

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

для студентов кафедры РЛ2 (бакалавры), 2-й курс

Москва
September 8, 2020

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. О содержании курса

Предмет математической физики. Конечномерные и бесконечномерные математические модели. Типы уравнений математической физики: дифференциальные, интегральные, интегро-дифференциальные.

Математическая физика — теория математических моделей физических явлений.

Типы уравнений математической физики:

а) дифференциальные — колебаний и диффузии

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p \Delta u - qu + F(x, t), \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = p \Delta u - qu + F(x, t)$$

(здесь $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$ — оператор Лапласа);

б) уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V\psi.$$

в) системы дифференциальных уравнений — уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) &= 4\pi\rho, & \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}; \end{aligned}$$

г) нелинейные — уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$

д) интегральные — уравнения Вольтерра

$$\alpha u(t) + \beta \int_0^t K(x, s) u(s) ds = f(t);$$

е) интегро-дифференциальные — уравнение переноса

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{s} \operatorname{grad} \psi + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_S \psi(x, \mathbf{s}', t) ds' + F.$$

Литература: [1], § 1.2.

1.2. Методы исследования в математической физике

Направления исследования. Методы исследования. Постановка задач математической физики. Типы задач. Задачи корректные и некорректные.

Направления исследования уравнений математической физики:

- исследование постановки задачи (классы функций, дополнительные условия);
- качественное исследование решений поставленных задач;
- методы аналитического или численного решения поставленных задач.

Методы исследования:

- анализ прикладного (физического) смысла задачи;
- методы функционального анализа;
- асимптотические методы;
- методы деформации (метод малого параметра).

Постановка задач математической физики:

- дифференциальное уравнение;
- начальные условия;
- граничные условия.

Типы задач:

- задача Коши (нет ГУ);
- краевая задача (нет НУ);
- смешанная, или начально-краевая задача.

Корректность постановки задачи по Адамару:

- 1) решение должно существовать в каком-то классе функций \mathcal{M}_1 ;
- 2) решение должно быть единственным в некотором классе функций \mathcal{M}_2 ;
- 3) решение должно непрерывно зависеть от данных задачи, где непрерывность понимается в каком-либо смысле.

Класс корректности — пересечение $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

Задача корректна по Адамару в классе \mathcal{M} , если она в этом классе имеет решение, и притом единственное, а кроме того решение непрерывно зависит от данных задачи (начальных и краевых условий).

Пример 1.1 (Пример Адамара). Задача

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -u_{xx}; \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ее решение

$$u_k(t, x) = \frac{\operatorname{sh} kt}{k^2} \sin kx.$$

При $k \rightarrow \infty$ имеем $\psi_k(x) \rightarrow 0$. В то же время $u_k(x, t)$ при $k \rightarrow \infty$ не сходится к 0, если x не кратно π . #

1.3. Линейные уравнения

Уравнения линейные, квазилинейные и нелинейные. Замена переменных и преобразование уравнений. Пример: уравнение Лапласа в полярной, цилиндрической и сферической системах координат. Три типа квазилинейных дифференциальных уравнений. Канонический вид. Характеристики.

Постановки задач для линейных уравнений. Граничные условия I, II, III рода.

Квазилинейные дифференциальные уравнения. Дифференциальное уравнение линейное, если оно линейно относительно всех неизвестных функций и всех их производных, входящих в это уравнение. Линейное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) = 0.$$

Дифференциальное уравнение квазилинейное, если оно линейно только относительно старших производных, причем коэффициенты при этих производных не зависят от неизвестных функций и их производных. Квазилинейное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0. \quad (1.2)$$

Один из способов анализа дифференциальных уравнений — замена переменных. Эта операция приводит к другому уравнению (системе уравнений), которое может оказаться проще и для которого удастся найти решение или сделать какие-то важные выводы. Обратная замена позволяет результаты переформулировать для исходного уравнения.

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение (1.2). Выполним в нем замену переменных $y = \varphi(x)$. Согласно правилу вычисления производных сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} = \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2}} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{i_2}} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}.$$

Подставим эти представления в исходное уравнение. Сумма по старшим производным изменится следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 i_2}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_1=1}^n a_{i_1 i_2}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2}} \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{i_2}} + \Phi(y, u, u_y) = \\ &= \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_1=1}^n \left(\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 i_2}(x) \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{i_2}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2}} + \Phi(y, u, u_y). \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение преобразуется к виду

$$\sum_{j_2=1}^n \sum_{j_1=1}^n \tilde{a}_{j_1 j_2}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2}} + \tilde{F}(x, u, u_y) = 0,$$

где

$$\tilde{a}_{j_1 j_2}(y) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 i_2}(x) \frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial y_{j_2}}{\partial x_{i_2}}$$

(в выкладках использованы сокращенные обозначения u_x , u_y для всей совокупности частных производных по соответствующим переменным).

Приходим к следующему выводу: при любой замене переменных квазилинейное уравнение 2-го порядка преобразуется снова к квазилинейному уравнению второго порядка. При этом матрица коэффициентов при старших производных $A(x) = (a_{ij}(x))$ преобразуется по закону

$$\tilde{A} = JAJ^T,$$

где $J = \frac{\partial y}{\partial x}$ — матрица Якоби преобразования $y = \varphi(x)$.

Совокупность слагаемых со старшими производными квазилинейного дифференциального уравнения называют **квадратичной формой этого уравнения**. Она преобразуется по закону преобразования квадратичных форм, а матрицей преобразования является J^T .

Пример 1.2. Рассмотрим двумерное дифференциальное **уравнение Лапласа**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

На практике часто бывает необходимо представлять его в полярной системе координат. Переход в другую систему координат реализуется как замена переменных. Переход в полярную систему координат реализуется как замена переменных $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Если в уравнении Лапласа выполнить такую замену переменных, то получим следующий результат:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Рассмотрим трехмерное дифференциальное **уравнение Лапласа**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Для него интересны его представления в цилиндрической системе координат r, φ, z и сферической системе координат r, ϑ, φ . Переход в цилиндрическую систему координат равнозначен переходу по переменным x и y в полярную систему координат. Отсюда получаем результат:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Переход в полярную (и соответственно цилиндрическую) систему координат довольно трудоемок. Однако переход в сферическую систему координат, которая определяется заменой переменных

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta,$$

значительно более трудоемкий. Его обычно реализуют с использованием некоторых косвенных приемов. Результат следующий:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad \#$$

Из курса линейной алгебры следует, что с помощью некоторой невырожденной матрицы $U = J^T$ квадратичную форму можно привести к каноническому (диагональному) виду. Канонический вид определен, вообще говоря, неоднозначно. Однако вариации возможны только изменением коэффициентов на положительный множитель. Согласно закону инерции, сохраняется количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде.

В соответствии со знаками коэффициентов выделяют уравнения:

- **эллиптические**, когда все n коэффициентов (по количеству независимых переменных) положительны или отрицательны одновременно;
- **гиперболические**, когда все коэффициенты ненулевые, но разных знаков;
- **параболические**, когда есть нулевые коэффициенты.

Пример. Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ является эллиптическим, уравнение колебаний $u_{tt} = \Delta u$ гиперболическое, а уравнение диффузии $u_t = \Delta u$ параболическое.

Приведение к каноническому виду квадратичной формы приводит к некоторой матрице U , которая зависит от точки x , так как в общем случае коэффициенты квадратичной формы зависят от точки. Однако не любая матрица $U(x)^T$ является матрицей Якоби некоторого отображения. Поэтому привести к каноническому виду во всей области можно не всегда. Для каждой точки можно построить замену переменных, которая приводит квадратичную форму уравнения к каноническому виду именно в этой точке, но не в остальных. Из этого обстоятельства есть два важных исключения. Если матрица U оказалась постоянной (так будет при приведении к каноническому виду квазилинейных уравнений с постоянными коэффициентами в квадратичной форме), то приведение к каноническому виду будет во всей области. Второй исключительный случай — уравнения двух переменных.

Виды граничных условий. Граничные условия связывают значения функции и ее производных на границе области. Вариантов таких условий много. Наиболее простые — линейные. Остановимся на задачах для дифференциальных уравнений 2-го порядка.

В общем виде такое условие записывается в виде

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{x \in \Gamma} = \varphi(x) \quad (1.3)$$

где α и β — функции, определенные на границе рассматриваемой области, удовлетворяющие условию $\alpha(x)^2 + \beta(x)^2 > 0$, а производная вычисляется по направлению внешней нормали.

Выделим два частных случая. При $\beta(x) \equiv 0$ можно считать, что $\alpha(x) \equiv 1$ (иначе на $\alpha(x)$ можно разделить). Получаем **граничные условия I рода**

$$u \Big|_{x \in \Gamma} = \varphi(x).$$

При $\alpha(x) \equiv 0$ можно считать, что $\beta(x) \equiv 1$. Получаем **граничные условия II рода**

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x \in \Gamma} = \varphi(x).$$

Если $\beta(x)$ не обращается в нуль, то, разделив (1.3) на эту функцию, получим **граничные условия III рода**

$$\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{x \in \Gamma} = \varphi(x).$$

На практике возможны задачи, в которых на разных частях границы ставятся граничные условия разного рода (например, на разных сторонах многоугольника на плоскости). В этом случае будем говорить о **задаче со смешанными граничными условиями**.

Пример 1.3. Для одномерного уравнения теплопроводности граничные условия ставятся на двух концах рассматриваемого отрезка. В результате возникает $3 \cdot 3 = 9$ вариантов начально-краевой задачи, которые можно обозначить парами типов: I–I, I–II, I–III, II–I и т.д.

Разные типы граничных условий характеризуют разный характер взаимодействия с окружающей средой. Поясним это на примере уравнения теплопроводности. Условия I рода означают совпадение наружной температуры с внутренней. Условия II рода — это заданный поток тепла на границе. Наконец, условия III рода учитывают связь потока тепла с теплопроводностью границы области и могут быть записаны в виде

$$k \left(u_{\text{внеш.}} - u \Big|_{x \in S} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x \in S}$$

(поток тепла у внутренней стороны границы пропорционален разности температур $u_{\text{внеш.}}$ снаружи и $u \Big|_{x \in S}$ внутри).

Литература: [1], § 1.3–1.4.

1.4. Волновое уравнение

Общее решение одномерного волнового уравнения, его геометрическая интерпретация. Задача Коши и ее решение. Формула Даламбера. Полуограниченная струна и метод отражений. Частные решения трехмерного волнового уравнения в виде плоских и сферических волн. Литература: [1] § 3.4; [3]

1.4.1. Общее решение

Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

представляет собой редкий пример уравнения в частных производных, для которого можно выписать общее решение. Для этого достаточно его привести к каноническому виду.

Уравнение характеристик в дифференциалах имеет вид

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0.$$

Решая его, находим замену переменных $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, которая преобразует волновое уравнение к виду $u_{\xi\eta} = 0$. Записав его в виде $(u_\xi)_\eta = 0$, заключаем, что $u_\xi = \varphi(\xi)$ (если частная производная функции равна нулю, то функция от этой переменной не зависит). Интегрируя по ξ , заключаем, что

$$u = \int \varphi(\xi) d\xi + \Psi(\eta) = \Phi(x+at) + \Psi(x-at).$$

Итак, общее решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ имеет вид

$$u = \Phi(\xi) + \Psi(\eta),$$

где Φ и Ψ — произвольные дифференцируемые функции. Возвращаясь к исходным переменным, получаем общее решение уравнения (1.4):

$$u = \Phi(x + at) + \Psi(x - at). \quad (1.5)$$

1.4.2. Задача Коши

Задача Коши для уравнения (1.4) ставится следующим образом: найти функцию $u(t, x)$, дважды дифференцируемую при $t > 0$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по t в области $\{(t, x): t \geq 0\}$, которая при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (1.4), а при $t = 0$ удовлетворяет заданным начальным условиям: $u(0, x) = \varphi(x)$, $u_t(0, x) = \psi(x)$, где φ и ψ — заданные непрерывные в \mathbb{R} функции. Кратко такую задачу записывают следующим образом:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0; \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \quad (1.6)$$

Формула общего решения (1.5) позволяет записать в явном виде решение задачи Коши. Полагая $u(t, x) = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$, подставим это представление в начальные условия. получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Phi(x) + \Psi(x) = \varphi(x), \\ a\Phi'(x) - a\Psi'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение системы и складывая (после умножения на a) со вторым, находим

$$\Phi'(x) = \frac{a\varphi'(x) + \psi(x)}{2a}.$$

Интегрируем:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x) + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \right) + C. \quad (1.7)$$

Возвращаясь к первому уравнению исходной системы, заключаем, что

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x) - \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \right) - C. \quad (1.8)$$

Таким образом,

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (1.9)$$

Формулу (1.9) называют **формулой Даламбера**.

Наши рассуждения означают следующее. Если $u(t, x) = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$ является решением поставленной задачи Коши, то функции Φ и Ψ удовлетворяют соотношениям (1.7) и (1.8), а решение задачи Коши, если существует, удовлетворяет условию (1.9). Нетрудно проверить, что формула (1.9) определяет решение задачи Коши при условии, что функция φ дважды непрерывно дифференцируема, а функция ψ непрерывно дифференцируема. Таким образом, решение задачи Коши единственно в классе \mathcal{M} функций u , удовлетворяющих условиям:

- функция u дважды непрерывно дифференцируема в области $t > 0$;
- функция u непрерывна на множестве $t \geq 0$;
- u имеет частную производную u_t , непрерывную на множестве $t \geq 0$.

Решение задачи Коши существует при дополнительных требованиях на функции φ и ψ : первая должна быть дважды непрерывно дифференцируемой, вторая — непрерывно дифференцируемой.

Корректность постановки задачи Коши также предполагает, что отображение, которое паре функций (φ, ψ) ставит в соответствие решение $u(t, x)$, в некотором смысле непрерывно. Для формулировки и обоснования утверждения о непрерывности отображения необходимо и область определения, и область значений снабдить топологией.

Ответ на вопрос о корректности задачи вытекает из следующей оценки:

$$|u(t, x)| \leq \frac{|\varphi(x + at)| + |\varphi(x - at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi(\xi)| d\xi \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_1,$$

откуда

$$\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_1.$$

Замечание 1.1. Формула Даламбера дает некоторую функцию $u(t, x)$ в гораздо более широком классе начальных условий, но получаемая при этом функция не будет дифференцируемой и по формальным признакам решением задачи Коши не будет. Однако найденное таким образом «решение» будет иметь физический смысл и будет описывать реально происходящие физические процессы. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда класс функций, для которого ставится задача является неоправданно (с физической точки зрения) зауженным. Это указывает на недостаточно развитый математический аппарат. Необходимо либо менять формулировку задачи (например, переходя к интегральным соотношениям), либо расширять понимание термина

«производная» так, чтобы можно было дифференцировать функции, в общепринятом смысле недифференцируемые. С математической точки зрения ситуацию можно трактовать так: отображение \mathcal{R} , которое паре функций (φ, ψ) ставит в соответствие решение u , поставленной задачей определено на множестве $C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$, но имеет непрерывное продолжение $\tilde{\mathcal{R}}$ на множество $C(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$. Решение, которое дается продолженным отображением $\tilde{\mathcal{R}}$, называют **обобщенным**, в то время как решение, полученное в изначальной постановке (т.е. с помощью отображения \mathcal{R}), **классическим**. Если обобщенное решение удовлетворяет требуемым условиям гладкости (принадлежности заданному классу функций), то оно является классическим.

