

Занятие 1. Свертка

Определение. Свойства: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность. Теорема смещения:

$$(S_\alpha f) * (S_\beta g) = S_{\alpha+\beta}(f * g),$$

где $(S_\alpha f)(x) = f(x - \alpha)$ (сдвиг на α).

1. Вычислить автосвертки функций:

а) $e^{-|x|}$; б) e^{-x^2} .

О т в е т: а) $(1 + |x|)e^{-|x|}$; б) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. Вычислить свертку функций $f(x) = x$ и $g(x) = e^{-x^2}$.

Свертка полуфинитных функций

3. Вычислить свертки функций:

а) $f(x) = g(x) = \eta(x)$; б) $f(x) = x\eta(x)$, $g(x) = \eta(x)$; в) $f(x) = x^m\eta(x)$, $g(x) = x^k\eta(x)$.

О т в е т: а) $x\eta(x)$; б) $\frac{1}{2}x^2\eta(x)$; в) $\frac{m!k!}{(m+k+1)!}x^{m+k+1}\eta(x)$.

Свертка кусочно линейных финитных функций

Пример. Найти автосвертку функций $\text{rect}(x)$ (рис. 1.1) и $\Lambda(x)$ (рис. 1.2).

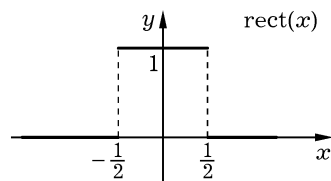


Рис. 1.1

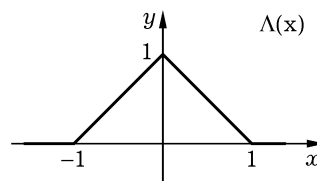


Рис. 1.2

Решение: Поскольку $\text{rect}(x) = \eta(x + 0,5) - \eta(x - 0,5)$, находим

$$\text{rect} * \text{rect} = S_{0,5}\eta * S_{0,5}\eta - 2 * S_{0,5}\eta * S_{-0,5}\eta + S_{-0,5}\eta * S_{-0,5}\eta = S_1(\eta * \eta) - 2\eta * \eta + S_{-1}(\eta * \eta).$$

Следовательно, с учетом $(\eta * \eta)(x) = x\eta(x)$

$$\text{rect} * \text{rect}(x) = (x - 1)\eta(x - 1) - 2x\eta(x) + (x + 1)\eta(x + 1) = \Lambda(x).$$

Далее, полагая $f(x) = x\eta(x)$

$$\begin{aligned} \Lambda * \Lambda &= (S_1 f - 2f + S_{-1} f) * (S_1 f - 2f + S_{-1} f) = \\ &= S_2(f * f) + 4f * f + S_{-2}(f * f) - 4S_1(f * f) + 2f * f - 4S_{-1}(f * f) = \\ &= S_2(f * f) - 4S_1(f * f) + 6f * f - 4S_{-1} + S_{-2}(f * f). \end{aligned}$$

Для функции $f(x) = x\eta(x)$ имеем $(f * f)(x) = \frac{x^3}{6}\eta(x)$. Поэтому

$$\Lambda * \Lambda(x) = \frac{(x - 2)^3}{6}\eta(x - 2) - \frac{4}{6}(x - 1)^3\eta(x - 1) + x^3\eta(x) - \frac{4}{6}(x + 1)^3\eta(x + 1) + \frac{(x + 2)^3}{6}\eta(x + 2).$$

Такое представление не очень удобно. Его можно переписать следующим образом:

$$\Lambda * \Lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -2); \\ \frac{(x+2)^3}{6}, & x \in [-2, -1); \\ \frac{(x+2)^3}{6} - \frac{4}{6}(x+1)^3, & x \in [-1, 0); \\ \frac{(x+2)^3}{6} - \frac{4}{6}(x+1)^3 + x^3, & x \in [0, 1); \\ \frac{(x+2)^3}{6} - \frac{4}{6}(x+1)^3 + x^3 - \frac{4}{6}(x-1)^3, & x \in [1, 2); \\ \frac{(x+2)^3}{6} - \frac{4}{6}(x+1)^3 + x^3 - \frac{4}{6}(x-1)^3 + \frac{(x-2)^3}{6}, & x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

