cdot\ Q, \\ \Lambda \to a; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \xi \to \Lambda, \\ \Lambda \to\cdot\ Q; \end{cases} \quad \text{д) } \xi \to 1.$$

(здесь $a \in A$, $1 \notin A$)

2. Пусть A и B — произвольные алфавиты, $p \notin A \cup B$, $a, b \in A$, $Q \in B^*$. Описать область применимости и действие алгоритма $\mathfrak{A}$ в алфавите $A \cup B \cup \{p\}$, который описывается схемой

$$\begin{cases} pa \to Qp, \\ pb \to Rp, \\ p\xi \to \xi p, \\ p \to\cdot\ \Lambda, \\ \Lambda \to p. \end{cases}$$

3. Рассматриваем двухбуквенный алфавит $M = \{1,\ 0\}$. В этом алфавите каждое слово, например 1110100111, можно трактовать как запись кортежа целых чисел (в данном случае (3, 1, 0, 3)): символ 0 служит разделителем чисел. Описать область применимости и действие алгоритмов

$$\text{а) } \begin{cases} 0 \to 0, \\ p11 \to p1, \\ p1 \to\cdot\ p, \\ \Lambda \to p; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0 \to 0, \\ p1 \to 11, \\ \Lambda \to p. \end{cases}$$

4. В алфавите $A = \{0,\ 1\}$ составить нормальный алгорифм, выполняющий следующее действие:

   а) удаление всех нулей;

   б) удаление всех четных сиволов;

   в) перестановка символа с нечетным порядковым номером с последующим символом;

   г) циклическая перестановка назад (первый в конец);

   д) циклическая перестановка вперед (последний в начало).

Занятие 7. Числовые нормальные алгорифмы

1. В алфавите $A = \{0,\ 1\}$ составить нормальный алгорифм, выполняющий сложение двух чисел (буква 0 является разделителем чисел).

   Указание: алгоритм должен убирать 0.

2. В алфавите $A = \{0,\ 1\}$ составить нормальный алгорифм, выполняющий умножение двух чисел (буква 0 является разделителем чисел).

3. Составить нормальный алгорифм над алфавитом A, включающем буквы 0 и 1, который выбирает из списка слов нужное по номеру (разделителем слов является 0, первое слово есть число, определяющее номер выбираемого слова).

4. В алфавите $A = \{1\}$ составить нормальный алгорифм, вычисляющий функции: а) $f(x) = x - 2$; б) $f(x) = 2x$; в) $f(x) = x/2$; г) $f(x) = x^2$.

   Ответ: а) $(111 \to\cdot 1,\ 1 \to 1)$; б) $(q1 \to 1q,\ p1 \to 1pq,\ q \to 1,\ p \to\cdot \Lambda,\ \Lambda \to p1)$; в) $(p11 \to 1p,\ p1 \to\cdot \Lambda,\ p \to\cdot \Lambda,\ \Lambda \to p)$.

5. В алфавите $A = \{1\}$ составить нормальный алгорифм, вычисляющий функции: а) $f(x) = \min\{x,\ 3\}$; б) $f(x) = \max\{x,\ 3\}$.

   Ответ: а) $(111 \to\cdot \Lambda,\ 1 \to 1)$; б) $(111 \to\cdot 111,\ 1 \to 11)$.

6. В алфавите $A = \{1\}$ составить нормальный алгорифм, проверяющий, делится ли число на 3 или нет (результат: 1, если делится, и 0, если нет).

   Ответ: $(p111 \to p,\ p11 \to p1,\ p1 \to\cdot 0,\ p \to\cdot 1,\ \Lambda \to p)$.

7. В алфавите $A = \{0,\ \ldots,\ 9\}$ составить нормальный алгорифм, вычисляющий функции: а) $f(x) = x + 2$; б) $f(x) = x - 2$; в) $f(x) = 2x$; г) $f(x) = x/2$.

Занятие 8. Сочетания нормальных алгорифмов

1. В алфавите $A = \{0,\ 1\}$ составить алгоритм, вычисляющий функции двух переменных: а) $f(x, y) = x - y$; б) $f(x, y) = |x - y|$; в) $f(x, y) = \max\{x,\ y\}$; г) $f(x, y) = \min\{x,\ y\}$; д) $f(x, y) = [x/y]$.

2. В алфавите $A = \{1\}$ составить алгоритм вычисления функции $f(x) = x^2$.

3. В алфавите $A = \{0,\ 1,\ \gamma\}$ составить алгоритм сложения двух чисел (числа записаны в двоичной системе исчисления с разделителем γ).

4. В алфавите $A = \{1\}$ составить алгоритм вычисления функции $f(x) = x^5$.