1.4.3. Метод распространяющихся волн

Неограниченная струна. Формула Даламбера позволяет проанализировать свойства решений волнового уравнения. Отметим, что решение задачи Коши (1.6) можно представить в виде суммы решений двух подзадач:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0; \\ v|_{t=0} = \varphi(x), & v_t|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0; \\ w|_{t=0} = 0, & w_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \quad (1.10)$$

Первая из этих подзадач связана с начальным отклонением (положением), вторая — с начальными скоростями. Рассмотрим сначала первую подзадачу, полагая, что $\varphi(x) = \Lambda(x)$ (функция треугольного импульса, рис. 1.1). Отметим, что указанная функция не является дважды непрерывно дифференцируемой, так что в данном случае решение надо понимать в обобщенном смысле.

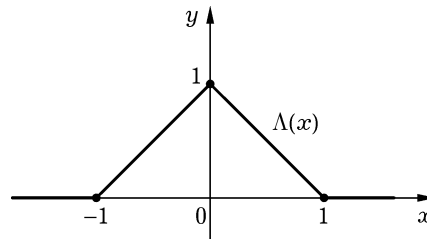


Рис. 1.1. Функция треугольного импульса $\Lambda(x)$

Согласно формуле Даламбера, имеем

$$v(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2}.$$

При заданном значении t функция $v(t, x)$ получается суммированием двух смещений функции $\varphi(x)$ влево и вправо на величину at (рис. 1.2). С увеличением t два полуимпульса разбегаются со скоростью a .

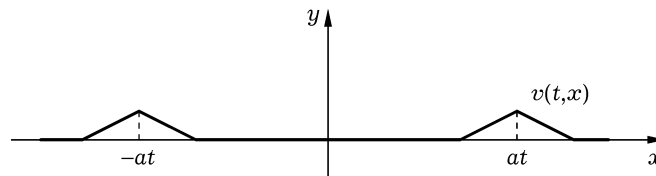
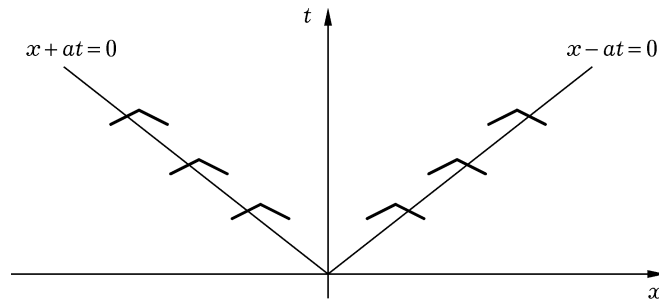
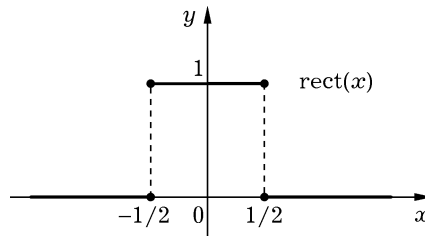


Рис. 1.2. Функция $v(t, x)$ в момент времени t

На плоскости (x, t) процесс разбегания можно представить следующим образом (рис. 1.3). Полуимпульсы смещаются вдоль двух характеристик $x - at = 0$ и $x + at = 0$. Рисунок наглядно представляет поверхность, которая является графиком функции $v(t, x)$.

Рассмотрим вторую подзадачу (1.10), полагая, что $\psi(x) = \text{rect}(x)$ (функция прямоугольного импульса, рис. 1.4).

Рис. 1.3. График функции $v(t, x)$ Рис. 1.4. Функция прямого импульса $\text{rect}(x)$

Согласно формуле Даламбера,

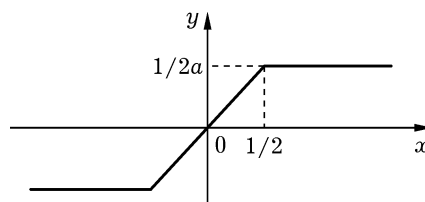
$$w(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

Введем в рассмотрение функцию, являющуюся первообразной функции $\psi(x)$:

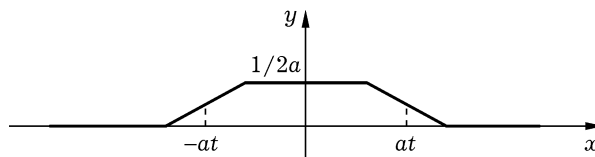
$$\psi_i(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi$$

(график функции $\psi_i(x)$ для случая $\psi(x) = \text{rect}(x)$ представлен на рис. 1.5). Тогда

$$w(t, x) = \frac{\psi_i(x + at) - \psi_i(x - at)}{2}.$$

Рис. 1.5. Первообразная $\psi_i(x)$ функции $\psi(x) = \text{rect}(x)$

С помощью функции $\psi_i(x)$ вычитанием двух ее смещений получаем функцию $w(t, x)$ при фиксированном t (рис. 1.6).

Рис. 1.6. Функция $w(t, x)$ в момент времени t

Видно, что, как и в первой подзадаче, происходит разбегание двух волн со скоростью a , но характер волн изменился. В пределе при $t \rightarrow +\infty$ получим постоянную функцию со значением $\frac{1}{2a}$.

Полугограниченная струна. Рассмотрим следующую задачу, которую также называют задачей Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x); u|_{x=0} = \mu(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Задачу (1.11) можно разложить в две задачи, сумма решений которых даст решение нашей задачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x); \\ v|_{x=0} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ w|_{t=0} = 0, \quad w_t|_{t=0} = 0; \\ w|_{x=0} = \mu(t). \end{cases} \quad (1.12)$$

Рассмотрим каждую задачу (обозначение неизвестной функции оставим традиционное — u).

Используя общее решение $v(t, x) = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$ и начальные условия, как и в случае неограниченной струны, получаем уравнения:

$$\begin{cases} \Phi(x) + \Psi(x) = \varphi(x), \\ \Phi'(x) - \Psi'(x) = \frac{1}{a}\psi(x). \end{cases}$$

Эти уравнения верны при $x > 0$. Как и в случае неограниченной струны, функции Φ и Ψ определяются соотношениями

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad \Psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi,$$

которые верны при $x > 0$. В формуле $v(t, x) = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$ в функции Φ используются только положительные значения аргумента, а в функции Ψ и положительные, и отрицательные. Значит, функцию Ψ надо определить и при $x < 0$. Для этого используем граничное условие, согласно которому $\Phi(at) + \Psi(-at) = 0$, или

$$\Phi(x) + \Psi(-x) = 0, \quad x > 0.$$

Отсюда

$$\Psi(x) = -\Phi(-x) = -\frac{1}{2}\varphi(-x) - \frac{1}{2a} \int_0^{-x} \psi(\xi) d\xi, \quad x < 0.$$

Продолжая особым образом функции φ и ψ в отрицательную часть числовой оси, можно сохранить выражение для Ψ , указанное при $x > 0$. Действительно, если положить $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, $\psi(x) = -\psi(-x)$, $x < 0$, то получим

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad x < 0.$$

Соглашение о продолжении позволяет записать решение с помощью формулы Даламбера. Итак, полагая

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x)$$

(т.е. продолжая функции φ и ψ в отрицательную область нечетным образом), можем записать решение первой задачи (1.12) с помощью формулы Даламбера, т.е. в виде

$$v(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Формула Даламбера позволяет представить решение геометрически. Пусть функция $\varphi(x)$ представляет собой треугольный импульс с центром на положительной части действительной оси. Продолжим функцию нечетным образом. На рис. 1.7 продолжение показано пунктиром.

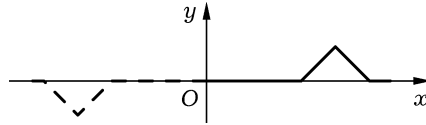


Рис. 1.7. Начальное положение $\varphi(x)$

Повторим процедуру построения функции $v(t, x)$ в фиксированный момент времени так же, как и в случае неограниченной струны. Мы видим, что сначала характер поведения такой же, как и у неограниченной струны: два полуимпульса разбегаются в разные стороны со скоростью a , виртуальная часть в отрицательной области на характер функции влияния не оказывает. (рис. 1.8, а). Однако затем виртуальный импульс из отрицательной области меняется местами с реальным. Это означает, что левый полуимпульс отражается от границы, он переворачивается и начинает двигаться вправо вслед за правым полуимпульсом (рис. 1.8, б).

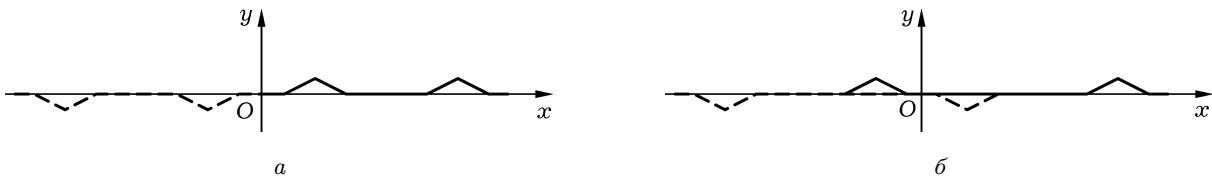


Рис. 1.8. Отражение волны от границы

На плоскости (x, t) отражение выглядит как отражение характеристики $x + at = c$ от оси Ot (рис. 1.9).

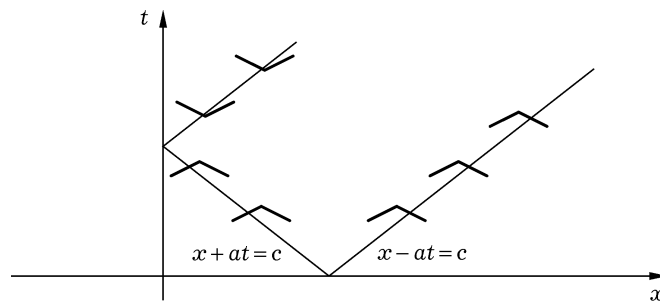


Рис. 1.9. Эффект отражения полуволны от границы

Рассмотрим вторую задачу (1.12). Записав решение в виде $w(t, x) = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$, из начальных условий заключаем, что $\Phi(x) = 0$, $\Psi(x) = 0$, $x > 0$. Для описания решения необходимо определить функцию Ψ в отрицательной области, для чего используем граничное условие, которое в данной случае дает равенство $\Phi(at) + \Psi(-at) = \mu(t)$, или

$$\Phi(x) + \Psi(-x) = \mu\left(\frac{x}{a}\right), \quad x > 0.$$

Учитывая, что $\varphi(x) = 0$, $x > 0$, окончательно получаем $\Psi(x) = \mu\left(-\frac{x}{a}\right)$, $x < 0$. Итак,

$$\Phi(x) = 0, \quad x > 0; \quad \Psi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ \mu\left(-\frac{x}{a}\right), & x < 0. \end{cases}$$

Используя полученные представления окончательно получаем:

$$w(t, x) = \begin{cases} 0, & x - at > 0; \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), & x - at < 0. \end{cases}$$

В задаче (1.11) граничное условие есть условие I рода. При таком условии наблюдается эффект отражения волн от границы с переворачиванием. В случае граничного условия II рода выкладки близки к предыдущим. Но при этом функции φ и ψ следует продолжать в отрицательную область четным образом. При этом в первой задаче (с нулевым граничным условием) решение будет по-прежнему описываться формулой Даламбера, а во второй задаче получаем:

$$w(t, x) = \begin{cases} 0, & x - at > 0; \\ -\int_0^{t-x/a} \mu(\xi) d\xi, & x - at < 0. \end{cases}$$

Четное продолжение функций φ и ψ означает, что при граничном условии II рода также проявляется эффект отражения волны от границы, но не происходит переворачивания.

1.4.4. Частные решения трехмерного волнового уравнения

Общее решение одномерного волнового уравнения дает некоторые частные решения и многомерного волнового уравнения. Например, предположив, что решение уравнения

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (1.13)$$

не зависит от y и z , мы приходим к одномерному волновому уравнению, которое дает нам частные решения

$$u(t, x) = \Phi(x + at) + \Psi(x - at). \quad (1.14)$$

Полученное решение называется **плоской волной**. Выполнив преобразование декартовой системы координат в пространстве, мы можем получить решение более общего вида

$$u = \Phi(\mathbf{r}\mathbf{n} + at) + \Psi(\mathbf{r}\mathbf{n} - at),$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, \mathbf{n} — некоторый единичный вектор. То, что функция u , определяемая этой формулой есть решение волнового уравнения, можно убедиться непосредственно. Но в принципе формулу можно получить, записав формулу (1.14) в инвариантной форме, т.е. без непосредственного использования координат: достаточно сообразить, что $x = \mathbf{r}\mathbf{i}$. А далее в результате преобразования получим нужную формулу, в которой \mathbf{n} — это бывший координатный \mathbf{i} .

Замечание 1.2. Для того чтобы эти рассуждения были законными, нужно показать, что при замене декартовых координат вид дифференциального уравнения не изменится.

Дополнительно частные решения можно получить, полагая, что решение зависит лишь от $|\mathbf{r}|$ и не зависит от направления этого вектора. Такое требование просто записать, переходя в дифференциальном уравнении к сферическим пространственным координатам:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

С условием независимости функции от угловых координат уравнение упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Раскрывая скобки в правой части, приходим к следующему линейному уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2a^2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (1.15)$$

Его можно решить таким же образом, как и одномерное волновое уравнение. Но заметим, что

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Поэтому уравнение (1.15) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Его решением является

$$u(t, r) = \frac{1}{r} \Phi(r + at) + \frac{1}{r} \Psi(r - at). \quad (1.16)$$

Решение (1.16) уравнения (1.13) называется **сферической волной**. В нем два слагаемых, первое — волна, фронт которой движется из бесконечности к началу координат, второе — волна, уходящая в бесконечность. Коэффициент $1/r$ указывает на затухание уходящей волны. Напротив, амплитуда приходящей волны растет (как гребень морской волны при приближении к берегу).

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

2.1. Определение

Определение. Условия существования. Замечание о разных формах преобразования. Общая концепция интегральных преобразований. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Обратное преобразование Фурье.

Преобразованием Фурье называют интегральное преобразование, выражаемое формулой

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Здесь $f(x)$ — **оригинал преобразования Фурье**; $F(\omega)$ — **изображение преобразования Фурье**, или **Фурье-образ**.

Замечание 2.1. Преобразование Фурье является частным случаем **интегрального преобразования**

$$F(p) = \int_a^b K(p, x) f(x) dx,$$

которое представляет собой наиболее общий вид линейного преобразования одного класса функций в другой. Функцию K называют **ядром интегрального преобразования**. Ядром преобразования Фурье является функция $K(\omega, x) = e^{-i\omega x}$.