Упрощая, окончательно получаем:

$$\Lambda * \Lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -2); \\ \frac{(x+2)^3}{6}, & x \in [-2, -1); \\ \frac{-3x^3 - 6x^2 + 4}{6}, & x \in [-1, 0); \\ \frac{3x^3 - 6x^2 + 4}{6}, & x \in [0, 1); \\ \frac{-x^3 + 6x^2 - 12x + 8}{6}, & x \in [1, 2); \\ 0, & x \in [2, +\infty). \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 1.3.

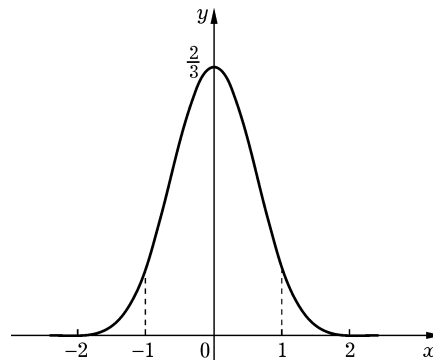


Рис. 1.3

4. Найти свертку функций $\text{rect}(x)$ и $\Lambda(x)$.
5. Найти свертки функций, заданных графически на рис. 1.4, с функцией $\text{rect}(x)$.

На дом

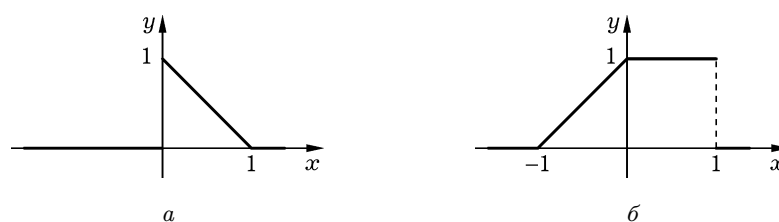


Рис. 1.4

1. Вычислить автосвертки функций:

а) $\frac{1}{1+|x|}$; б) $\frac{1}{1+x^2}$.

2. Вычислить свертку функций $f(x) = x$ и $g(x) = e^{-|x|}$.

3. Вычислить свертки функций:

а) $f(x) = x\eta(x)$ и $g(x) = \sin(x)\eta(x)$; б) $f(x) = \operatorname{sh}(x)\eta(x)$ и $g(x) = \sin(x)\eta(x)$;

в) $f(x) = \eta(x)$ и $g(x) = x\eta(x-1)$; г) $f(x) = x\eta(x)$ и $g(x) = \eta(x+1)$;

д) $f(x) = x\eta(x-1)$ и $g(x) = (x-1)\eta(x)$; е) $f(x) = g(x) = \eta(a-|x|)$.

4. Вычислить свертки функций, заданных графически (рис. 1.5, 1.6).

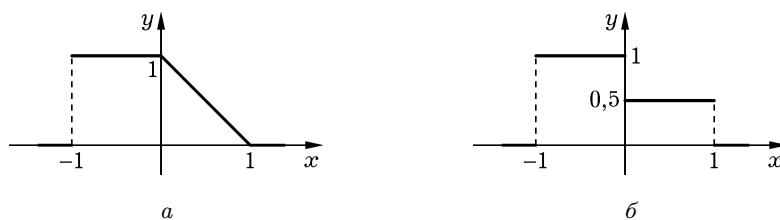


Рис. 1.5

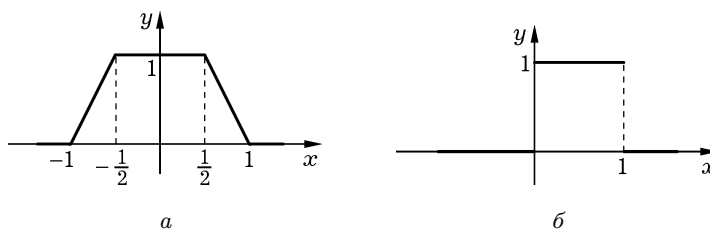


Рис. 1.6

Занятие 2. Классификация уравнений 2-го порядка

Преобразование уравнения при замене переменных. Уравнение характеристик. Случай двух переменных. Типы дифференциальных уравнений. Техника приведения к каноническому виду.

