

*Теоретические вопросы*

1. Дайте определение линейного и квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Запишите формулу преобразования такого уравнения при замене переменных. (5 баллов)
2. Дайте определение канонического вида квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Что такое гиперболическое, эллиптическое, параболическое дифференциальное уравнение? Приведите примеры. (5 баллов)
3. Запишите уравнение характеристик квазилинейного уравнения. Запишите уравнение характеристик в дифференциалах. (5 баллов)
4. Запишите общее решение одномерного волнового уравнения. Запишите формулу Даламбера. Что такое прямая и обратная волны? (5 баллов)
5. Дайте определение преобразования Фурье. Что называют оригиналом этого преобразования? Сформулируйте теорему обращения для преобразования Фурье. (5 баллов)
6. Перечислите свойства преобразования Фурье. (5 баллов)
7. Дайте определение свертки двух функций и запишите свойства, которыми она обладает. Сформулируйте теорему о преобразовании Фурье свертки. (5 баллов)
8. Дайте определение косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье. Разъясните связь между преобразованием Фурье и косинус-преобразованием и синус-преобразованием Фурье. (5 баллов)
9. Сформулируйте определения ортогональной системы в евклидовом пространстве, ряда Фурье элемента евклидова пространства по ортогональной системе. Запишите формулы Эйлера — Фурье для вычисления коэффициентов Фурье. (5 баллов)
10. Запишите неравенство Бесселя, равенство Парсеваля и приведите формулировки соответствующих теорем. (5 баллов)
11. Какую систему функций называют тригонометрической? Запишите разложение функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[-l, l]$ , в тригонометрический ряд Фурье, формулы для вычисления коэффициентов Фурье. (5 баллов)
12. Запишите разложение функции  $f(x)$  в ряд Фурье в комплексной форме. Что называют спектральной последовательностью? амплитудным спектром? фазовым спектром? (5 баллов)
13. Объясните понятия кусочно-непрерывной функции, кусочно-монотонной функции. Сформулируйте теорему Дирихле о разложении функции в ряд Фурье. (5 баллов)
14. Запишите задачу Штурма — Лиувилля. С каким дифференциальным оператором связана эта задача? При каких условиях этот оператор самосопряженный? (5 баллов)
15. Опишите общую схему метода разделения переменных. Проиллюстрируйте схему на примере смешанной задачи для одномерного волнового уравнения. (5 баллов)
16. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля для круга. Опишите собственные функции оператора Штурма — Лиувилля в этом случае. (5 баллов)
17. Запишите уравнение Бесселя. Какой вид имеет определитель Вронского для системы решений этого уравнения? (5 баллов)
18. Дайте определение функций Бесселя (цилиндрических функций I рода) и функций Неймана (цилиндрических функций II рода). Запишите вид определителя Вронского для пары цилиндрических функций. (5 баллов)

19. Опишите свойства функций Бесселя. (5 баллов)
20. Дайте определение функций Эйлера. Запишите основные функциональные свойства для них. (5 баллов)
21. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля для шара. Опишите собственные функции оператора Штурма — Лиувилля в этом случае. (5 баллов)
22. Дайте определение полиномов Лежандра. Укажите их свойства и формулу для вычисления (формулу Родрига). Запишите полиномы Лежандра до 3-й степени. (5 баллов)
23. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Укажите свойства этих функций и формулу для их вычисления. Запишите присоединенные функции Лежандра до индексов 1, 3. (5 баллов)

### *Типовой вариант билета по теории*

1. Дайте определение преобразования Фурье. Что называют оригиналом этого преобразования? Сформулируйте теорему обращения для преобразования Фурье. (5 баллов)
2. Дайте определение полиномов Лежандра. Укажите их свойства и формулу для вычисления (формулу Родрига). Запишите полиномы Лежандра до 3-й степени. (5 баллов)

### *Типовой вариант билета с задачами*

1. Определите тип дифференциального уравнения

$$u_{xx} - 3u_{xy} - 4u_{yy} = 0,$$

приведите его к каноническому виду (5 баллов)

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (5 баллов):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$u|_{x=0} = \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u|_{x=a} = \cos \frac{7\pi y}{2b}, \quad u'_y|_{y=0} = \sin \frac{5\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{3\pi x}{a}.$$

3. Найти преобразование Фурье функции  $f(x)$ , которая вне отрезка  $[0, 6]$  равна нулю, а на этом отрезке графиком функции является ломаная, соединяющая точки  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(2, 1)$ ,  $D(4, -1)$ ,  $E(6, 1)$ . (5 баллов)

4. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце (4 балла):

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$u|_{r=1} = 1 + \sin^2 \varphi, \quad u'_r|_{r=2} = \cos \varphi.$$