Для существования преобразования Фурье достаточно, чтобы оригинал был абсолютно интегрируемой функцией, т.е. функция $f(x)$ должна быть интегрируемой на любом отрезке числовой оси, а несобственный интеграл от нее по всей числовой прямой должен сходиться абсолютно.

В дальнейшем для преобразования Фурье будем использовать обозначение $F[f](\omega)$, которое указывает значение преобразования функции f (в квадратных скобках) в точке ω . Здесь два слоя аргументов: аргумент в квадратных скобках — аргумент преобразования Фурье как отображения. Но значением этого отображения является функция, которая имеет свой аргумент (в круглых скобках). Для тех, кто знает язык \mathbb{C} , эта конструкция должна быть понятной: вычисление значения функции в точке рассматривается как операция с двумя операндами — сама функция и точка, в которой вычисляется значение. В зависимости от сложности объекта такая операция может применяться кратно. Кроме того, распространено обозначение оригинала и изображения одноименными буквами разных алфавитов или регистра. В этом случае используют запись типа $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$, которая указывает, что $f(x)$ — оригинал, а $F(\omega)$ — изображение.

Замечание 2.2. В литературе, к сожалению, нет единого определения преобразования Фурье. Во-первых, к основной формуле часто добавляют коэффициент $1/\sqrt{2\pi}$ (об этом ниже). Во-вторых, в приложениях (в первую очередь связанных с оптикой и акустикой) для преобразования Фурье используют формулу

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x} dx.$$

Не меняя ничего по существу, эти модификации приводят к тому, что некоторые конкретные формулы, связанные с преобразованием Фурье, изменяются. Поэтому при использовании различных литературных источников следует учитывать это обстоятельство.

Особенностью преобразования Фурье является то, что подынтегральная функция комплекснозначная, так что этот интеграл надо вводить отдельно. Можно пользоваться правилом:

$$\int [u(x) + iv(x)] dx = \int u(x) dx + i \int v(x) dx.$$

При этом сохраняются все правила работы с интегралом.

Интегральное преобразование имеет содержательный смысл тогда и только тогда, когда оно обратимо, т.е. разные функции преобразуются в разные. Однако это требование не следует интерпретировать буквально: изменение функции в одной или нескольких точках не меняет значение интеграла, в который входит эта функция. Две функции f и g имеют одинаковый Фурье-образ, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx = 0.$$

Это условие будем понимать как условие равенства функций. Оно означает, что $f(x) = g(x)$, во всех точках непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$, а точек разрыва у этих функций мало (точная формулировка дается критерием интегрируемости Римана).

Условие, положенное в основу равенства функций, достаточно для совпадения образов. Но оно и необходимо.

Теорема 2.1. Если $F[f] = 0$, то $f = 0$. #

Рассмотрим вопрос, как найти функцию-оригинал по ее Фурье-образу, т.е. каково обратное преобразование Фурье.

В курсе математического анализа известна формула, называемая **интегралом Фурье**:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(x - \xi) d\xi. \quad (2.1)$$

Точный факт следующий.

Теорема 2.2. Пусть функция $f(x)$, определенная на числовой оси, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(x)$ абсолютно интегрируема на числовой оси;
- 2) $f(x)$ кусочно непрерывна, т.е. на каждом отрезке конечное число точек разрыва и все они I рода;
- 3) $f(x)$ кусочно монотонна, т.е. каждый отрезок можно разделить на конечное число подотрезков, на каждом из которых функция монотонна;
- 4) В каждой точке разрыва x_0 выполнено равенство $f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.

Тогда имеет место равенство (2.1).

Условия 2 и 3 в теореме 2.2 известны как **условия Дирихле**.

В формуле (2.1) внешний интеграл — это интеграл от четной функции, поэтому можно записать ее в эквивалентной форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(x - \xi) d\xi. \quad (2.2)$$

Ясно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega(x - \xi) d\xi = 0$$

при условии, что внешний интеграл сходится. Обходя последнее условие введем понятие **главного значения** несобственного интеграла:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T g(x) dx.$$

Тогда

$$\text{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega(x - \xi) d\xi = 0 \quad (2.3)$$

Складывая (2.2) с равенством (2.3), умноженным на мнимую единицу, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos \omega(x - \xi) + i \sin \omega(x - \xi)) d\xi,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega(x-\xi)} d\xi,$$

Равенство преобразуется следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega \xi} d\xi.$$

Внутренний интеграл представляет собой преобразование Фурье функции f . А внешний интеграл — это **обратное преобразование Фурье**.

Теорема 2.3. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно восстановить по Фурье-образу согласно формуле обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

2.2. Свойства преобразования Фурье

Основные свойства:

- 1) $F[f] \in C(\mathbb{R})$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) = 0$;
- 2) $F[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 F[f_1] + \alpha_2 F[f_2]$; (линейность);
- 3) $F[f(\alpha t)](\omega) = \frac{1}{|\alpha|} F[f]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (теорема подобия);
- 4) $F[f(t - a)](\omega) = e^{-i\omega a} F[f](\omega)$, $a \in \mathbb{R}$ (теорема запаздывания);
- 5) $F[e^{iat} f(t)](\omega) = F[f](\omega - a)$, $a \in \mathbb{R}$ (теорема сдвига);
- 6) $F[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n F[f]$ (дифференцирование оригинала);
- 7) $F[(-it)^n f(t)](\omega) = F[f]^{(n)}(\omega)$ (дифференцирование изображения).

Гладкость и убывание на бесконечности. Свертка и ее алгебраические свойства. Свертка и преобразование Фурье.

Теорема 2.4. Преобразование Фурье $F(\omega)$ абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ является непрерывной ограниченной функцией, бесконечно малой при $\omega \rightarrow \infty$.

Теорема 2.5 (теорема подобия). Если $f(x)$ абсолютно интегрируема и $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$, то $f(\alpha x)$ также абсолютно интегрируема и

$$f(\alpha x) \xrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

◀ Утверждение вытекает из правила замены переменной:

$$\mathbf{F}[f(\alpha x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-i\omega x} dx = \left| \alpha x = z \right| = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i(\omega/\alpha)z} dz.$$

Эта выкладка дана в предположении $\alpha > 0$. В случае $\alpha < 0$ дополнительно меняются пределы интегрирования, что дает смену знака в окончательном результате. ▶

Теорема 2.6 (теорема смещения). Если $f(x)$ абсолютно интегрируема и $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $f(x)e^{i\lambda x}$ также абсолютно интегрируема и

$$e^{i\lambda x} f(x) \xrightarrow{F} F(\omega - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

◀ Абсолютная интегрируемость функции $f(x)e^{i\lambda x}$ очевидна. Формула вытекает из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\omega - \lambda)x} dx. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 2.7 (теорема запаздывания). Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема и $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $f(x - \alpha)$ также абсолютно интегрируема и

$$f(x - \alpha) \xrightarrow{F} e^{-i\alpha\omega} F(\omega), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

◀ Абсолютная интегрируемость функции $f(x - \alpha)$ очевидна. Формула получается путем замены переменной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha) e^{-i\omega x} dx = \left| x - \alpha = y \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega(y + \alpha)} dy = e^{-i\omega\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 2.8 (дифференцирование оригинала). Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема, непрерывна и всюду дифференцируема, причем функция $f'(x)$ абсолютно интегрируема. Тогда

$$\mathbf{F}[f'](\omega) = i\omega \mathbf{F}[f](\omega).$$

◀ В условиях теоремы имеет место равенство

$$f(x) = \int_0^x f'(x) dx + C.$$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx = f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Остается показать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Существование интеграла от $f'(x)$ по числовой оси означает, что $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$. Из абсолютной интегрируемости f вытекает, что оба указанных предела нулевые. ►

Следствие 2.1. Пусть $f \in C^k(\mathbb{R})$, причем функции f и $f^{(k)}$ абсолютно интегрируемы. Если $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$, то

$$f^{(k)}(x) \xrightarrow{F} (i\omega)^k F(\omega).$$

Теорема 2.9 (дифференцирование изображения). Если функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы, $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$, то функция $F(\omega)$ дифференцируема и

$$-ixf(x) \xrightarrow{F} F'(\omega).$$

◀ Пусть $-ixf(x) \xrightarrow{F} G(\omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\omega G(\nu) d\nu &= \int_0^\omega d\nu \int_{-\infty}^\infty (-ixf(x)) e^{-i\nu x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^\infty dx \int_0^\omega (-ixf(x)) e^{-i\nu x} d\nu = \int_{-\infty}^\infty f(x) (e^{-i\omega x} - 1) dx = F(\omega) - F(0). \end{aligned}$$

Так как функция $G(\omega)$ непрерывна (как Фурье-образ абсолютно интегрируемой функции), функция $F(\omega)$, как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции, дифференцируема и $F'(\omega) = G(\omega)$. ►

Замечание 2.3. Абсолютная интегрируемость функции $xf(x)$ не обеспечивает абсолютную интегрируемость $f(x)$: если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \pm 0} xf(x) \neq 0$, то функция $f(x)$ в окрестности нуля имеет поведение типа $1/x$ и не является интегрируемой. Конкретный пример: $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$. Однако если не брать в расчет особый случай, когда интеграл несобственный из-за поведения в окрестности нуля, то условие абсолютной интегрируемости становится лишним.

Следствие 2.2. Если функции $f(x)$ и $x^k f(x)$ абсолютно интегрируемы, $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$, то $F(\omega)$ k раз непрерывно дифференцируема и

$$(-ix)^k f(x) \xrightarrow{F} F^{(k)}(\omega).$$

Следствия 2.1 и 2.2 устанавливают связь между гладкостью и скоростью убывания функции и ее Фурье-образом. Из следствия 2.1 вытекает, что если функция f k раз непрерывно дифференцируема, то для ее Фурье-образа верна оценка

$$F(\omega) = o\left(\frac{1}{\omega^k}\right) \quad \omega \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, если для локально интегрируемой функции

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

то $x^k f(x)$ абсолютно интегрируема и Фурье-образ функции f является k раз непрерывно дифференцируемой функцией.

Рассмотрим класс $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых быстроубывающих (т.е. убывающих функций быстрее любой степенной функции x^{-k}). Установленная связь показывает, что преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в себя.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi. \quad (2.4)$$

Если этот интеграл существует при всех $x \in \mathbb{R}$, то он дает функцию переменного x , которая называется **сверткой функций** f и g , обозначение $f * g$.

Теорема 2.10. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ абсолютно интегрируемы, существует их свертка, являющаяся абсолютно интегрируемой функцией. Если $f(x) \xrightarrow{F} F(\omega)$, $g(x) \xrightarrow{F} G(\omega)$, то

$$(f * g)(x) \xrightarrow{F} F(\omega) G(\omega).$$

т.е. преобразование Фурье переводит операцию свертки функций в произведение.

◀ Доказательство строится на изменении порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\omega x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) e^{-i\omega x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) e^{-i\omega x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi) e^{-i\omega(x - \xi)} dx = F(\omega) G(\omega). \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования базируется на применении теоремы о расстановке пределов интегрирования в двойном интеграле. ▶

2.3. Косинус- и синус-преобразования

Предположим, что функция-оригинал является четной, т.е. $f(-x) = f(x)$. Тогда

$$F[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y} dy$$

(здесь выполнена замена $x = -y$). Сложим два представления:

$$2F[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx.$$

Таким образом,

$$F[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad (2.5)$$

Формулой (2.5) можно воспользоваться следующим образом. Пусть функция f задана на полуинтервале $[0, +\infty)$. Продолжим ее четным образом на всю числовую ось. Тогда можно применить преобразование Фурье. Оказывается, это преобразование можно выполнять, не реализуя продолжение — сразу по формуле (2.5).

Формула (2.5) определяет **косинус-преобразование Фурье**. Его обозначают $F_c[f](\omega)$. Аналогичная формула

$$F_s = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

определяет **синус-преобразование Фурье**. Это преобразование можно рассматривать как преобразование Фурье функции, продолженной на всю числовую ось нечетным образом.

Коэффициент в формулах для косинус- и синус-преобразований в литературе четко не фиксирован и от источника к источнику может меняться.

2.4. Преобразование Фурье в задачах математической физики

Использование преобразования Фурье на примере задачи Коши для уравнения теплопроводности.

3. МЕТОД ФУРЬЕ

3.1. Волновое уравнение

Смешанная задача для ограниченной струны. Представление решения в виде комбинации гармонических колебаний.

Рассмотрим смешанную задачу для одномерного уравнения колебаний — задачу малых колебаний ограниченной струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x); \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Эту задачу можно решать примерно так же, как и задачу Коши для полуограниченной струны. Можно продолжить нечетным образом функции φ и ψ сначала на отрезок $[l, 2l]$, затем на отрезок $[2l, 3l]$ и так далее. После этого повторить процедуру повторения с левой стороны. При таком продолжении формула Даламбера даст решение задачи на отрезке $[0, l]$. Механизм продолжения фактически означает, что для каждой точки, строя характеристики, мы должны подсчитать все отражения и после этого установить, из каких точек начальные условия формируют значение в данной точке. Предложенный вариант решения, хотя и возможен, не очень удобен с точки зрения реализации и, кроме того, не переносится на другие задачи. Нужен более универсальный способ.

Один из способов решения задачи (3.1) в литературе часто излагается следующим образом. Для дифференциального уравнения в задаче (3.1) рассмотрим специальные решения вида $u(t, x) = T(t)X(x)$, которые к тому же удовлетворяют граничным условиям, т.е. для функции $X(x)$ имеют место соотношения $X(0) = 0, X(l) = 0$.

Подставим $u = T(t)X(x)$ в дифференциальное уравнение:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x),$$

или, после деления на $a^2 T(t)X(x)$:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

в последнем равенстве слева — функция переменного t , а справа — функция переменного x . В силу равенства обе они постоянны. Записав $X''(x)/X(x) = \lambda = \text{const}$, приходим к дифференциальному

$$X'' - \lambda X = 0. \quad (3.2)$$

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое при любом λ имеет два линейно независимых решения. Однако несложно проверить, что среди всей этой массы решений граничным условиям удовлетворяют только функции $\sin \omega_n x$, где $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, \dots$, а эти функциям соответствуют значения $\lambda_n = -\omega_n^2$.

Найдя значения λ_n , для каждого такого значения имеем еще одно дифференциальное уравнение: $\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \lambda_n$, или

$$T'' - a^2 \lambda_n T = 0.$$

С учетом знака λ_n находим

$$T_n(t) = A_n \cos a\omega_n t + B_n \sin a\omega_n t,$$

где коэффициенты A_n и B_n пока не определены.