1. Определить вид уравнения, привести к каноническому виду

а) $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$; б) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - u_x - u_y = 0$;

в) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$; г) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0$.

2. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$(l + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0.$$

Исследовать зависимость областей от параметра l .

3. Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его вид сохраняется.

а) $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$; б) $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$; в) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$;

г) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$; д) $(\sin^2 x)u_{xx} - 2y(\sin x)u_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

На дом:

Будак и др., гл. 1. Задачи: 5, 11, 16, 21, 22, 23.

Занятие 3. Волновое уравнение

Неограниченная струна.

1. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с начальными условиями $u|_{t=0} = e^{-x^2}$, $u_t|_{t=0} = axe^{-x^2}$. Какое это решение, классическое или обобщенное?
2. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с начальными условиями $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = \Lambda(x/a)$. Какое это решение, классическое или обобщенное? Нарисовать профиль струны в моменты времени $t = 0.5, 1, 1.5, 2$.
3. Рассматривается задача Коши для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ (колебания струны). Как изменение начальных условий на интервале (2, 3) скажется на значении $u(t, x)$ при $t = 1$ в точке $x = 0$?

Полуограниченная струна.

1. Найти решение следующих смешанных задач:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; & \text{б) } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0; \quad u|_{x=0} = \sin \omega t. & u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0; \quad -u_x|_{x=0} = \Lambda(t-1). \end{array}$$

2. Полуограниченная струна со свободным концом имеет начальный профиль $\varphi(x) = \Lambda(x-2)$, $x > 0$. На какую максимальную величину отклонится конец струны?
3. Полуограниченная струна с закрепленным концом имеет начальную скорость $\psi(x) = \text{rect}(x-1.5)$. Найти положение стержня в моменты времени $t_k = \frac{k}{2a}$, $k = \overline{0, 5}$.

На дом:

1. Начальный профиль струны представлен на рис. 3.7. Найти момент времени и точку, в которой отклонение струны будет наибольшим, а также величину этого отклонения.

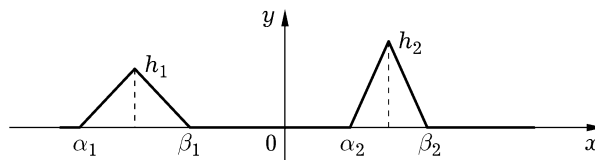


Рис. 3.7

2. Описать движение $u(x, t)$ полуограниченной струны. Закон ее движения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $x > 0$, $u_x(0, t) = \mu(t)$.
3. Найти решение следующих задач:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; & \text{б) } u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = xe^{-x}, \quad u_t|_{t=0} = e^{-x}; & u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = xe^{-x}; \\ u|_{x=0} = 0; & -u_x|_{x=0} = 0. \end{array}$$

4. В задаче

$$\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \frac{1}{2}\Lambda(2x-3), \quad u_t|_{t=0} = 0; \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=3} = 0 \end{array}$$

найти профиль при $t = 10$.

Занятие 4. Преобразование Фурье

Определение. Свойства:

- линейность $F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g]$;
- теорема подобия $\widehat{f(\alpha t)}(\omega) = \frac{1}{\alpha} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$;
- теорема смещения $\widehat{e^{iat} f(t)}(\omega) = \widehat{f}(\omega - a)$;
- теорема запаздывания $\widehat{f(t-a)}(\omega) = e^{ia\omega} \widehat{f}(\omega)$;
- дифференцирование оригинала $\widehat{f^{(n)}(t)}(\omega) = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$;
- дифференцирование изображения $\widehat{(-it)^n f(t)}(\omega) = (\widehat{f})^{(n)}(\omega)$;
- преобразование свертки $F[f \circ g] = F[f] F[g]$.

