

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3 семестр 2020–21 уч.г., спец. РЛ2 (бакалавры)

## Модуль 1. Ряды Фурье. Преобразование Фурье

Виды аудиторных занятий и самостоятельной работы	Сроки проведения или выполнения, недели	Трудоемкость, часы	Примечание
Лекции	1-14	28	
Практические занятия	1-10	20	
Домашние задания текущие	1-10	20	
ДЗ «Преобр. Фурье и метод Фурье»	1–10	12	
Рубежный контроль по модулю	10	3	

## Модуль 2. Краевые задачи для уравнения Лапласа

Виды аудиторных занятий и самостоятельной работы	Сроки проведения или выполнения, недели	Трудоемкость, часы	Примечание
Лекции	15-25	22	
Практические занятия	11-16	12	
Домашние задания текущие	6-9	8	
ДЗ «Функции Грина и опер. исчисл.»	11–16	12	
Рубежный контроль по модулю	17	3	

## ЛЕКЦИИ

### Модуль 1. Метод Фурье. Специальные функции

*Лекция 1.* Предмет математической физики. Виды уравнений математической физики. Линейные и квазилинейные уравнения 2-го порядка. Их классификация. Канонический вид уравнения 2-го порядка. Характеристики.

ОЛ-5: §§1.2, 1.3; ДЛ1: гл.1.

*Лекция 2.* Приведение уравнений 2-го порядка от двух переменных к каноническому виду. Уравнение Лапласа в цилиндрических и сферических координатах. Постановка задач математической физики. Начальные и граничные условия. Типы задач математической физики. Понятие о корректности задачи математической физики. Пример Адамара.

ОЛ-5: §§1.3, 1.4\$ ДЛ1: гл.1.

*Лекция 3.* Общее решение одномерного волнового уравнения. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера. Геометрические интерпретации. Прямая и обратная волна.

ДЛ1: гл. I, §2; МП-4, пп. 1.1–1.3.

*Лекция 4.* Отражение волн. Частные решения трехмерного волнового уравнения. Плоские и сферические волны. Уравнение Гельмгольца.

ДЛ1: гл. I, §2.

*Лекция 5.* Интеграл Фурье, условия существования. Его комплексная форма. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье.

ОЛ–2: гл.4, п.4.1-4.4.

*Лекция 6.* Теорема обращения преобразования Фурье. Косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье. Свертка двух функций. Ковариация и корреляция, их связь со сверткой. Преобразование Фурье свертки, ковариации и корреляции.

ОЛ–2: гл.4, п.4.5-4.7; МП–2: п.2.1, 2.2, 2.4.

*Лекция 7.* Элементарные импульсные функции  $\text{rect}(x)$  и  $\Lambda(x)$ . Нахождение образов Фурье импульсных функций; примеры. Применение преобразования Фурье для решения задач математической физики (на примере уравнения теплопроводности).

МП–2: п.2.4, 2.5 (примеры №1-6); ОЛ–1: гл.11, § 8, § 9 (п.6).

*Лекция 8.* Бесконечномерное евклидово пространство. Сходимость последовательностей. Полнота пространства. Ряды по ортогональным системам. Задача о наименьшем квадратичном уклонении. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость ортогональных систем.

ОЛ–2: гл.3, п.3.1.

*Лекция 9.* Пространство  $L_2$ . Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. Комплексная форма. Разложение четных и нечетных функций. Теорема Дирихле.

ОЛ–2: гл.3, п.3.3, 3.4, 3.6, 3.8, 3.9.

*Лекция 10.* Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье. Тригонометрический ряд Фурье как суперпозиция простых гармоник. Комплексная форма записи тригонометрического ряда Фурье, спектральная последовательность.

ОЛ–2: пп. 3.4, 3.5.

*Лекция 11.* Основные понятия теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Самосопряженные операторы. Оператор Штурма — Лиувилля. Роль однородных условий. Общая схема метода разделения переменных. Стандартные области (прямоугольник, параллелепипед, цилиндр, сфера). Задача Штурма — Лиувилля.

МП–3: гл. 1–3.