Найдя большое количество решений, удовлетворяющих однородным граничным условиям, ищем решение исходной задачи в виде их линейной комбинации, а точнее в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\omega_n t + B_n \sin a\omega_n t) \sin \omega_n x.$$

Предполагаем, конечно, что этот ряд является решением дифференциального уравнения, поскольку каждый член ряда — решение этого уравнения. Граничные условия выполняются, и остается обеспечить выполнение начальных условий. Подставив $t = 0$, получим

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \omega_n x = \varphi(x).$$

Аналогично равенство, полученное после дифференцирования ряда:

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin \omega_n x = \psi(x).$$

Вдруг оказалось, что коэффициенты A_n и B_n связаны с разложением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд по синусам кратных углов. Коэффициенты такого разложения можно найти по формулам Эйлера — Фурье:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Изложенное решение оставляет несколько вопросов математического плана. Во-первых, не ясно, сходится ли ряд из найденных решений специального вида. Во-вторых, не ясно, является ли сумма ряда в действительности решением дифференциального уравнения, т.е. можно ли его дифференцировать почленно. В конкретном случае эти вопросы обходятся: полученный ряд можно проверить непосредственно, что он является решением задачи уже с соблюдением всех математических ограничений.

Однако главная проблема не в этих вопросах. Совершенно не ясно, где здесь специфика конкретного уравнения, а где общие принципы, позволяющие создать общий метод решения подобных задач. В частности, не ясно, всегда ли будет получаться ряд по ортогональной системе и отчего это зависит. Не ясно, что делать в случае, когда дифференциальное уравнение неоднородно.

Ситуацию в этом примере можно немного прояснить следующим образом. Рассмотрим линейный оператор $Lu = u''(x)$, областью определения которого являются функции, непрерывные на отрезке $[0, l]$, дважды непрерывно дифференцируемые на интервале $(0, l)$, удовлетворяющие установленным граничным условиям. Уравнение (3.2) является уравнением на собственные функции этого линейного оператора. Далее, формулы Эйлера — Фурье, как легко увидеть представляют собой скалярные произведения в рамках евклидова пространства $L_2[0, l]$. Вычисление коэффициентов (координат разложения) через скалярное произведение работает (в конечномерном случае) в ортогональных базисах. Таким образом, речь идет о разложении искомого решения по собственным функциям некоторого линейного оператора, связанного с задачей, причем важны условия, при которых собственные функции образуют ортогональную систему.

Дальнейшее изложение здесь в основном посвящено краткой сводке нужных теоретических фактов из функционального анализа.

Литература: [4], гл. II, §3.

3.2. Элементы гармонического анализа

Бесконечномерное евклидово пространство. Сходимость последовательностей. Критерий Коши и полнота. Примеры. Пополнение. Ортогональные системы. Нормирование. Ряд по ортогональной системе. Теорема: Если $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, то $\alpha_i = \frac{(f, e_i)}{|e_i|^2}$. Ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Минимальное свойство ряда Фурье. Теорема: неравенство Бесселя превращается в равенство \Leftrightarrow элемент есть сумма своего ряда Фурье. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость ортогональной системы.

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , называют **евклидовым**. В евклидовом пространстве действует **евклидова норма** $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ (также ее называют сферической). С помощью нормы можно измерять степень близости векторов и на этой основе дать определение сходимости. Последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ векторов нормированного пространства сходится к вектору \mathbf{x} , если числовая последовательность $\{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|\}$ является бесконечно малой, т.е. сходится к нулю.

В конечномерном евклидовом пространстве верны многие теоремы математического анализа, касающиеся сходимости. В частности, верен **критерий Коши**: последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она **фундаментальна**, т.е. $\{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m|\}$ стремится к нулю при $n, m \rightarrow +\infty$.

В бесконечномерных евклидовых пространствах критерий Коши может не иметь места. Если для нормированного пространства L выполняется критерий Коши, т.е. любая фундаментальная последовательность сходится, то такое нормированное пространство называют **полным**, или **банаховым**. Если евклидово пространство, как нормированное с евклидовой нормой, является полным, его называют **гильбертовым**. Обычно есть дополнительное требование, что гильбертово пространство бесконечномерно.

Есть еще одна особенность бесконечномерных нормированных пространств. В конечномерном случае используют термин «подпространство» для подмножеств линейного пространства, замкнутых относительно линейных операций. Каждое подпространство конечномерного нормированного пространства является замкнутым множеством, т.е. предельный переход не выводит за пределы такого множества. В бесконечномерном случае множество, замкнутое относительно линейных операций, может не быть замкнутым множеством в смысле топологическом (т.е. относительно предельного перехода). В связи с этим в функциональном анализе используют два термина:

- множество, замкнутое относительно линейных операций (алгебраически замкнутое), называют **линейным многообразием** (термин соответствует понятию подпространства в линейной алгебре);
- множество, замкнутое и алгебраически, и топологически (т.е. любая предельная точка множества принадлежит этому множеству), называют **линейным подпространством** (в линейной алгебре любое множество, замкнутое алгебраически, является замкнутым и топологически, а в бесконечномерном случае это не так).

Пример 3.1. Примером полного нормированного пространства является множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с обычными операциями сложения и умножения на число и с нормой

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Его обозначают $C([a, b])$. Сходимость последовательности функций по указанной норме — это **равномерная сходимость**.

В качестве множества в этом пространстве, алгебраически замкнутого, можно назвать совокупность всех многочленов. Это множество не является подпространством, поскольку, например, функция $\sin x$ есть сумма степенного ряда, сходящегося на любом отрезке равномерно. Более того, согласно известной теореме Вейерштрасса, любая функция, непрерывная на отрезке,

является равномерным пределом некоторой последовательности многочленов. Это заключение означает, что множество всех многочленов **всюду плотно** в $C([a, b])$, т.е. замыкание этого множества совпадает с $C([a, b])$.

Итак, множество всех многочленов есть всюду плотное линейное многообразие в $C([a, b])$. Пример подпространства в $C([a, b])$ — множество всех непрерывных на $[a, b]$ функций, обращающихся в нуль в точке a (также в любой другой точке и на любом замкнутом подмножестве отрезка $[a, b]$).

Пример 3.2. Канонический пример гильбертова пространства — множество l_2 числовых последовательностей $\mathbf{x} = \{x_n\}$, удовлетворяющих условию

$$|\mathbf{x}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty.$$

Скалярным произведением в l_2 является

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

(ряд справа для любых последовательностей в l_2 сходится абсолютно).

В математической физике (и теории дифференциальных уравнений в частных производных) более существенную роль играет гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, определенных на измеримом пространстве Ω и суммируемых с квадратом:

$$|f|^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mu$$

(здесь μ — конечная или счетно-конечная мера на измеримом пространстве Ω). На множествах в \mathbb{R}^n в качестве μ чаще всего используют меру Лебега. Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ определяется формулой

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) d\mu.$$

Особенностью этих пространств является то, что интеграл по мере не изменяется, если функцию изменить на множестве меры нуль. Чтобы избежать конфликта с 4-й аксиомой скалярного произведения, функции, различающиеся на множестве меры нуль, считают одинаковыми. Более строго говоря, элементом гильбертова пространства $L_2(\Omega)$ являются классы функций, построенные по отношению эквивалентности

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} g(x).$$

(«равны почти всюду», т.е. всюду, кроме некоторого множества меры нуль).

Как и в конечномерных евклидовых пространствах, в бесконечномерных большую роль играют **ортogonalные системы**, т.е. множества ненулевых элементов, в которых любые два ортогональны друг другу. Любой конечная подсистема ортогональной системы линейно независима (это ключевая теорема линейной алгебры). Поэтому в бесконечномерном евклидовом пространстве есть бесконечные ортогональные системы.

Рядом по ортогональной системе $\{e_n\}$ называют ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Такой ряд называется сходящимся, если его последовательность частичных сумм $\sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$ сходится. На ряды в евклидовом пространстве распространяются многие понятия теории числовых рядов.

Теорема 3.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ в евклидовом пространстве E сходится к некоторому элементу $x \in E$, т.е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

то

$$\alpha_n = \frac{(x, e_n)}{|e_n|^2}. \quad (3.3)$$

◀ Обозначим через S_N частичную сумму ряда: $S_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$. Тогда по условию $|x - S_N| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Выберем произвольный номер k и зафиксируем. При $N > k$, учитывая представление частичной суммы, имеем

$$(x, e_k) = (x - S_N, e_k) + (S_N, e_k) = (x - S_N, e_k) + \sum_{n=1}^N \alpha_n (e_n, e_k) = (x - S_N, e_k) + \alpha_k |e_k|^2.$$

Отсюда

$$(x, e_k) - \alpha_k |e_k|^2 = (x - S_N, e_k).$$

Устремив N к ∞ , с помощью неравенства Коши — Буняковского находим, что правая часть равенства стремится к нулю:

$$|(x - S_N, e_k)| \leq |x - S_N| |e_k|,$$

поскольку $|x - S_N| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Но левая часть вообще не зависит от N . Значит, она равна нулю, т.е.

$$(x, e_k) = \alpha_k |e_k|^2.$$

Это эквивалентно равенству (3.3), которое выполняется для любого k , поскольку этот номер выбирался произвольно. ▶

Из доказанной теоремы вытекает, что если элемент x представим как сумма ряда по ортогональной системе, то коэффициенты α_n этого ряда вычисляются по формуле (3.3). Основной наш вопрос — представление элементов евклидова пространства (функций) в виде ряда по ортогональной системе. В этом контексте мы сразу можем считать, что коэффициенты ряда получены для некоторого $x \in E$ по формуле (3.3) и остановиться на вопросе, сходится ли такой ряд и, если да, то сходится ли он к рассматриваемому элементу x .

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad \alpha_n = \frac{(x, e_n)}{|e_n|^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

называют **рядом Фурье** элемента x , коэффициенты α_n такого ряда — **коэффициентами Эйлера — Фурье**, а формулы, по которым вычисляются эти коэффициенты, **формулами Эйлера — Фурье**.

Теорема 3.2. Для любого ряда Фурье (3.4) имеет место **неравенство Бесселя**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |e_n|^2 \leq |x|^2. \quad (3.5)$$

◀ Пусть S_N — частичная сумма ряда Фурье (3.4). Очевидно неравенство $|x - S_N|^2 \geq 0$. Однако при этом

$$\begin{aligned} |x - S_N|^2 &= (x - S_N, x - S_N) = |x|^2 - 2(x, S_N) + (S_N, S_N) = \\ &= |x|^2 - 2 \sum_{n=1}^N \alpha_n (x, e_n) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \alpha_n \alpha_m (e_n, e_m) = \\ &= |x|^2 - 2 \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 |e_n|^2 + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 |e_n|^2 = |x|^2 - \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 |e_n|^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 |e_n|^2 \leq |x|^2.$$

Последнее неравенство означает, что частичные суммы знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ ограничены сверху величиной $|x|^2$. Значит, ряд сходится, а его сумма также не превышает $|x|^2$. ▶

Замечание 3.1. Из доказательства неравенства Бесселя можно получить еще одно важное свойство. Согласно доказательству, для суммы $S_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$ с произвольными коэффициентами α_n имеем

$$|x - S_N|^2 = |x|^2 - 2 \sum_{n=1}^N \alpha_n (x, e_n) + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 |e_n|^2.$$

Правую часть равенства можно рассматривать как квадратичную функцию с переменными α_n . Нетрудно показать, что она имеет наименьшее значение при $\alpha_n = \frac{(x, e_n)}{|e_n|^2}$. Но величина $|x - S_N|$ показывает отклонение суммы S_N от элемента x . Таким образом, наименьшее отклонение частичных сумм ряда по ортогональной системе от элемента x будет в случае, когда этот ряд есть ряд Фурье элемента x . Это свойство известно как **минимальное свойство ряда Фурье**.

Возвращаемся к вопросу, когда ряд Фурье сходится к своему элементу.

Теорема 3.3. Ряд Фурье (3.4) элемента x сходится к x тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |e_n|^2 = |x|^2, \quad (3.6)$$

т.е. когда неравенство Бесселя превращается в равенство.

◀ Согласно доказательству теоремы 3.2, имеем

$$|x - S_N|^2 = |x|^2 - \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 |e_n|^2. \quad (3.7)$$

Сходимость ряда Фурье к x означает, что $|x - S_N| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. В этом случае в силу (3.7)

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 |e_n|^2 \rightarrow |x|^2 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Наоборот, если имеем место (3.6), то $|x - S_N| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, т.е. ряд Фурье сходится к x . ▶

Равенство (3.6) известно как **равенство Парсеваля**.

Из неравенства Бесселя вытекает, что частичные суммы ряда Фурье всегда образуют фундаментальную последовательность. Действительно,

$$|S_N - S_{N+p}|^2 = \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} \alpha_n e_n \right|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+p} \alpha_n^2 |e_n|^2.$$

Отсюда вытекает, что фундаментальность последовательности $\{S_N\}$ равносильна фундаментальности последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 |e_n|^2$, т.е. сходимости этого ряда, а он всегда сходится.

Из условия фундаментальности последовательности частичных сумм можно сделать заключение о сходимости ряда в случае, когда выполняется критерий Коши, т.е. когда евклидово пространство полно и является гильбертовым.

Теорема 3.4. В гильбертовом пространстве любой ряд Фурье сходится. #

Рассмотрим элемент $x \in E$ в гильбертовом пространстве E и пусть x_0 — сумма его ряда Фурье. Положим $y = x - x_0$. Оказывается, что y ортогонален каждому элементу системы $\{e_n\}$. Действительно,

$$(y, e_k) = (x - x_0, e_k) = (x, e_k) - (x_0, e_k) = \alpha_k |e_k|^2 - \alpha_k |e_k|^2 = 0.$$

Здесь равенство $(x, e_k) = \alpha_k |e_k|^2$ верно по определению (коэффициенты ряда являются коэффициентами Эйлера — Фурье элемента x), а равенство $(x_0, e_k) = \alpha_k |e_k|^2$ вытекает из теоремы 3.1.

Если $y \neq 0$, то этот элемент можно добавить к ортогональной системе, т.е. расширить ортогональную систему, а в результате в ряд Фурье будет добавлено новое слагаемое, связанное с y . Получается, что ряд Фурье не сходился к своему элементу потому, что в ортогональной системе были учтены не все составляющие.

Ортогональная система называется **полной**, если она не является частью какой-либо другой ортогональной системы, т.е. из условия $y \perp e_n$, $n = 1, 2, \dots$, вытекает, что $y = 0$.

Если в гильбертовом пространстве ортогональная система $\{e_n\}$ является полной, то любой ряд Фурье по этой системе сходится к своему элементу.

Мы получили свойство-критерий того, что любой элемент представим рядом по ортогональной системе: во-первых, евклидово пространство должно быть полным (гильбертовым), а во-вторых, ортогональная система должна быть полной.

Замечание 3.2. Следует обратить внимание на то, что термин «полный» используется в двух разных смыслах: для евклидова пространства — выполнение критерия Коши, для ортогональной системы — невозможность ее пополнения.

Условие полноты ортогональной системы на самом деле не является простым для проверки. Кроме того, требуется еще полнота самого евклидова пространства. Есть еще один критерий представимости любого элемента рядом по ортогональной системе.

Ортогональную систему $\{e_n\}$ в евклидовом пространстве E назовем **замкнутой**, если множество конечных линейных комбинаций элементов ортогональной системы всюду плотно в E .