Формула обращения. Достаточные условия.

1. Вычислить прямым интегрированием преобразование Фурье функций:

- а) $\text{rect} \frac{x}{2a}$; б) $\chi_{[a,b]}(x)$; в) $\Lambda\left(\frac{x-a}{b}\right)$; г) $e^{-x} \eta(x)$; д) $e^{-a|x|}$; е) $x e^{-|x|}$;
 ж) $x e^{|x-3|}$; з) e^{-ax^2} .

2. Вычислить преобразование Фурье рациональных функций (по таблице и по лемме Жордана):

- а) $\frac{1}{x^2+1}$; б) $\frac{x}{x^2+1}$; в) $\frac{x-2}{x^2+4}$; г) $\frac{2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$;

3. Используя различные приемы, найти преобразование Фурье функций:

- а) $\arctg x - \arctg(x-1)$; б) $\frac{\sin x}{x^2+1}$; в) $x \sin x \cdot e^{-x} \eta(x)$;
 г) $(e^{-x} \eta(x)) * \frac{\sin x}{x^2+1}$; д) $\text{rect} \frac{x-a}{b} * (x e^{-x} \eta(x))$.

Указание: а) продифференцировать оригинал; б) использовать смещение; в) смещение + дифференцирование; г) преобразование свертки; д) свертка + дифференцирование

4. Найти преобразование Фурье финитной функции, график которой является ломаной с вершинами:

- а) $A(-1, 1), B(0, 3), C(1, 1)$; б) $A(-1, 0), B(1, 2), C(2, 0)$; в) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

На дом:

1. Вычислить преобразование Фурье функций:

- а) e^{-ax^2+bx+c} ; б) $\frac{x+1}{x^2+4x+5}$; в) $\frac{x \cos x}{x^2+4}$.

2. Используя различные свойства, найти преобразование Фурье функций:

- а) $\chi_{[c,d]}(x) * \Lambda\left(\frac{x-a}{b}\right)$; б) $\chi_{[0,1]}(x) * (x^2 \chi_{[0,2]}(x) + (6-x) \chi_{[2,4]}(x) + 2 \chi_{[4,5]}(x))$;
 в) $(\arctg x - \arctg(x-1)) \cos x$.

Занятие 5. Ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье

Гильбертово пространство. Ортогональная система. Неравенство Бесселя. Примеры. Тригонометрическая система. Ортогональные многочлены.

1. Доказать, что система $\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, является ортогональной в гильбертовом пространстве $L_2(0, l)$. Разложить по этой системе функции: а) $f(x) = 1 - x$; б) $f(x) = \sin \frac{3\pi x}{2l}$; в) $f(x) = \sin^3 \frac{\pi x}{2l}$; г) $\sin \frac{\pi x}{l}$.
2. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции, построить график функции и график суммы ее ряда Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2, -1); \\ 1, & x \in [-1, 1); \\ 2 - x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

3. Разложить в ряд Фурье в форме суперпозиции простых гармоник функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-2, -1); \\ 1, & x \in [-1, 1); \\ 2 - x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

4. Разложить функцию $f(x) = 1 - x$, $x \in [0, 1]$: а) по косинусам кратных углов; б) по синусам кратных углов.

Занятие 6. Метод Фурье. Задача Штурма — Лиувилля

Пример: однородное волновое уравнение.

Задача Штурма — Лиувилля с различными типами граничных условий (9 типов).
Многомерные варианты задачи Штурма — Лиувилля.

1. Разложить по ортогональной системе собственных функций линейного оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ на $[0, \pi]$ (типы I-I, II-II, I-II) заданные функции:
а) $\cos x$; б) $x - 1$.