5. В алфавите $A = \{0,\ 1\}$ составить алгоритм вычисления функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 2y, & x = y; \\ x - 2y, & x \neq y. \end{cases}$$

6. В алфавите $A = \{0,\ 1\}$ составить алгоритм вычисления функции $f(x, y) = x^3 - y^4$.

7. В алфавите $A = \{0,\ 1\}$ составить алгоритм вычисления функции двух переменных $f(x, y) = \max\{2x - y,\ x + 2y\}$.

Занятие 9. Машины Тьюринга

1. Машина Тьюринга с внешним алфавитом 01 имеет программу

$$\begin{array}{llll}
q_1 0 \to q_4 0 R, & q_3 0 \to q_6 0 R, & q_5 0 \to q_4 0 R, & q_7 0 \to q_6 0 R, \\
q_1 1 \to q_2 1 L, & q_3 1 \to q_1 1 L, & q_5 1 \to q_5 0, & q_7 1 \to q_7 0. \\
q_2 0 \to q_2 0 R, & q_4 0 \to q_0 1, & q_6 0 \to q_0 0, & \\
q_2 1 \to q_3 1 L, & q_4 1 \to q_5 0, & q_6 1 \to q_7 0, &
\end{array}$$

   Определить, во что эта машина преобразует слова: а) 11111; б) 1111; в) 10111001111; г) 110111.

2. Машина Тьюринга с внешним алфавитом $01*$ имеет программу, представленную таблицей

	q_1	q_2	q_3
0		$q_3 1 R$	$q_1 0 L$
1	$q_2 0 L$	$q_2 1 L$	$q_3 1 R$
$*$	$q_0 0$	$q_2 * L$	$q_3 * R$

   Определить, как эта машина преобразует слова а) 111; б) $111*11$; в) $110*0*11$.

3. Машина Тьюринга с внешним алфавитом $01*$ имеет программу, представленную таблицей

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$q_1 0 R$	$q_3 0 R$	$q_3 0 L$	$q_1 0 L$
1	$q_3 0 L$	$q_2 1 L$	$q_4 0 R$	$q_4 1 R$
$*$	$q_0 0$	$q_3 * L$		$q_4 * R$

   Определить, как эта машина преобразует слова а) 111; б) $111*11$; в) $110*0*11$.

4. В алфавите $A = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ составить машину Тьюринга, выполняющую следующее действие:

   а) удаление всех пустых символов;
   б) удаление всех четных символов;
   в) перестановка символа с нечетным порядковым номером с последующим символом;
   г) циклическая перестановка назад (первый в конец);
   д) циклическая перестановка вперед (последний в начало);
   е) инверсия (задом наперед).

5. В алфавите $A = *0123456789$ составить машину Тьюринга для вычисления функций а) $f(x) = x + 2$; б) $f(x) = x - 2$; в) $f(x) = 2x$; г) $f(x) = x/2$.

Занятие 10. Числовые машины Тьюринга

1. Определить, какую функцию $f(x)$ вычисляет машина Тьюринга с командами

$$q_1 0 \to q_2 0 R; \quad q_1 1 \to q_0 1; \quad q_2 0 \to q_0 1; \quad q_2 1 \to q_2 1 R.$$

2. Определить, какую из функций $f(x)$, $f(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2, x_3)$ вычисляет машина Тьюринга с программой $q_1 0 \to q_0 0$.

3. Построить следующие машины Тьюринга:
а) перенос нуля: $q_1 001^x 0 \vdash 01^x 00$;
б) правый сдвиг: $q_1 01^x 00 \vdash 01^x q_0 0$;
в) левый сдвиг: $01^x q_1 0 \vdash q_0 01^x 0$;
г) транспозиция: $01^x q_1 01^y 0 \vdash 01^y q_0 01^x 0$;
д) удвоение: $q_1 01^x 0 \vdash q_0 01^x 01^x 0$;
е) циклический сдвиг: $q_1 01^{x_1} 01^{x_2} \ldots 01^{x_n} 0 \vdash q_0 01^{x_2} 01^{x_3} \ldots 01^{x_n} 01^{x_1} 0$.

4. Построить машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции одного переменного:
а) $f(x) = x + 3$; б) $f(x) = \operatorname{sg} x = x \dot{-} 1$; в) $f(x) = \overline{\operatorname{sg}}\, x = 1 - \operatorname{sg} x$;
г) $f(x) = \max\{x,\ 3\}$; д) $f(x) = \min\{x,\ 3\}$; е) $f(x) = 3x$.

5. Построить машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции двух переменных:
а) $f(x, y) = x + y$; б) $f(x, y) = x - y$; в) $f(x, y) = x \dot{-} y = \max\{x - y,\ 0\}$;
г) $f(x, y) = \max\{x,\ y\}$; д) $f(x, y) = \min\{x,\ y\}$; е) $f(x, y) = xy$;
ж) $f(x, y) = x \bmod y$; з) $f(x, y) = [x/y]$.