Условие замкнутости системы $\{e_n\}$ означает, что для любого элемента x и для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такую линейную комбинацию $S_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$ с некоторыми коэффициентами α_n , что $|x - S_N| < \varepsilon$. Но в силу минимального свойства этому же неравенству удовлетворяет и частичная сумма ряда Фурье элемента x , причем не только сумма, соответствующая индексу N , но и все последующие (опять-таки в силу минимального свойства все последующие частичные суммы дают меньшее отклонение: частичная сумма S_N ряда Фурье может рассматриваться как линейная комбинация $N + p$ элементов ортогональной системы и в этом качестве проигрывает частичной сумме S_{N+p}). Это значит, что ряд Фурье сходится к элементу x .

Наоборот, если каждый элемент есть сумма своего ряда Фурье, то система $\{e_n\}$ замкнута, поскольку всюду плотное множество образуют всевозможные частичные суммы рядов Фурье.

Теорема 3.5. В гильбертовом пространстве ортогональная система замкнута тогда и только тогда, когда она полна.

◀ Условие полноты следует из условия замкнутости в любом евклидовом пространстве. Действительно, если $y \perp e_n$, $n = 1, 2, \dots$, то ряд Фурье элемента y имеет все коэффициенты, равные нулю. Такой ряд, естественно, сходится к нулю. Но из рассуждений выше вытекает, что для замкнутой системы любой элемент есть сумма своего ряда Фурье. Значит, $y = 0$. Тем самым полнота доказана.

Если пространство гильбертово, а ортогональная система полна, то каждый элемент есть сумма своего ряда Фурье. В этом случае ортогональная система замкнута. ▶

Замечание 3.3. Условие замкнутости ортогональной системы равносильно тому, что любой ряд Фурье сходится к своему элементу, а это, согласно теореме 3.3, равносильно тому, что для любого элемента x имеет место равенство Парсеваля. Последнее условие часто используют для определения понятия замкнутости, т.е. говорят, что система замкнута, если для любого элемента выполняется равенство Парсеваля.

3.3. Тригонометрические ряды

Тригонометрические ряды в L_2 . Теорема Дирихле. Замкнутость тригонометрической системы. Четные и нечетные функции. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Связь с преобразованием Фурье.

Пример ортогональных систем дают тригонометрические ряды.

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2([-l, l])$ и в нем ортогональную систему $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$. Эта система является ортогональной. Например,

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(\sin \frac{(m+n)\pi x}{l} - \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \right) dx = 0.$$

Квадраты норм:

$$\int_{-l}^l 1 \cdot dx = 2l, \quad \int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l.$$

Ряд по этой ортогональной системе записывают в форме

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

и называют **тригонометрическим рядом**.

Такой ряд можно составить как **ряд Фурье** функции $f(x)$, суммируемой на отрезке $[-l, l]$, для чего коэффициенты нужно вычислить по формулам Эйлера — Фурье:

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Согласно варианту теоремы Вейерштрасса, в $L_2([-l, l])$ всюду плотны **тригонометрические многочлены** — частичные суммы тригонометрических рядов. Значит, тригонометрическая система замкнута в $L_2([-l, l])$, а любой ряд Фурье сходится к своей функции в $L_2([-l, l])$, т.е.

$$\int_{-l}^l \left| f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^N \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Приведенное условие сходимости на самом деле непростое и отнюдь не гарантирует сходимости ряда Фурье к своей функции в каждой точке (т.е. поточечной сходимости). Можно лишь утверждать, что функцию можно восстановить по ее ряду Фурье, причем не во всех точках (функции, различающиеся, например, в конечном числе точек, имеют одинаковые ряды Фурье). Но как это сделать, пока не ясно.

Можно указать дополнительные условия, при которых ряд Фурье сходится к своей функции поточечно. Например, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|)$ сходится, то тригонометрический ряд сходится равномерно. Из равномерной сходимости вытекает сходимость его к той же функции в $L_2([-l, l])$. Значит, равномерно он сходится к своей функции, которую можно представить как непрерывную функцию. Сформулированное условие несложно проверить по известным коэффициентам. Например, так будет, если $A_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, $B_n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$.

Другой вариант условий поточечной сходимости — условия, налагаемые на исходную функцию.

Теорема 3.6 (Дирихле). Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ удовлетворяет условиям:

- 1) $f(x)$ кусочно непрерывна, т.е. имеет на $[-l, l]$ конечное число точек разрыва и все они первого рода;
- 2) $f(x)$ кусочно монотонна, т.е. отрезок $[-l, l]$ можно так разделить на конечное число подотрезков, что на каждом из этих подотрезков функция монотонна;
- 3) в каждой точке разрыва выполняется равенство

$$f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

т.е. значение функции в точке разрыва равно полусумме односторонних пределов функции в этой точке, а в концах отрезка — равенство

$$f(-l) = f(l) = \frac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}.$$

Тогда в каждой точке отрезка выполняется равенство

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

где коэффициенты A_n, B_n вычислены по формулам Эйлера — Фурье (3.8). #

Условия 1) и 2) в сформулированной теореме Дирихле называют **условиями Дирихле**. Эти условия взаимосвязаны. Так из кусочной монотонности вытекает отсутствие точек разрыва второго рода (правда, монотонная функция может иметь на отрезке счетное число точек разрыва). При наличии условия 1) условие 2) может быть сформулировано как существование конечного числа точек локального экстремума. Но в целом эти условия носят глобальный характер, поскольку характеризуют поведение функции на отрезке в целом. Существуют и локальные условия.

Теорема Дирихле позволяет делать заключения о поточечной сходимости ряда Фурье по свойствам функции.

Тригонометрический ряд можно записывать в различной форме. Например, его можно представить как суперпозицию простых гамоник. Действительно, рассмотрим выражение

$$A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Величины

$$a_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}, \quad b_n = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$$

представляют собой координаты единичного двумерного вектора, т.е. для некоторого угла θ_n будем иметь $a_n = \sin \theta_n$, $b_n = \cos \theta_n$. С использованием этих представлений получаем

$$\begin{aligned} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \left(\sin \theta_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \cos \theta_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \\ &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin \left(\frac{n\pi x}{l} + \theta_n \right). \end{aligned}$$

Полагая $d_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\nu_n = \frac{n}{2l}$, получаем представление тригонометрического ряда в виде

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(2\pi\nu_n x + \theta_n).$$

В этом представлении величину $d_0 = \frac{A_0}{2}$ называют **постоянной составляющей**, n -й член ряда — n -й **гармоникой**, величины d_n , ν_n и θ_n — **амплитудой**, **частотой** и **начальной фазой** n -й гармоники. Последовательность $\{d_n\}$ называют **спектром амплитуд**, последовательность $\{\theta_n\}$ — **спектром фаз**.

Ряд Фурье часто записывают в комплексной форме, к которой можно перейти с помощью формул Эйлера

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Заменяя с помощью этих формул косинусы и синусы в ряде Фурье, получаем (как и выше, $\nu_n = \frac{n}{2l}$):

$$\begin{aligned} A_n \cos(2\pi\nu_n x) + B_n \sin(2\pi\nu_n x) &= A_n \frac{e^{2\pi\nu_n i x} + e^{-2\pi\nu_n i x}}{2} + B_n \frac{e^{2\pi\nu_n i x} - e^{-2\pi\nu_n i x}}{2i} = \\ &= \frac{A_n - iB_n}{2} e^{2\pi\nu_n i x} + \frac{A_n + iB_n}{2} e^{-2\pi\nu_n i x}. \end{aligned}$$

Полагая

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_n = \frac{A_n - iB_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi\nu_n x) + B_n \sin(2\pi\nu_n x)) = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi\nu_n i x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-2\pi\nu_n i x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi\nu_n i x}. \end{aligned}$$

Представление функции в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi\nu_n i x}$$

называется **рядом Фурье** функции $f(x)$ **в комплексной форме**. При этом двусторонняя последовательность $\{c_n\}$ называется **спектральной последовательностью**. Нетрудно увидеть, что последовательность $\{|c_n|\}$ есть амплитудный спектр функции $f(x)$, а последовательность $\{\arg c_n\}$ — фазовый спектр (правда, первая последовательность четна: $|c_{-n}| = |c_n|$, а вторая — нечетна $\arg c_{-n} = -\arg c_n$).

Рассмотрим функцию $f(x)$ на отрезке $[0, l]$. Чтобы ее представить тригонометрическим рядом, можно продолжить ее каким-либо образом на полуинтервал $[-l, 0)$, а затем полученную функцию, заданную на отрезке $[-l, l]$, разложить в ряд Фурье.

Продолжить функцию на полуинтервал $[-l, 0)$ можно разными способами. Это дает разные варианты разложения. Но два способа продолжения выделяются.

1. Функцию $f(x)$ можно продолжить нечетным образом, т.е. согласно формуле $f(x) = -f(-x)$, $x \in [-l, 0)$. В результате такого продолжения получим нечетную функцию на отрезке $[-l, l]$. При разложении такой функции коэффициенты Фурье по косинусам будут равны нулю (поскольку интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке равен нулю). Коэффициенты по синусам можно вычислять по формуле

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

(удвоение интеграла при интегрировании четной функции по симметричному промежутку).

Таким образом, любая функция $f \in L_2[-l, l]$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.9)$$

где

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.10)$$

На самом деле можно показать, что функции $\sin \frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, — ортогональные элементы в $L_2[0, l]$, а система функций $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}$ является ортогональной. Поэтому представление (3.9) есть разложение функции по ортогональной системе, а формулы (3.10) — это формулы Эйлера — Фурье вычисления коэффициентов ряда Фурье. Существование такого представления для любой функции означает, что система $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}$ является замкнутой.

2. Функцию $f(x)$ можно продолжить четным образом, т.е. согласно формуле $f(x) = f(-x)$, $x \in [-l, 0)$. Получим четную функцию. Рассуждая, как и выше, заключаем, что любая функция $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.11)$$

где

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.12)$$

Представление (3.9) называют **разложением функции по синусам кратных углов**, а представление (3.11) — **разложением функции по косинусам кратных углов**.

Литература: [5, гл. 3], [6].

3.4. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Понятие линейного оператора в бесконечномерном нормированном пространстве. Непрерывные и ограниченные операторы. Линейные многообразия и подпространства. Область определения и область значений. Плотные операторы. Спектр линейного оператора. Самосопряженные операторы. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора.

В конечномерном нормированном пространстве любой линейный оператор является непрерывным. В бесконечномерном случае это не так.

Определение 3.1. Линейный оператор $A: E \rightarrow E$ в линейном нормированном пространстве называется **ограниченным**, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется условие $\|Ax\| \leq C\|x\|$, $x \in E$. Точная нижняя грань таких значений C называется нормой ограниченного оператора.

Норму ограниченного оператора A можно вычислить по формуле

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Линейный оператор непрерывен, если для любого x_0 и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ при $\|x - x_0\| < \delta$. Непрерывность линейного оператора в некоторой точке x_0 означает, что он непрерывен и в любой другой точке. Поэтому условие непрерывности можно формулировать лишь для точки $x_0 = 0$: линейный оператор A непрерывен, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|Ax\| < \varepsilon$ при $\|x\| < \delta$.

Довольно очевидно, что ограниченный оператор является непрерывным: в определении непрерывности достаточно установить $\delta = \varepsilon/\|A\|$.

Лемма 3.1. Непрерывный оператор в нормированном пространстве является ограниченным.

◀ Пусть линейный оператор A непрерывен. Выберем $\varepsilon = 1$ и по нему выберем соответствующее значение $\delta > 0$. Если $\|x\| = \delta/2$, то, согласно условию непрерывности, имеем $\|Ax\| < \varepsilon = 1$. Для произвольного $y \in E$

$$Ay = \frac{2\|y\|}{\delta} A\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right).$$

Полагая $x = \frac{\delta y}{2\|y\|}$; заключаем, что $\|x\| = \frac{\delta}{2}$. Поэтому

$$\|Ay\| = \frac{2\|y\|}{\delta} \|Ax\| \leq \frac{2}{\delta} \|y\| = C\|y\|. \quad \blacktriangleright$$

Таким образом, в нормированном пространстве понятия ограниченности и непрерывности линейного оператора эквивалентны. Различие понятий в том, что условие ограниченности базируется на норме, в то время как условие непрерывности можно ввести в гораздо более общей ситуации, когда нормы нет, но определено понятие окрестности точки, т.е. в топологическом линейном пространстве.

В бесконечномерном линейном пространстве есть линейные операторы, не являющиеся непрерывными (или ограниченными).

Пример 3.3. Рассмотрим множество бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ (под дифференцируемостью в концах отрезка понимается существование односторонней производной). Введем норму $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Получим нормированное пространство.

В этом пространстве действует линейный оператор D , который каждой функции ставит в соответствие ее производную: $D[f](x) = f'(x)$. Этот оператор не является ограниченным. Действительно, функции $f_n(x) = \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, имеют, по крайней мере начиная с некоторого номера, норму, равную 1. В то же время функции $D[f_n](x) = n \cos nx$ имеют норму, равную n . Ясно, что неравенство $\|D[f_n]\| \leq C\|f_n\|$ ни при каком C для всех n не выполняется.

В полном нормированном пространстве типично, что линейный оператор, не являющийся непрерывным, определен не на всем линейном пространстве, а на некотором линейном многообразии, которое называют **областью определения линейного оператора**. Будем область определения линейного оператора A обозначать $D(A)$. Поскольку $D(A)$ — линейное многообразие, его замыкание — подпространство, которое, рассматриваемое как самостоятельное, будет полным нормированным пространством. Можно изначально ограничиваться этим подпространством, что позволяет считать, что $D(A)$ всюду плотно в рассматриваемом полном нормированном пространстве. В этом случае говорят, что **линейный оператор A плотно определен**.

Плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве будем называть **самосопряженным**, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любой пары элементов $x, y \in d(A)$.

Комплексное число λ называется **регулярным** для линейного оператора $A: E \rightarrow E$, если линейный оператор $A - \lambda I$ биективен (т.е. взаимно однозначен и сюръективен), причем обратный оператор является ограниченным. Множество всех регулярных значений называют **резольвентным множеством**. Дополнение в \mathbb{C} к резольвентному множеству называется **спектром линейного оператора**.

Таким образом, число λ относится к спектру, если оператор $A - \lambda I$ не имеет ограниченного обратного. Последнее может быть по нескольким причинам. Во-первых, линейный оператор $A - \lambda I$ может не быть инъективным, т.е. иметь ненулевое ядро. В этом случае существует ненулевой вектор x , для которого $(A - \lambda I)x = 0$, или $Ax = \lambda x$, называемый собственным вектором, при этом λ — собственное значение. Во-вторых, этот оператор может не быть эпиморфизмом (сюръективным). Наконец, обратный оператор существует, определен на всем линейном пространстве, но не ограничен. В первом случае число $\lambda \in \mathbb{C}$ относят к **дискретному спектру**, а в двух последних случаях — к **непрерывному спектру**.

Линейные операторы, которые мы будем рассматривать, имеют чисто дискретный спектр, т.е. непрерывный спектр отсутствует.