2. Разложить по системе полиномов Лежандра функции:
а) x^3 ; б) $ax^2 + bx + c$.

Указание: Полиномы Лежандра можно вычислить по формуле Родрига $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$.

Метод Фурье для задач в прямоугольнике.

3. Решить задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике:

$$\Delta u = x + y, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=b} = 0.$$

4. Решить задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$u|_{x=0} = y(2b - y), \quad u_x|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = \sin \frac{\pi x}{2a}, \quad u_y|_{y=b} = \sin^3 \frac{\pi x}{2a}.$$

На дом:

1. Разложить по ортогональной системе собственных функций линейного оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + a^2 I$ на $[0, \pi]$ (типы I-I, II-II, I-II) заданные функции:
а) $\sin x$; б) $x + 1$.
2. Разложить по системе полиномов Лежандра функции:
а) x ; б) $4x^3 + 5x^2 - x + 1$.

Занятие 7. Краевая задача для уравнения Лапласа

1. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге $x^2 + y^2 < 2$ с заданными граничными условиями:
 - а) $u(2, \varphi) = (\varphi - \pi)^2$, $\varphi \in [0, 2\pi)$;
 - б) $u(2, \varphi) = \sin^3 \varphi - \cos 2\varphi$;
 - в) $u_r(2, \varphi) = \sin 3\varphi$.
2. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 < x^2 + y^2 < 2$ с заданными граничными условиями:
 - а) $u(1, \varphi) = \varphi$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $u(2, \varphi) = \sin 3\varphi$;
 - б) $u(1, \varphi) = \sin \varphi + \cos 2\varphi$, $u_r(2, \varphi) = \sin 3\varphi$.

На дом:

1. Решить краевую задачу в круге $x^2 + y^2 < 1$ с заданными граничными условиями:
 - а) $u(1, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$;
 - б) $u_r(2, \varphi) = \sin 3\varphi + \cos^2 \varphi$.
2. Решить краевую задачу в кольце $1 < x^2 + y^2 < 2$ с заданными граничными условиями:
 - а) $u_r(1, \varphi) = \sin 3\varphi + \cos 2\varphi$, $u_r(2, \varphi) = \cos \varphi$;
 - б) $u(1, \varphi) = \sin \varphi + \cos^2 \varphi$, $u(2, \varphi) = \cos^3 \varphi$.

Занятие 8. Краевая задача для уравнения Гельмгольца

1. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца $\Delta u + 4u = 0$ в круге $x^2 + y^2 < 1$ с граничными условиями $u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi - \cos 2\varphi$.
2. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца $\Delta u + 4u = 0$ в круге $x^2 + y^2 < 1$ с граничными условиями $u_r(1, \varphi) = \sin 3\varphi$.

На дом:

1. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца $\Delta u + u = 0$ в круге $x^2 + y^2 < 2$ с граничными условиями $u(2, \varphi) = \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi$.
2. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца $\Delta u + 4u = 0$ в круге $x^2 + y^2 < 1$ с граничными условиями $u_r(2, \varphi) = \sin^3 \varphi$.

Занятие 9. Сферические функции. Уравнение Лапласа в шаре

Задача. Записать пять первых многочленов Лежандра и четыре присоединенные функции индекса $n = 1$.