*Лекция 12.* Задача на собственные функции для круговых областей. Уравнение Бесселя. Свойства уравнения Бесселя. Функции Бесселя  $I$  рода. Их свойства. Функции Неймана. Решение краевых задач в круговых и цилиндрических областях.

МП–3: гл. 4–5.

*Лекция 13.* Гамма-функция Эйлера и ее свойства. Основные соотношения. Задача на собственные значения в сферических и шаровых областях. Уравнение Лежандра.

*Лекция 14.* Свойства полиномов Лежандра. Присоединенное уравнение Лежандра и присоединенные функции Лежандра. Решение краевых задач в сферических и шаровых областях.

## **Модуль 2. Метод функций Грина. Операционное исчисление**

*Лекция 15.* Принцип суперпозиции. Источники. Дельта-функция. Фундаментальное решение. Уравнения Лапласа и Пуассона. Фундаментальные решения уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости. Интегральные представления решений краевых задач с помощью фундаментальных решений.

МП–1: пп.2.2–2.4.

*Лекция 16.* Интегральная формула Грина. Функция Грина. Объемный потенциал. Свойства объемного потенциала. Метод отражений.

ОЛ-4: гл.3, п.3.1-3.4.

*Лекция 17.* Гармонические функции и их свойства. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа.

ОЛ-4: гл.3, п.3.5, 3.6; МП-3: п.1.2, 1.3.

*Лекции 18–19.* Уравнение Гельмгольца. Фундаментальные решения уравнения Гельмгольца, обобщенное фундаментальное решение. Интегральное представление решения уравнения Гельмгольца. Функция Грина для уравнения Гельмгольца. Метод функции Грина решения первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Решение уравнения Гельмгольца в неограниченном пространстве. Формула Кирхгоффа. Условия излучения Зоммерфельда.

МП-1: п.3.4-3.10.

*Лекция 20.* Преобразование Лапласа. Понятия функции-оригинала и изображения. Сходимость интеграла Лапласа. Аналитичность изображения. Поведение изображения в бесконечно удаленной точке. Формула обращения Римана — Меллина. Единичная функция Хевисайда и ее изображение. Основные теоремы операционного исчисления: линейности, подобия, смещения.

ОЛ-3: гл.6, п. 6.1, 6.2.

*Лекция 21.* Основные теоремы операционного исчисления: дифференцирования и интегрирования оригиналов и изображений. Предельные значения оригинала и изображения. Таблица оригиналов и изображений. Запаздывающая единичная функция. Теорема запаздывания.

ОЛ-3: гл.6, п. 6.2, 6.3.

*Лекция 22.* Изображение составного оригинала. Изображение периодического оригинала. Свертка двух оригиналов. Теорема о свертке. Методы отыскания оригинала по известному изображению. Теоремы разложения.

ОЛ-3: гл.6, п. 6.2-6.4.

*Лекция 23.* Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) с постоянными коэффициентами. Передаточная функция, интеграл Дюамеля.

ОЛ-3: гл.6, п. 6.5.

*Лекция 24.* Решение ЛДУ с составной функцией в правой части. Решение систем ЛДУ.

ОЛ-3: гл.6, п. 6.5.

*Лекция 25.* Резерв.

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

### **Модуль 1. Метод Фурье. Специальные функции**

*Занятие 1.* Вычисление свертки двух функций. Вычисление взаимной ковариационной и взаимной корреляционной функций

Ауд.: МП-2, гл.2, пример №7; №9 и №10;

Дома: ДЗ №1, задача №1–3.

*Занятие 2.* Классификация квазилинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Ауд.: МРК.

Дома ОЛ-9: гл.1, задачи 5, 11, 16, 21–23.

*Занятие 3.* Формула Даламбера и метод распространения волн.

Ауд.: МРК

Дома:

*Занятия 4–5.* Преобразование Фурье. Вычисление изображений и оригиналов. Кусочно-линейные оригиналы.

Ауд.: МП-2, п.1.4; гл.1, задача №2; п.2.5; гл.2, задача №4.

Дома: ДЗ № 1, задачи №4 и №5.

*Занятие 6.* Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. Разложение четных и нечетных функций.

Ауд.: МП-2, п.1.2, 1.3; гл.1, задача №1;

Дома: ОЛ-7, гл.12, №480, 482, 485.