В случае самосопряженных линейных операторов верна теорема, используемая в линейной алгебре.

Теорема 3.7. Собственные векторы, отвечающие разным действительным собственным значениям, ортогональны.

◀ Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_1, x_2 \neq 0$. Тогда

$$(Ax_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2) \quad \text{и} \quad (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = \lambda_2 (x_1, x_2).$$

Поэтому $\lambda_1 (x_1, x_2) - \lambda_2 (x_1, x_2) = 0$, откуда $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(x_1, x_2) = 0$. ▶

Именно самосопряженные операторы являются поставщиками ортогональных систем. Отметим, что если собственное число λ является кратным, т.е. размерность ядра оператора $A - \lambda I$ (собственное подпространство линейного оператора) больше единицы, то этому собственному числу λ соответствует несколько линейно независимых векторов, причем нет никаких оснований считать априори, что эти векторы ортогональны. Для обеспечения этого свойства надо, выбрав в собственном подпространстве систему независимых векторов, провести процесс ортогонализации.

3.5. Оператор Штурма — Лиувилля

Оператор $\mathcal{L}u = -(pu_x)_x + qu$. Его многомерное обобщение. Условие самосопряженности. Положительная определенность. Теорема о полноте собственных функций: собственные значения оператора \mathcal{L} имеют конечную кратность и не имеют конечных предельных значений; ортогональная система собственных функций полна в L^2 .

Рассмотрим следующую смешанную задачу

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(t, x), \quad x \in G, \quad t > 0; \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_S &= \mu(t, x). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $S = \partial G$ — граница области G , по предположению являющаяся гладкой.

Эта задача описывает процесс распространения тепла или процесс диффузии в неоднородной среде. В правой части дифференциального уравнения есть дифференциальный оператор $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu$, который связан с дифференцированием по пространственным переменным, но не зависит от дифференцирования по времени. Область его определения есть некоторый класс функций, определенных в G . Очевидно, что эти функции должны быть дважды непрерывно дифференцируемы в G , а для связи с граничными условиями должны быть непрерывны в замкнутой области \bar{G} . Наша задача изучить свойства этого линейного оператора. Сначала остановимся на одномерном случае.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial}{\partial x} \right) + qI, \quad (3.14)$$

где I — тождественный оператор. В качестве его области определения возьмем множество функций $C^2(G) \cap C(\bar{G})$, где в данном случае $G = [0, l]$ — отрезок. Проверим его на самосопряженность. Проверка базируется на интегрировании по частям:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, v) &= \int_0^l (-(pu_x)_x v + quv) dx = \\ &= \int_0^l (-(pu_x)_x v) + \int_0^l quv dx = -pu_x v \Big|_0^l + \int_0^l pu_x v_x dx + \int_0^l quv dx = \\ &= p(uv_x - u_x v) \Big|_0^l + \int_0^l (-u(pv_x)_x + quv) dx = p(uv_x - u_x v) \Big|_0^l + (u, \mathcal{L}v). \end{aligned}$$

Для выполнения равенства $(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v)$ нужно, чтобы выполнялось равенство

$$p(uv_x - u_x v) \Big|_0^l = 0,$$

или

$$\left(p \begin{vmatrix} u & v \\ u_x & v_x \end{vmatrix} \right) \Big|_0^l = 0. \quad (3.15)$$

Рассмотрим значение определителя при $x = 0$. Равенство этого определителя нулю означает, что его строки пропорциональны, т.е. $\alpha u(0) + \beta u_x(0) = 0$ и $\alpha v(0) + \beta v_x(0) = 0$. Другими словами, условие (3.15) будет выполнено, если функции u и v удовлетворяют однородным граничным условиям общего вида.

Оператор \mathcal{L} с областью определения, составленной из функций u класса $C^2(0, l) \cap C^1[0, l]$, удовлетворяющих условиям $\alpha_1 u(0) - \beta_1 u_x(0) = 0$ и $\alpha_2 u(l) + \beta_2 u_x(l) = 0$, называется **оператором**

Штурма — Лиувилля. Задача на собственные функции этого оператора называется **задачей Штурма — Лиувилля**. Здесь $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0$, $i = 1, 2$. Таким образом, задача Штурма — Лиувилля состоит в нахождении ненулевых функций, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{cases} -(pu_x)_x + qu = \lambda u, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u_x(0) = 0, \quad \alpha_2 u(l) + \beta_2 u_x(l) = 0. \end{cases}$$

Замечание. Обратим внимание на разные знаки в граничных условиях на левом и правом концах отрезка. Эти условия получены редукцией граничного условия задачи (3.13) общего вида. Производная по направлению внешней нормали в этом условии есть частная производная в точке l и минус частная производная в точке 0 . Это и приводит к разным знакам в граничных условиях.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{P}u = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$

в классе функций $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, $G \in \mathbb{R}^3$. Роль интегрирования по частям в трехмерном случае играет формула Остроградского — Гаусса. Так как

$$\operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) = v \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v,$$

то

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)v \, d\tau &= \int_G \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) \, d\tau - \int_G p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, d\tau = \\ &= \iint_S pv \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_G p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, d\tau = \iint_S pv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS - \int_G p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, d\tau. \end{aligned}$$

Формулу

$$\int_G \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)v \, d\tau = \iint_S pv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS - \int_G p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, d\tau$$

называют **первой формулой Грина**.

Поменяв в первой формуле Грина местами переменные u и v и взяв разность двух формул, получим формулу

$$\int_G (\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)v - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} v)u) \, d\tau = \iint_S p \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS,$$

которую называют **второй формулой Грина**.

Согласно второй формуле Грина,

$$(\mathcal{P}u, v) - (u, \mathcal{P}v) = \iint_S p \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS.$$

Если функции u и v удовлетворяют однородному граничному условию

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_S = 0, \quad (3.16)$$

то

$$u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \begin{vmatrix} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку граничное условие можно трактовать как условие пропорциональности строк определителя.

Таким образом, оператор \mathcal{P} с областью определения, которая составлена из функций класса $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющих граничному условию (3.16), является самосопряженным.

Из первой формулы Грина также следует, что

$$(\mathcal{P}u, u) = - \int_G \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) v \, d\tau + \int_G qu^2 \, d\tau = - \int_S \int pu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS + \int_G p(\operatorname{grad} u)^2 \, d\tau + \int_G qu^2 \, d\tau.$$

Если функция u удовлетворяет однородным граничным условиям I или II рода, то

$$- \int_S \int pu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS = 0,$$

так что в этом случае

$$(\mathcal{P}u, u) = \int_G p(\operatorname{grad} u)^2 \, d\tau + \int_G qu^2 \, d\tau \geq 0,$$

причем $(\mathcal{P}u, u) = 0$ при $u \neq 0$ возможно лишь в случае $q \equiv 0$ и граничных условий II рода; тогда равенство будет выполняться для постоянных функций u .

Предположим, выполняются условия (3.16), где $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$. Тогда на границе S области

$$(\alpha + \beta)u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \alpha u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\beta \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 - \alpha u^2.$$

Следовательно,

$$- \int_S \int pu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \int_S \int \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 \, dS + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \int_S \int u^2 \, dS \geq 0$$

и $(\mathcal{P}u, u) \geq 0$, причем $(\mathcal{P}u, u) = 0$ лишь при условиях

$$\int_G p(\operatorname{grad} u)^2 \, d\tau = 0, \quad \int_G qu^2 \, d\tau = 0, \quad \int_S \int \left(\beta \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 + \alpha u^2 \right) \, dS = 0.$$

Опуская математические нюансы, связанные с попеременным обращением в нуль в парах p и q , α и β , заключаем, что условие $(\mathcal{P}u, u) = 0$ возможно для ненулевой функции только лишь при $q \equiv 0$ и $\alpha \equiv 0$, т.е. лишь для частного случая оператора \mathcal{P} ($q = 0$) с граничными условиями II рода. При этом функция u , для которой $(\mathcal{P}u, u) = 0$, оказывается постоянной.

Условие $(\mathcal{P}u, u) > 0$ при $u \neq 0$ означает, что все собственные значения положительны. Действительно, если $\mathcal{P}v = \lambda v$, то из условия $(\mathcal{P}u, u) > 0$ заключаем, что $\lambda(v, v) > 0$ и $\lambda > 0$. Если же $(\mathcal{P}u, u) = 0$ для некоторого $u \neq 0$, то u — собственная функция, отвечающая собственному значению 0. Такие, если есть, образуют одномерное подпространство (постоянные функции все кратны функции $u \equiv 1$). Следовательно, $\lambda = 0$ может быть собственным значением, но лишь при $q = 0, \alpha = 0$ и в этом случае оно простое.

3.6. Метод Фурье

Метод Фурье — исходные требования: а) разделение области по переменным; б) разделение оператора; в) условие самосопряженности.

Рассмотренный в разд. 3.1 пример относится к сфере общего метода решения краевых задач, основанного на операторном подходе к ним. Отметим, что в этом примере переменные t

и x варьируются в независимых пределах (именно это позволило рассматривать решения вида $T(t)X(x)$). Кроме того, последовательность функций $X_n(x)$ оказалась ортогональной, что позволило получить формулы вычисления коэффициентов. Эта последовательность возникает как последовательность собственных функций некоторого линейного оператора.

Сформулируем общие принципы метода решения, называемого **методом Фурье**, или **методом разделения переменных**. Запишем задачу в общем виде $Lu = f$, $x \in \Omega$. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) область Ω задачи можно представить в виде декартова произведения $\Omega = \Omega_y \times \Omega_z$, где y и z — две составляющие вектора x , т.е. $x = (y, z)$;
- 2) линейный оператор L можно представить в виде суммы $L = L_y + L_z$, где оператор L_y связан с дифференцированием только по переменным группы y , а оператор — группы z ;
- 3) оператор L_z является самосопряженным при соответствующем выборе его области определения (множество функций, определенных на Ω_z и удовлетворяющих однородным граничным условиям);
- 4) ортогональная система $\{Z_n\}$ собственных функций оператора L_z является полной.

При этих условиях решение $u(y, z)$ рассматриваемой задачи можно разложить в ряд Фурье по полной ортогональной системе $\{Z_n\}$:

$$u(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) Z_n(z).$$

Здесь группа переменных y рассматривается как группа фиксированных параметров, а функция $u(y, z)$ при фиксированных параметрах y — как функция группы переменных z . Возможность такого представления вытекает из полноты системы собственных функций. Функции $Y_n(y)$ играют роль такого разложения и подлежат определению. Умножим дифференциальное уравнение скалярно на собственную функцию $Z_n(z)$:

$$(L_y u, Z_n) + (L_z u, Z_n) = (f, Z_n).$$

Предположим, что оператор L_y коммутирует со скалярным произведением (это дифференцирование собственного интеграла по параметру). Кроме того, учтем, что L_z самосопряженный:

$$L_y(u, Z_n) + (u, L_z Z_n) = (f, Z_n)$$

Но $L_z Z_n = \lambda_n Z_n$, так как Z_n — собственная функция для L_z . Поэтому

$$L_y(u, Z_n) + \lambda_n(u, Z_n) = (f, Z_n).$$

Обозначив $(u, Z_n) = Y_n$, $(f, Z_n) = f_n$, для каждого индекса n получим операторное (т.е. дифференциальное) уравнение

$$L_y Y_n + \lambda_n Y_n = f_n$$

Таким образом, исходная задача размерности $m_y + m_z$ (m_y — размерность Ω_y , m_z — размерность Ω_z) свелась к серии задач меньшей размерности m_y . Каждая такая задача позволяет найти один коэффициент разложения решения в ряд Фурье. Найдя все коэффициенты, найдем и решение задачи.

Пример 3.4. Рассмотрим краевую задачу (см. (3.1))

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x); \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

В данном случае

$$Lu = u_{tt} - a^2 u_{xx}.$$

Можно выделить $L_t u = u_{tt}$ — дифференцирование по переменное t , а также $L_x = -u_{xx}$ — дифференцирование по переменной x (коэффициент a^2 в данном случае не играет роли). Оператор L_x — частный случай оператора \mathcal{L} (3.14) при $p = 1$, $q = 0$. Он является самосопряженным, если его область определения функции класса $C^2([0, l])$, удовлетворяющие однородным граничным условиям. При этом он положительно определенный, т.е. его собственные числа все положительны. Решая задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} -u'' = \omega^2 u, \\ u(0) = 0, \quad u(l) = 0, \end{cases}$$

где $\omega^2 = \lambda$ — собственное значение, находим

$$X_n(x) = \sin \omega_n x, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Представим решение $u(t, x)$ в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Подставляем ряд в дифференциальное уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n''(x),$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \omega_n^2 X_n(x).$$

Получили два равных разложения по полной ортогональной системе. Следовательно, коэффициенты этих разложений одинаковы:

$$T_n''(t) = -a^2 \omega_n^2 T_n(t),$$

или

$$T_n''(t) + a^2 \omega_n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставим ряд в начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = \psi(x).$$

Следовательно, значения $T_n(0)$ и $T_n'(0)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т.е.

$$T_n(0) = \varphi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{\|X_n\|^2}, \quad T_n'(0) = \psi_n = \frac{(\psi, X_n)}{\|X_n\|^2}.$$

В результате для коэффициентов $T_n(t)$ нашего ряда получили задачу

$$\begin{cases} T_n'' + a^2 \omega_n^2 T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \quad T_n'(0) = \psi_n. \end{cases}$$

Это задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, причем линейного с постоянными коэффициентами. Ее решение находим стандартными методами:

$$T_n(t) = \varphi_n \cos a\omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin a\omega_n t.$$

В итоге

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos a\omega_n t + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin a\omega_n t \right) \cos \omega_n x,$$

или с учетом выражения для ω_n

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{an\pi t}{l} + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Осталось заменить коэффициенты φ_n и ψ_n разложения функций из начальных условий.

Замечание 3.4. Использованная в примере подстановка ряда в дифференциальное уравнение и начальные условия формально не обоснована, но этот прием приводит к тем же результатам, что и скалярное умножение, показанное в общей схеме. При этом манипулирование рядом технически несколько проще.

Замечание 3.5. Простейшая задача Штурма — Лиувилля (т.е. при $p = 1$, $q = 0$) может иметь девять модификаций в зависимости от используемых на концах отрезка граничных условий. Эти модификации удобно обозначать парой родов граничных условий. Например, II-I обозначает вариант, в котором на левом конце установлено условие II рода, а на правом — условие I рода. Из девяти модификаций выделим четыре с условиями только I и II рода. Для этих четырех модификаций легко записать систему собственных функций, руководствуясь следующими правилами:

- а) если на левом конце условие I рода, то это синусы, иначе косинусы;
- б) если условия на двух концах одинаковые, то это функции кратных углов, иначе полукратных углов.

Например, для задачи типа II-I имеет косинусы полукратных углов $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а для задачи II-II — косинусы кратных углов $\cos \frac{n\pi x}{l}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Кроме того, следует иметь в виду, что косинусы кратных углов начинаются с $n = 0$ (постоянная функция), а синусы — с $n = 1$.

4. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

4.1. Задача Штурма — Лиувилля для круга

Ставим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}\Delta u &= \lambda u, \quad x \in D; \\ u|_{\Gamma} &= 0,\end{aligned}$$

где D — круг $x^2 + y^2 < r_0^2$, а Γ — его граница.

В полярных координатах эта задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= \lambda u, \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad r < r_0; \\ u|_{r=r_0} &= 0.\end{aligned}$$

Решения будем искать в виде $u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$. Тогда дифференциальное уравнение трансформируется следующим образом:

$$r(rR')'\Phi + R\Phi'' = \lambda r^2 R\Phi,$$

или, после деления на $R\Phi$:

$$\frac{r(rR)'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda r^2.$$

Выделяются уравнения

$$\Phi'' - \lambda_1 \Phi = 0, \quad r(rR)' - (\lambda r^2 - \lambda_1)R = 0.$$

Для первого уравнения следует искать периодические решения с периодом 2π . В результате находим последовательность функций

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}, \quad \Phi_n^{(c)}(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \Phi_n^{(s)}(\varphi) = \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

для которых

$$\lambda_{1,n} = -n^2.$$

С учетом этих решений для второго уравнения получаем

$$r^2 R'' + rR' - (\lambda r^2 + n^2)R = 0.$$

Поскольку оператор $-\Delta$ положительно определенный, заключаем, что $\lambda < 0$, так что можем положить $\lambda = -\omega^2$. Тогда уравнение можно записать следующим образом:

$$r^2 R'' + rR' + (\omega^2 r^2 - n^2)R = 0. \quad (4.1)$$

В уравнении (4.1) заменим независимую переменную $\omega r = t$. Получим

$$t^2 R_t'' + tR_t' + (t^2 - n^2)R = 0. \quad (4.2)$$

В уравнении (4.2) точка $t = 0$ особая. Это означает, что в этой точке некоторые решения могут быть не определены. Для рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля функция $R(t) = R(\omega r)$ должна быть, по крайней мере, ограниченной при $t \rightarrow 0$. Если $J_n(t)$ — такое решение (4.2), то мы получаем функцию вида $R(r) = J_n(\omega r)$, причем должно выполняться условие $J_n(\omega r_0) = 0$, т.е. число ωr_0 должно быть нулем функции $J_n(t)$. Обозначив μ_{nk} последовательность нулей $J_n(t)$ (сколько их, мы пока не знаем), получим систему решений рассматриваемой задачи Штурма — Лиувилля вида

$$u_{0m}(r, \varphi) = \frac{1}{2} J_0\left(\frac{\mu_{0k} r}{r_0}\right), \quad u_{nm}^{(c)}(r, \varphi) = J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{r_0}\right) \cos n\varphi, \quad u_{nm}^{(s)}(r, \varphi) = J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{r_0}\right) \sin n\varphi.$$

4.2. Уравнение Бесселя

Уравнением Бесселя называют уравнение

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0. \quad (4.3)$$

Это однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Отметим, что при $t = 0$ для этого уравнения нарушаются условия существования и единственности решения задачи Коши, т.е. точка $t = 0$ для уравнения является особой.

Из теории дифференциальных уравнений следует, что общее решение уравнения (4.3) записывается в виде

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $y_1(t)$, $y_2(t)$ — фундаментальная система решений уравнения.

В качестве $y_1(t)$ и $y_2(t)$ можно выбрать любую пару линейно независимых решений уравнения (4.3). Линейную независимость функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ можно проверять с помощью определителя Вронского

$$W[y_1; y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что для любых двух решений линейного дифференциального уравнения 2-го порядка определитель Вронского либо тождественно нулевой (и тогда функции линейно зависимы), либо нигде не обращается в нуль (и тогда функции линейно независимы).

Теорема 4.1. Для любых решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения (4.3)

$$W[y_1; y_2](t) = \frac{C}{t}, \quad C = \text{const}. \quad (4.4)$$

◀ Отметим, что

$$W'[y_1; y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1'(t) & y_2'(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) \end{vmatrix}.$$

Согласно условиям теоремы

$$t^2 y_1'' + ty_1' + (t^2 - \nu^2)y_1 = 0, \quad t^2 y_2'' + ty_2' + (t^2 - \nu^2)y_2 = 0.$$

Вычтем из первого уравнения, умноженного на $y_2(t)$, второе, умноженное на $y_1(t)$:

$$t^2(y_1''y_2 - y_2''y_1) + t(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0,$$

или

$$-t^2 W'[y_1; y_2] - tW[y_1; y_2] = 0.$$

Решая уравнение $tW' + W = 0$, получаем соотношение (4.4). ▶

Наша задача — найти фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. К сожалению, решения уравнения Бесселя (за некоторым исключением) не являются элементарными функциями. Это заметно усложняет анализ таких функций.

4.3. Функции Бесселя

Решение уравнения Бесселя можно искать в виде «почти степенного» ряда

$$J(x) = t^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Полагая, что этот ряд сходится в некоторой окрестности нуля, можем его дифференцировать любое число раз.

Подставив ряд в дифференциальное уравнение, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1)t^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)t^{n+s} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}t^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n t^{n+s} = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+s)^2 - \nu^2) a_n + a_{n-2} t^{n+s} = 0,$$

где для удобства введены коэффициенты $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$. Приравнивая нулю коэффициенты полученного ряда получим

$$(s^2 - \nu^2)a_0 = 0, \quad ((1+s)^2 - \nu^2)a_1 = 0, \quad ((n+s)^2 - \nu^2)a_n = -a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

Из первого уравнения (4.5) заключаем, что $s = \nu$ (или $s = -\nu$, что можно рассматривать как случай $s = \nu$ для отрицательного ν). Если ν не является целым отрицательным, далее находим

$$a_{2k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{4k(k+\nu)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Четные коэффициенты можно записать, используя гамма-функцию Эйлера.

Замечание. Интеграл

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

сходится при любом комплекснозначном s с $\operatorname{Re} s > 0$. Он определяет функцию $\Gamma(s)$, называемую **гамма-функцией Эйлера**. Эта функция требует отдельного рассмотрения. Здесь же отметим три важных свойства этой функции.

1. Имеет место функциональное соотношение $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Это свойство позволяет доопределить гамма-функцию при $\operatorname{Re} s \leq 0$.

2. $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Свойство 1 позволяет доопределить гамма-функцию при $\operatorname{Re} s \leq 0$. Доопределенная функция $\Gamma(s)$ аналитична в \mathbb{C} всюду, кроме точек $z = -n$, $n = 0, 1, \dots$, в которых она имеет простые полюса с вычетами $\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

4. Также верно другое функциональное соотношение: $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$. Из него, в частности, вытекает, что $\Gamma(s)$ в комплексной плоскости не имеет нулей. Таким образом, функция $1/\Gamma(s)$ является целой аналитической с нулями в точках $z = -n$, $n = 0, 1, \dots$

С помощью гамма-функции коэффициенты степенного ряда можно записать следующим образом:

$$a_{2k} = \frac{a_0}{4^k \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}.$$

Выбирая соответствующим образом значение a_0 , запишем решение уравнения Бесселя в виде

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (4.6)$$

Ряд (4.6) получен в предположении, что ν не является целым отрицательным. Если $\nu = -m$ и $s = \nu$, то при $n = -2m$ из (4.5) получаем уравнение $0 = a_{2m-2}$, откуда $a_0 = a_2 = \dots = a_{2m-2} = 0$. В результате (при соответствующем выборе a_{2m}) получаем ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m},$$

который можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m} = (-1)^m J_m(t).$$

Отметим, что ряд (4.6) при $\nu = -m$ с учетом нулей функции $1/\Gamma(s)$ в точках $s = 0, -1, \dots$ приводит к тому же соотношению:

$$J_{-m}(t) = (-1)^m J_m(t).$$

Функция $J_\nu(t)$, определяемая соотношением (4.6), называется **функцией Бесселя порядка ν** (также **цилиндрической функцией I рода**).

Теорема 4.2. Для любого значения ν

$$W[J_\nu; J_{-\nu}](t) = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi t}. \quad (4.7)$$

◀ Утверждение теоремы является уточнением равенства (4.4), а именно, установлением конкретного вида константы C . Ее можно вычислить как предел $\lim_{t \rightarrow 0} tW[J_\nu; J_{-\nu}](t)$, оценивая главные части функций J_ν , $J_{-\nu}$ и их производных.

Имеем

$$J_\nu(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu, \quad J_{-\nu}(t) \sim \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu},$$

$$J'_\nu(t) \sim \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2\Gamma(\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-1}, \quad J'_{-\nu}(t) \sim -\frac{\nu}{2\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu-1} = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu-1}.$$

Отсюда

$$W[J_\nu; J_{-\nu}](t) \sim \left(\frac{1}{2\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{2\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu)} \right) \frac{2}{t} = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi t}.$$

Следовательно,

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} tW[J_\nu; J_{-\nu}](t) = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi}$$

и мы получаем (4.7). ▶

Из доказанной теоремы вытекает, что при нецелом ν функции J_ν и $J_{-\nu}$ составляют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. При целом ν эта идиллия нарушается. Рассмотрим функцию

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(t)}{\sin \pi \nu}.$$

Эта функция определена при нецелых ν . При этом следует отметить, что функции $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ являются аналитическими по параметру ν . Из этого следует, что существует предел $\lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(t)$, так что функция $Y_\nu(t)$ может быть доопределена по непрерывности для целых значений ν . Доопределенная функция является решением уравнения Бесселя соответствующего порядка. Вычислим определитель Вронского для пары функций $J_\nu(t)$ и $Y_\nu(t)$:

$$W[J_\nu; Y_\nu](t) = w \left[J_\nu; \frac{J_\nu \cos \pi\nu - J_{-\nu}}{\sin \pi\nu} \right] (t) = -\frac{1}{\sin \pi\nu} W[J_\nu; J_{-\nu}](t) = \frac{2}{\pi t}.$$

Видно, что функции J_ν и Y_ν составляют фундаментальную систему решений при любом значении параметра ν .

Функция $Y_\nu(t)$ называется **функцией Неймана** или **цилиндрической функцией II рода**.

Отметим, что функции Неймана не являются ограниченными в нуле. Для нецелых значений это вытекает из оценки $J_{-\nu}(t) \sim t^{-\nu}$ при $t \rightarrow 0$. Для целых значений ν это можно доказать путем предельного перехода по ν .

Условие неограниченности функций Неймана означает, что для собственных функций оператора Лапласа в круге можно использовать только функции I рода, ограниченные в нуле.

4.4. Свойства функций Бесселя

Теорема 4.3. Для функций Бесселя верны следующие формулы:

$$(t^\nu J_\nu(t))' = t^\nu J_{\nu-1}(t), \quad (t^{-\nu} J_\nu(t))' = -t^{-\nu} J_{\nu+1}(t). \quad (4.8)$$

◀ Доказательство основано на почленном дифференцировании степенного ряда. Так как

$$t^\nu J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} t^{2k+2\nu},$$

то

$$(t^\nu J_\nu(t))' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2(k+\nu)}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} t^{2k+2\nu-1} = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu)} t^{2k+\nu-1}.$$

Видно, что ряд в правой части равенства представляет собой функцию $J_{\nu-1}(t)$, т.е. первое равенство (4.8) верно.

Второе равенство (4.8) доказывается аналогично. ▶

Следствие 4.1. Для функций Бесселя верны следующие формулы дифференцирования:

$$J'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t} J_\nu(t), \quad J'_\nu(t) = -J_{\nu+1}(t) + \frac{\nu}{t} J_\nu(t). \quad (4.9)$$

◀ Раскрыв левые части формул (4.8), получим

$$\nu t^{\nu-1} J_\nu(t) + t^\nu J'_\nu(t) = t^\nu J_{\nu-1}(t), \quad -\nu t^{-\nu-1} J_\nu(t) + t^{-\nu} J'_\nu(t) = -t^{-\nu} J_{\nu+1}(t),$$

или

$$\frac{\nu}{t} J_\nu(t) + J'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t), \quad -\frac{\nu}{t} J_\nu(t) + J'_\nu(t) = -J_{\nu+1}(t).$$

Отсюда вытекают формулы (4.9). ▶

Следствие 4.2. Для функций Бесселя верны следующие формулы приведения:

$$J_{\nu-1}(t) - J_{\nu+1}(t) = 2J'_\nu(t), \quad J_{\nu-1}(t) + J_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t}J_\nu(t).$$

◀ Доказательство основано на сложении и вычитании равенств (4.9). ▶

Можно показать, что для функций Бесселя верна следующая асимптотическая формула:

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\cos\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right).$$

Из этой формулы, в частности, вытекает, что функция $J_\nu(t)$ имеет бесконечно много нулей $\mu_{\nu m}$, последовательность которых стремится к ∞ , причем с ростом t нули все более приближаются к нулям косинуса $\cos\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. Значит, оператор Лапласа имеет бесконечный набор собственных функций $F_{nm}(r, \varphi)$ вида

$$J_0\left(\frac{\mu_{0m}r}{r_0}\right), \quad J_n\left(\frac{\mu_{nm}r}{r_0}\right) \cos n\varphi, \quad J_n\left(\frac{\mu_{nm}r}{r_0}\right) \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Из общей теории линейных операторов можно заключить, что представленная система собственных функций является ортогональной и замкнутой. Ортогональность $F_{n_1m_1}$ и $F_{n_2m_2}$ при разных n_1 и n_2 — довольно очевидный факт, поскольку, например

$$\iint_{r \leq r_0} F_{n_1m_1}(r, \varphi) F_{n_2m_2}(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos n_1\varphi \cos n_2\varphi d\varphi \int_0^{r_0} J_{n_1}\left(\frac{\mu_{n_1m_1}r}{r_0}\right) \left(\frac{\mu_{n_2m_2}r}{r_0}\right) r dr = 0$$

из-за первого интеграла. При $n_1 = n_2 = n$ ортогональность, являющаяся следствием самосопряженности оператора Лапласа, не настолько очевидна и сводится к соотношению

$$\int_0^{r_0} J_n\left(\frac{\mu_{nm_1}r}{r_0}\right) J_n\left(\frac{\mu_{nm_2}r}{r_0}\right) r dr = 0.$$

Теорема 4.4. Для любого $\nu > 0$ и любых корней μ_1, μ_2 функции $J_\nu(t)$ верно равенство

$$\int_0^L J_\nu\left(\frac{\mu_1 t}{L}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_2 t}{L}\right) t dt = 0. \quad (4.10)$$

◀ Заменой переменных равенство (4.10) можно свести к случаю $L = 1$. На этом случае и остановимся. Функции $y_1(t) = J_\nu(\mu_1 t)$ $y_2(t) = J_\nu(\mu_2 t)$ являются решениями уравнений

$$t^2 y_1'' + t y_1' + (\mu_1^2 t^2 - \nu^2) y_1 = 0, \quad t^2 y_2'' + t y_2' + (\mu_2^2 t^2 - \nu^2) y_2 = 0.$$

Умножим первое уравнение на y_2 , второе на y_1 и вычтем из второго уравнения первое:

$$t^2 W[y_1; y_2]'(t) + t W[y_1; y_2](t) + (\mu_2^2 - \mu_1^2) t^2 y_1(t) y_2(t) = 0.$$

После деления на t получаем:

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2) y_1(t) y_2(t) t = (t W[y_1; y_2](t))'.$$

Проинтегрируем:

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2) \int_0^1 y_1(t) y_2(t) t dt = t W[y_1; y_2](t) \Big|_0^1.$$

Отметим, что $tW[y_1; y_2](t)$ при $t = 0$ равен нулю (минимальная степень y_1 и y_2 в нуле равна ν , а минимальная степень их производных равна $\nu - 1$; при умножении на t получаем $2\nu > 0$; при $\nu = 0$ функции y_1, y_2 , а значит и W в нуле аналитические). Поэтому

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2) \int_0^1 y_1(t) y_2(t) t dt = W[y_1; y_2](1). \quad (4.11)$$

Если μ_1 и μ_2 — нули функции Бесселя, то $y_1(1) = y_2(1) = 0$. Следовательно,

$$W[y_1; y_2](1) = \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

и равенство (4.10) для $L = 1$ доказано. ►

Равенство (4.10) известно как **свойство ортогональности функций Бесселя**.