Решение: Для записи полиномов Лежандра используем формулу Родрига

$$P_m(t) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^m.$$

По этой формуле

$$P_0(t) = 1,$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)' = t,$$

$$P_2(t) = \frac{1}{8}((t^2 - 1)^2)'' = \frac{12t^2 - 4}{8} = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(t) = \frac{1}{8 \cdot 6}((t^2 - 1)^3)''' = \frac{20t^3 - 12t}{8} = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t,$$

$$P_4(t) = \frac{1}{16 \cdot 24}((t^2 - 1)^4)^{IV} = \frac{(t^8 - 4t^6 + 6t^2)^{IV}}{16 \cdot 24} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 5t^4 - 6 \cdot 5 \cdot 3t^2 + 3 \cdot 3}{24} = \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}.$$

Присоединенные функции Лежандра можно представить с помощью формулы

$$P_m^n(t) = (1 - t^2)^{n/2} (P_m(t))^{(n)},$$

что для индекса $n = 1$ дает $P_m^1(t) = \sqrt{1 - t^2} (P_m(t))'$. Согласно этому представлению

$$P_1^1(t) = \sqrt{1 - t^2},$$

$$P_2^1(t) = 3t\sqrt{1 - t^2},$$

$$P_3^1(t) = \left(\frac{15}{2}t^2 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{1 - t^2},$$

$$P_4^1(t) = \left(\frac{35}{2}t^3 - \frac{15}{2}t\right)\sqrt{1 - t^2}.$$

Задача. Записать сферические функции $Y_{32}^c(\vartheta, \varphi)$ и $Y_{23}^s(\vartheta, \varphi)$.

Решение: Сферические функции имеют вид:

$$Y_{nm}^c(\vartheta, \varphi) = P_m^n(\cos \vartheta) \cos n\varphi, \quad Y_{nm}^s(\vartheta, \varphi) = P_m^n(\cos \vartheta) \sin n\varphi.$$

Отсюда

$$Y_{32}^c(\vartheta, \varphi) = P_2^3(\cos \vartheta) \cos 3\varphi = 0, \quad Y_{23}^s(\vartheta, \varphi) = P_3^2(\cos \vartheta) \sin 2\varphi.$$

По формуле для присоединенных функций

$$P_3^2(\cos \vartheta) = (1 - t^2) \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right)'' = 15t(1 - t^2).$$

Поэтому

$$Y_{23}^s(\vartheta, \varphi) = 15 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi.$$

Задача. Решить следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 0, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & -\pi \leq \varphi < \pi; \\ u|_{r=1} = \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta. \end{cases}$$

Решение: искомую функцию представляем в виде ряда по сферическим функциям (собственным функциям оператора Лапласа $\Delta_{\vartheta\varphi}$ на сфере):

$$u = \sum_{n,m} R_{nm}^c(r) Y_{nm}^c(\vartheta, \varphi) + \sum_{n,m} R_{nm}^s(r) Y_{nm}^s(\vartheta, \varphi).$$

Собственное значение для Y_{nm} равно $-\omega_m^2 = -m(m+1)$. В упрощенной записи $u = \sum_{n,m} R_{nm} Y_{nm}$ получаем:

$$\Delta u = \sum_{n,m} \left(\frac{1}{r^2} (r^2 R'_{nm})' Y_{nm} - \frac{\omega_m^2}{r^2} R_{nm} Y_{nm} \right) = 0.$$

Отсюда

$$(r^2 R'_{nm})' - \omega_m^2 R_{nm} = 0,$$

или

$$r^2 R''_{nm} + 2r R'_{nm} - \omega_m^2 R_{nm} = 0.$$

Подставляем ряд в граничное условие:

$$\sum_{n,m} R_{nm}(1) Y_{nm}(\vartheta, \varphi) = \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta = 1 + \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta.$$

Представим правую часть в виде линейной комбинации полиномов Лежандра:

$$1 + \cos \vartheta - \cos^2 \vartheta = -\frac{2}{3} P_2(\cos \vartheta) + P_1(\cos \vartheta) + \frac{2}{3} P_0(\cos \vartheta).$$

Это три базисных функции, соответствующие $n = 0$ и $m = 0, 1, 2$. Равенство

$$\sum_{n,m} R_{nm}(1) Y_{nm}(\vartheta, \varphi) = -\frac{2}{3} P_2(\cos \vartheta) + P_1(\cos \vartheta) + \frac{2}{3} P_0(\cos \vartheta)$$