*Занятие 7.* Оператор Штурма — Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма — Лиувилля. Решение задач Штурма — Лиувилля.

Ауд.: МП-3, п. 2.1, 2.2, 2.3(задачи №1 и №2); п. 2.4(задачи №1 и №2);

Дома: МП-3, п. 2.3(задачи №3 и №4); п. 2.4(задачи №3 и №4).

*Занятие 8.* Решение краевых задач для уравнения Лапласа в прямоугольнике методом Фурье.

Ауд.: МП-3, п. 3.2(задача №1), п. 3.3(задача №4);

Дома: МП-3, п. 3.3(задачи №3 и №5).

*Занятие 9.* Решение краевых задач для уравнения Лапласа в круге и в кольце методом Фурье.

Ауд.: ОЛ-4, п. 3.8, гл.3 (задачи №3.5 и №3.6);

Дома: ОЛ-4, гл.3(задачи №3.3 и №3.4).

*Занятие 10.* Рубежный контроль по модулю 1.

## ***Модуль 2. Метод функций Грина. Операционное исчисление***

*Занятие 11.* Решение краевых задач для уравнения Лапласа в цилиндре методом Фурье.

Ауд.: МП-3, п. 5.2(задача №2);

Дома: МП-3, п. 5.2(задача №3), ДЗ №2.

*Занятие 12.* Решение краевых задач для уравнения Лапласа в шаре.

*Занятия 13–14.* Применение свойств преобразования Лапласа для нахождения изображений.

Ауд.: ОЛ-8, № 511(г,и,л), 517, 527, 555, 559, 534, 542, 537, 548, 563;

Дома: ОЛ-8, № 511(б,в,е), 518, 525, 557, 560, 532, 545, 538, 547, 562.

*Занятие 15.* Методы отыскания оригинала по известному изображению.

Ауд: ОЛ-6, гл.4, Упр. № 1(а,в), №2(б); ДЗ №1, задачи №2 и №3;

Дома: ДЗ №3, задачи №1-4.

*Занятие 16.* Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) с постоянными коэффициентами. Передаточная функция, интеграл Дюамеля.

Ауд: ОЛ-8, № 658, 661, 749, 718;

Дома: ДЗ №3, задача №5.

*Занятие 17.* Рубежный контроль по модулю 2.

## ***КОНТРОЛЬНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ***

### ***Модуль 1. Метод Фурье. Специальные функции***

1. Домашнее задание «Преобразование Фурье и метод Фурье» (11-я неделя).
2. Рубежный контроль по модулю (11-я неделя).

### ***Модуль 2. Метод функций Грина. Операционное исчисление***

3. Домашнее задание «Функции Грина. Операционное исчисление» (17-я неделя).
4. Рубежный контроль по модулю (17-я неделя).

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература (ОЛ)

1. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 607 с.
2. Власова Е.А. Ряды: Учеб. для вузов. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 612 с.
3. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 228 с.
4. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: Учеб. для вузов. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
5. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учеб. для вузов. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
6. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. Краткий курс. М.: Высшая школа, 1972. 280 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Болгов В.А., Ефимов А.В., Каракулин А.Ф. и др. / Под общ. ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука. Физматлит, 1995. 368 с.
8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и упражнения. М.: Наука, 1981. 215 с.
9. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике: Учеб. пособие. М.: Наука, 1980. 688 с.

### Дополнительная литература (ДЛ)

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. для ун-тов. М.: Изд-во Моск. ун-та: Наука, 2004. 798 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1996. 406 с.

### Методические пособия (МП)

1. Малов Ю.И., Сержантова М.М., Чередниченко А.В. Волновое уравнение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2006. 47 с.
2. Чигирёва О.Ю. Ряды Фурье. Преобразование Фурье. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. 52 с.
3. Тверская Е.С., Чигирёва О.Ю. Решение краевых задач для уравнения Лапласа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2009. 48 с.
4. Паршев Л.П. Уравнения математической физики. решение волнового уравнения методом распространяющихся волн. Методические указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 60 с.

Кафедра  
Ответственный по кафедре  
Автор документа  
Телефон

ФН-12  
А.Н. Канатников  
А.Н. Канатников  
(499) 263-62-88