Занятие 11. Примитивно рекурсивные функции

1. Выяснить, какие из следующих функций являются примитивно рекурсивными, а какие нет:
а) $f(x) = x + 2$; б) $f(x) = 5$; в) $f(x) = x - 1$.

2. Какие функции можно получить из простейших с помощью одних лишь суперпозиций?

   Указание: Докажите, что множество функций $f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha x_j + b$, $\alpha = 0, 1$, $b \in \mathbb{N}$, замкнуто относительно суперпозиции.

3. Функция $h(x, y)$ получена с помощью примитивной рекурсии из функций $f(x)$ (это значение при $y = 0$) и $g(x, y, z)$. Выяснить, что это за функция, если
а) $f(x) = x$, $g(x, y, z) = z^x$; б) $f(x) = x$, $g(x, y, z) = x^z$.

4. Докажите, что следующие функции примитивно рекурсивны:
а) $f(x) = x + n$ (n фиксировано); б) $f(x) = nx$ (n фиксировано); в) $f(x) = x!$;
г) $f(x, y) = x + y$; д) $f(x, y) = x \dot{-} y$; е) $f(x, y) = xy$; ж) $f(x, y) = x^y$;
з) $f(x, y) = |x - y|$; и) $f(x, y) = \max\{x,\ y\}$; к) $f(x, y) = \min\{x,\ y\}$.

Занятие 12. Предикаты и простые числа

1. Докажите, что следующие предикаты примитивно рекурсивны:
   а) $x \vdots y$; б) „x четно“;
   в) $P(x, y, z)$ — z общий делитель чисел x и y;
   г) $\mathrm{Pr}(x, y)$ — x и y взаимно просты.

2. Используя операции над предикатами и оператор ограниченной минимизации, показать, что следующие функции примитивно рекурсивны:
   а) $[x/y]$;
   б) $x \bmod y$;
   в) $\tau(x)$ — число делителей числа x;
   г) $\sigma(x)$ — сумма делителей числа x.
3. Показать, что следующие функции примитивно рекурсивны
   а) $\text{НОД}(x, y)$; б) $\text{НОК}(x, y)$;
   в) $\pi(x)$ — число чисел, меньших x и взаимно простых с x;
   г) $\mathrm{pw}(x, y)$ — кратность простого множителя $\mathrm{pr}(y)$ (простого числа с номером y) в разложении числа x;
   д) $l_{\max}(x)$ — наибольший простой делитель числа x;
   е) $[x\sqrt{2}]$;
   ж) $[\sqrt{x}]$;
   з) $f(x, y) = [x^{1/y}]$, где $f(x, 0) = x$.

Занятие 13. Обзор курса

Нормальные алгорифмы

1. Построить НА над алфавитом $A = абвг$, вычисляющий функцию $f(X) = a^n$, где n — число вхождений в X слова $гав$ (полагаем $x^0 = \Lambda$).
2. Построить НА над алфавитом $A = абв$, вычисляющий функцию $f(X) = aX$, если в X первый символ *в*, а последний *г*, и $f(X) = cX$ в противном случае.

Сочетания нормальных алгорифмов

3. С помощью сочетаний НА описать алгоритм вычисления функции
$$g(m,n) = \begin{cases} 2^m, & m = n; \\ m \dot{-} 2n, & m \neq n. \end{cases}$$
4. С помощью сочетаний НА описать алгоритм вычисления функции $f(m,n) = 3^{m \dot{-} 2} + n!$

Машины Тьюринга

5. Построить машину Тьюринга в алфавите 01, вычисляющую функцию $f(n) = \left[\dfrac{n+2}{5}\right]$.
6. Построить машину Тьюринга в алфавите 01, вычисляющую функцию $f(m,n) = \max\{m+2,\ n\}$.

Рекурсивные функции и рекурсивные множества

7. Показать, что функция
$$f(x,y) = \begin{cases} x \bmod 3, & x > y; \\ y \bmod 3, & x \leqslant y \end{cases}$$
примитивно рекурсивна.
8. Показать, что множество натуральных чисел, не дающих в остатке 2 при делении на 3 и 3 при делении на 4, есть примитивно рекурсивное множество.
9. Показать, что множество всех полных квадратов натуральных чисел примитивно рекурсивно.
10. Показать, что если из бесконечного примитивно рекурсивного множества выкинуть один элемент, то получится примитивно рекурсивное множество.
11. Если множество A примитивно разрешимо, то множество квадратов элементов A тоже разрешимо.
12. Доказать, что множество чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, примитивно рекурсивно.