означает, что

$$R_{00}(1) = -\frac{2}{3}, \quad R_{01}(1) = 1, \quad R_{02}(1) = \frac{2}{3}$$

и $R_{nm}(1) = 0$ во всех остальных случаях (т.е. при $n > 0$ или $m > 2$). В результате возникает три содержательных задачи:

$$\begin{cases} r^2 R''_{00} + 2r R'_{00} = 0, \\ R_{00}(1) = -\frac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} r^2 R''_{01} + 2r R'_{01} - 2R_{01} = 0, \\ R_{01}(1) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} r^2 R''_{02} + 2r R'_{02} - 6R_{02} = 0, \\ R_{02}(1) = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Во всех остальных случаях получаем задачу

$$\begin{cases} r^2 R''_{nm} + 2r R'_{nm} - m(m+1)R_{nm} = 0, \\ R_{nm}(1) = 0, \end{cases}$$

решением которой является $R_{nm}(r) = 0$, $n > 0$ или $m > 2$. В результате решение имеет следующий вид:

$$u = R_{00}(r) Y_{00}^c(\vartheta, \varphi) + R_{01}(r) Y_{01}^c(\vartheta, \varphi) + R_{02}(r) Y_{02}^c(\vartheta, \varphi) = \\ = R_{00}(r) + R_{01}(r) \cos \vartheta + R_{02}(r) \left(\frac{5}{2} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \cos \vartheta \right).$$

Осталось найти решений трех задач на функции R_{nm} . Общее решение уравнения первой задачи $R_{00} = C_1 + \frac{C_2}{r}$. Из условия ограниченности $C_2 = 0$, так что в соответствии с начальным условием $C_1 = -\frac{2}{3}$ и $R_{00}(r) = C_1 = \frac{2}{3}$. Общее решение второй задачи $R_{01}(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$. Снова из соображений ограниченности $C_2 = 0$ и, согласно начальному условию, $C_1 = 1$, $R_{01}(r) = r$. Наконец, в третьей задаче общее решение $R_{02}(r) = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^3}$. С использованием начального условия и условия ограниченности получаем $R_{02}(r) = -\frac{2r^2}{3}$.

Итак, решением поставленной задачи является функция

$$u = \frac{2}{3} + r \cos \vartheta - \frac{2r^2}{3} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \cos \vartheta \right) = \frac{2}{3} + r \cos \vartheta - \frac{5r^2}{3} \cos^3 \vartheta + r^2 \cos \vartheta.$$

Задача. Решить следующие краевые задачи для уравнения Лапласа в шаре.

- а) $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 0, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & -\pi \leq \varphi < \pi; \\ u'_r|_{r=1} = \cos^2 \varphi. \end{cases}$
- б) $\begin{cases} \Delta u = 0, & r > 0, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & -\pi \leq \varphi < \pi; \\ u'_r|_{r=1} = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi. \end{cases}$

Занятие 10. Шаровые функции. Уравнение Гельмгольца в шаре

Задача. Решить следующую краевую задачу для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & r > 0, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & -\pi \leq \varphi < \pi; \\ u|_{r=1} = \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta. \end{cases}$$

Задача. Решить следующие краевые задачи для уравнения Лапласа в шаре.

- а) $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & r > 0, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & -\pi \leq \varphi < \pi; \\ u'_r|_{r=1} = \cos^2 \varphi. \end{cases}$
- б) $\begin{cases} \Delta u + u = 0, & r > 0, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, & -\pi \leq \varphi < \pi; \\ u|_{r=1} = \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi. \end{cases}$

Занятие 11. Функция Грина для уравнения Пуассона на плоскости

Гармонические функции

1. Проверить функции на гармоничность:

а) $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$; б) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$; в) $e^{x+4}(\cos y + \sin y)$.

Построение функции Грина и решение краевых задач

1. Построить функцию Грина для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в секторе $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$.
2. Решить краевую задачу $\Delta u = e^{-x^2-y^2}$, $x < 0$, $y > 0$; $u|_{x=0} = 0$, $u_y|_{y=0} = 0$.
3. Решить краевую задачу $\Delta u = 0$, $x < 0$, $y > 0$; $u|_{x=0} = e^{-y}$, $u_y|_{y=0} = e^x$.

Занятие 12. Преобразование Лапласа

Оригиналы.

1. Являются ли оригиналами преобразования Лапласа следующие функции? Если да, определить порядок роста функции:

а) $\text{sh } t^2$; б) $\text{sh}^2 t$; в) $t \sin t^2$; г) $\sin e^t$; д) $\sin \frac{1}{t}$; е) $t \sin \frac{1}{t}$,

Таблица оригиналов и изображений.

2. Найти изображения следующих функций:

а) e^t ; б) $\text{sh } t$; в) $\sin t$; г) $(t+1) \cos t$; д) $\frac{1 - \cos t}{t^2}$;

е) $\int_0^t \frac{1 - \cos \tau}{\tau^2} d\tau$; ж) $\int_0^t e^{-2t} \cos t dt$.

На дом:

1. Определить показатель роста функций-оригиналов

а) $e^{2t} \sin t$; б) $e^t \sin e^t$; в) $(t^2 + 1) \text{ch } t$; г) $\frac{e^t}{t^2 + 1}$.

2. Найти изображения следующих функций:

а) $(t^2 + t) \text{ch } t$; б) $\frac{\sin t}{t}$; в) $\frac{1 - \cos t}{t^2}$; г) $\cos(t) \eta(t)$. д) $e^{-2t} \cos t$;

Занятие 13. Поиск оригиналов

Кусочно заданные функции

1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$; б) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1; \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

в) $f(t) = \sin(\arcsin t)$; г) $f(t) = \{t\}$.

Поиск оригиналов

2. Найти оригиналы изображений:

а) $\frac{1}{p^2}$; б) $\frac{p}{p^2 - 1}$; в) $\frac{p+1}{p^2 + 2p + 2}$; г) $\frac{p+1}{(p-1)^2(p-2)}$; д) $\frac{e^{-2p}}{p^2}$; е) $\frac{pe^{-p}}{p^2 - 1}$.

На дом:

1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 < t < 1; \\ 2t-2, & 1 < t < 2; \\ 0, & t > 2. \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} t-t^2, & 0 < t < 1; \\ 0, & t > 1 \end{cases}$;

в) $f(t) = |\sin t|$; г) $f(t) = \max\{\cos t, 0\}$.

2. Найти оригиналы изображений:

а) $\frac{1}{(p^2 + 1)^2}$; б) $\frac{1}{p^4 + 1}$; в) $\frac{e^{-p}}{p^2}$.

Занятие 14. Операционный метод

1. Решить задачи Коши:

а) $x'' + x = e^t$, $x(0) = x'(0) = 1$; б) $x'' - x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

в) $x'' - 2x' + x = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$; г) $x'' + x = \Lambda(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$;

д) $x'' - x = \frac{e^t}{1+e^t}$, $x(0) = x'(0) = 0$;

е) $\begin{cases} x' = 3y - x, & x(0) = 1, \\ y' = y + x + e^t, & y(0) = 1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x' = -y - z, & x(0) = -1, \\ y' = -x - z, & y(0) = 0, \\ z' = -x - y, & z(0) = 1. \end{cases}$

На дом:

2. Решить задачи Коши:

а) $x'' + x = \sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$; б) $x'' - x = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

в) $x'' - 2x' + x = \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$; г) $x'' + x = \text{rect}(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$;

д) $x'' - 4x = \frac{e^t}{1+e^t}$, $x(0) = x'(0) = 0$; е) $\begin{cases} x' = x + 2y + t, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y + t, & y(0) = 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x' = -x + y + z + e^t, & x(0) = -1, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, & y(0) = 0, \\ z'x + y + z + 4, & z(0) = 1. \end{cases}$