Замечание. Равенство (4.10) остается верным, если μ_1, μ_2 — нули функции $J'_\nu(t)$. В этом случае $y_1'(1) = y_2'(1) = 0$. Этот случай соответствует ортогональности соответствующих собственных функций при граничных условиях II рода. Однородные граничные условия III рода означают, что строки определителя (4.12) пропорциональны, так что и в этом случае свойство ортогональности имеет место.

Отметим, что равенство (4.11) доказано для любых значений μ_1, μ_2 , не обязательно являющихся нулями функции Бесселя. С помощью предельного перехода можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.5. Если μ_0 — нуль функции $J_\nu(t)$, то

$$\int_0^L J_\nu\left(\frac{\mu_0 t}{L}\right)^2 t dt = \frac{L^2}{2} (J'_\nu(\mu_0))^2 = \frac{L^2}{2} (J_{\nu+1}(\mu_0))^2.$$

◀ Два варианта представления вытекают из формул дифференцирования, нам достаточно установить один из них. Остановимся на случае $L = 1$.

Согласно (4.11), с учетом значений y_1 и y_2 (в данном случае $y_1(t) = J_\nu(\mu t)$, $y_2(t) = J_\nu(\mu_0 t)$ и $y_2(1) = J_\nu(\mu_0) = 0$) для любого значения μ имеем

$$\int_0^1 J_\nu(\mu t) J_\nu(\mu_0 t) t dt = \frac{\mu_0 J_\nu(\mu) J'_\nu(\mu_0)}{\mu^2 - \mu_0^2}.$$

Переходя к пределу при $\mu \rightarrow \mu_0$, получаем

$$\int_0^1 J_\nu(\mu_0 t)^2 t dt = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{\mu_0 J_\nu(\mu) J'_\nu(\mu_0)}{\mu^2 - \mu_0^2} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{\mu_0 J'_\nu(\mu) J'_\nu(\mu_0)}{2\mu} = \frac{(J'_\nu(\mu_0))^2}{2}.$$

Общий случай сводится к доказанному частному случаю $L = 1$ заменой переменных $\frac{t}{L} \rightarrow t$. ►

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Специальные функции — класс функций, не являющихся элементарными, которые вошли в математический обиход в связи с исследованиями дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. Все подобные функции можно описать обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\sigma(t)y'' + \tau(t)y' + \lambda y = 0,$$

где σ и τ — многочлены соответственно 2-й и 1-й степени. Указанное уравнение называют **уравнением гипергеометрического типа**.

Отметим, что уравнение Бесселя является частным случаем уравнения гипергеометрического типа, так что функции Бесселя по праву принадлежат к специальным.

Мы рассмотрим только отдельные виды специальных функций, связанных с решением простейших задач математической физики.

5.1. Гамма-функция

Гамма-функцией Эйлера (или просто гамма-функцией) называют функцию

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx. \quad (5.1)$$

Интеграл справа сходится при любом действительном $s > 0$, а фактически и при любом комплексном s в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. При этом несложно показать, используя стандартные правила дифференцирования интеграла по параметру, что $\Gamma(s)$ — аналитическая функция в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$.

Простейшее функциональное соотношение, связанное с гамма-функцией, можно получить интегрированием по частям:

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = -x^s e^{-x} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Доказанное равенство означает, что

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \quad (5.2)$$

Нетрудно установить, что $\Gamma(1) = 1$. Отсюда

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2, \quad \dots, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

Отсюда понятно, почему гамма-функцию иногда называют факториалом действительного аргумента.

Из формулы (5.2) возникает продолжение гамма-функции на левую полуплоскость. Действительно,

$$\Gamma(s+k+1) = (s+k)(s+k-1)(s+k-2) \dots s\Gamma(s),$$

откуда

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{(s+k)(s+k-1)\dots s}. \quad (5.3)$$

Из формулы (5.3) вытекает, что в точках $z = 0, -1, -2, \dots$ гамма-функция имеет простые полюса. Выбрав $k = n$, в окрестности $s = -n$ получим

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n)(s+n-1)\dots s}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n-1)\dots s} \Big|_{s=-n} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\dots(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Если же s не является нулем или целым отрицательным, то деления на нуль в формуле (5.3) не происходит и гамма-функция является аналитической.

Гамма-функция связана с другой специальной функцией, называемой бета-функцией. Рассмотрим интеграл

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} dx. \quad (5.4)$$

Этот интеграл, как и интеграл в правой части (5.1) являются частными случаями двойного интеграла

$$I(u, v) = \iint_{\substack{x>0 \\ y>0}} e^{-(x^2+y^2)} x^{2u-1} y^{2v-1} dx dy.$$

Действительно, интеграл распадается в произведение:

$$I(u, v) = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2u-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2v-1} dy.$$

После замен переменных $x^2 = \xi$, $y^2 = \eta$, приходим к формуле

$$I(u, v) = \frac{1}{4} \Gamma(u) \Gamma(v).$$

Указанный интеграл можно вычислить в полярных координатах:

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2u+2v-2} r dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi d\varphi \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{u+v-1} \rho d\rho = \frac{\Gamma(u+v)}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Оставшийся интеграл сводится к интегралу (5.4) заменой переменных $\cos^2 \varphi = t$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \varphi \sin^{2v-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt = \frac{1}{2} B(u, v).$$

Таким образом,

$$I(u, v) = \frac{1}{4} \Gamma(u+v) B(u, v)$$

и в результате приходим к формуле

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

Полагая $v = 1 - u$, находим

$$B(u, 1-u) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{-u} dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^u \frac{dx}{x} = \left| \frac{x}{1-x} = z \right| = \int_0^\infty \frac{z^{u-1}}{1+z} dz.$$

Последний интеграл можно использовать с помощью вычетов, составив контур из окружностей $|z| = r$, $|z| = R$ с разрезом по положительной части действительной оси. При обходе вокруг начала координат числитель $z^{u-1} = e^{(u-1)\ln z}$ получает приращение в показателе $2\pi(u-1)i$, так что подынтегральная функция умножается на $e^{2\pi ui}$. Значит, интеграл $I_{\text{н}}$ по нижнему берегу разреза связан с интегралом $I_{\text{в}}$ по верхнему берегу, с учетом направления обхода, соотношением $I_{\text{н}} = -e^{2\pi ui} I_{\text{в}}$. Интегралы по окружностям при $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Таким образом,

$$(1 - e^{2\pi ui}) \int_0^\infty \frac{z^{u-1}}{1+z} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} \frac{z^{u-1}}{1+z} = 2\pi i e^{(u-1)\pi i}.$$

Но

$$\frac{2\pi i e^{(u-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi ui}} = -\frac{2\pi i e^{\pi ui}}{1 - e^{2\pi ui}} = -\frac{2\pi i}{e^{-\pi ui} - e^{\pi ui}} = \frac{\pi}{\sin \pi u}.$$

Следовательно,

$$B(u, 1-u) = \frac{\pi}{\sin \pi u}.$$

С учетом связи гамма- и бета-функций

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

5.2. Задача Штурма — Лиувилля для шара

Рассмотрим задачу на собственные функции

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, & u \in G; \\ u|_{\partial G} = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

где G — шар радиуса r_0 .

Запишем оператор Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right). \quad (5.6)$$

Сферические координаты выбраны потому, что при перемещении по шару эти координаты изменяются по независимым диапазонам. При этом, как свидетельствует запись оператора Лапласа в сферических координатах, он распадается на слагаемые по переменным.

Решение задачи на собственные значения будет искать в виде $u = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$. Подставив в уравнение, получим

$$\frac{1}{r^2} (r^2 R')' \Theta \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} R (\sin \vartheta \Theta')' \Phi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} R \Theta \Phi'' = \lambda R \Theta \Phi.$$

Делим уравнение на $R\Theta\Phi$ и умножаем на $r^2 \sin^2 \vartheta$:

$$\sin^2 \vartheta \frac{(r^2 R)'}{R} + \sin \vartheta \frac{(\sin \vartheta \Theta)'}{\Theta} + \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda r^2 \sin^2 \vartheta.$$

Получили, что сумма трех функций от разных аргументов есть постоянная. Но при этом третье слагаемое зависит лишь от φ , а остальные от ϑ не зависят. Поэтому $\Phi''/\Phi = \text{const}$, т.е. Φ является собственной функцией оператора двойного дифференцирования. Еще из анализа задачи Штурма — Лиувилля для круга мы знаем, что такие функции имеют вид

$$\Phi_n^c(\varphi) = \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, \dots; \quad \Phi_n^s(\varphi) = \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

При этом

$$\frac{(\Phi_n^c)''}{\Phi_n^c} = \frac{(\Phi_n^s)''}{\Phi_n^s} = -n^2.$$

С учетом этого получаем:

$$\sin^2 \vartheta \frac{(r^2 R)'}{R} + \sin \vartheta \frac{(\sin \vartheta \Theta)'}{\Theta} = \lambda r^2 \sin^2 \vartheta + n^2.$$

Разделим на $\sin^2 \vartheta$ и соответствующим образом сгруппируем слагаемые:

$$\frac{(r^2 R)'}{R} - \lambda r^2 + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{(\sin \vartheta \Theta)'}{\Theta} - \frac{n^2}{\sin^2 \vartheta} = 0.$$

Опять переменные разделились. Для Θ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{(\sin \vartheta \Theta)'}{\Theta} - \frac{n^2}{\sin^2 \vartheta} = \mu = \text{const},$$

откуда

$$\sin \vartheta (\sin \vartheta \Theta)' - (n^2 + \mu \sin^2 \vartheta) \Theta = 0.$$

Выполним замену переменной $\cos \vartheta = t$. Тогда $\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} = (t^2 - 1) \frac{\partial}{\partial t}$, так что уравнение примет следующий вид:

$$(1 - t^2) \Theta'' - 2t \Theta' - \left(\frac{n^2}{1 - t^2} + \mu \right) \Theta = 0. \quad (5.7)$$

Здесь параметр n определяется выбором функции от φ , а параметр μ должен быть выбран так, чтобы уравнение имело решение, ограниченное при $t \rightarrow \pm 1$.

Отметим, что для любых двух решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения (5.7) для определителя Вронского верно соотношение

$$W[y_1; y_2](t) = \frac{C}{1 - t^2}$$

(оно получается так же, как и соотношение (4.4) для уравнения Бесселя). Из этого соотношения вытекает, что хотя бы одно решение уравнения является неограниченным в точках -1 и 1 .

Теорема 5.1. Уравнение (5.7) имеет ограниченное решение тогда и только тогда, когда $\mu = -m(m + 1)$, $m = 0, 1, \dots$ #

Рассмотрение уравнения (5.7) начнем с частного случая $n = 0$, $\mu = -m(m + 1)$.

5.3. Уравнение Лежандра

Уравнение

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' - \mu y = 0 \quad (5.8)$$

называется **уравнением Лежандра**.

Это уравнение с точки зрения собственных функций оператора Лапласа в шаре следует рассматривать при $\mu < 0$, так что естественно положить $\mu = -\nu^2$.

Решение уравнения Лежандра можно искать в виде степенного ряда $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Подставив ряд в дифференциальное уравнение, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n + \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0,$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n+1) - \nu^2)a_n] t^n = 0.$$

Из равенства нулю степенного ряда заключаем, что равны нулю все его коэффициенты:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n+1) - \nu^2)a_n,$$

т.е.

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \nu^2}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.9)$$

Соотношение (5.9) определяет две последовательности коэффициентов: четные и нечетные. Эти последовательности отвечают двум независимым решениям, первое соответствует $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, второе $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Можно показать, что оба решения неограничены при $t \rightarrow 1$ за единственным исключением $\nu^2 = m(m+1)$ для некоторого целого числа m . В этом случае $a_{m+2} = 0$ и далее все коэффициенты тоже обнуляются, решением уравнения Лежандра оказывается многочлен. Из этого следует, что при значениях $m(m+1)$, и только при них, уравнение Лежандра имеет ограниченное решение.

Теорема 5.2. При $\mu = -m(m+1)$ уравнение Лежандра имеет ограниченное решение, являющееся полиномом. Это решение может быть представлено в виде

$$P_m(t) = C \frac{d^m}{dt^m} [(t^2 - 1)^m].$$

◀ Доказательство можно провести прямой проверкой. Для упрощения выкладок используем специальный прием. Дифференцируя $z(t) = (t^2 - 1)^m$ и умножая на $t^2 - 1$, получаем

$$(t^2 - 1)z' = 2mt(t^2 - 1)^m = 2mtz.$$

Дифференцируя равенство $(t^2 - 1)z' = 2mtz$ с использованием формулы бинома Ньютона m раз, находим

$$(t^2 - 1)z^{(m+1)} + 2mtz^{(m)} + m(m-1)z^{(m-1)} = 2mtz^{(m)} + 2m^2z^{(m-1)},$$

или

$$(t^2 - 1)z^{(m+1)} - m(m+1)z^{(m-1)} = 0.$$

Продифференцируем еще раз:

$$(t^2 - 1)z^{(m+2)} + 2tz^{(m+1)} - m(m+1)z^{(m)} = 0.$$

Полученное уравнение означает, что функция $z^{(m)}$ является решением уравнения Лежандра. ►

Решение уравнения Лежандра определяется с точностью до числового множителя. Полагая $C = \frac{1}{2^m m!}$, получим многочлен

$$P_m(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^m),$$

называемый **многочленом Лежандра**.

Многочлены Лежандра обладают следующим **свойством ортогональности**:

$$\int_{-1}^1 P_m(t) P_k(t) dt = 0, \quad m \neq k.$$

Это свойство вытекает из существа исходной задачи Штурма — Лиувилля, но может быть доказано непосредственно. Обозначим $Z_m(t) = (t^2 - 1)^m$. Тогда $P_m = C_m (Z_m)^{(m)}$ (аргументы функций для краткости опущены, нормирующий множитель обозначен через C_m). Используя интегрирование по частям и полагая, что $m < k$, находим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_m(t) P_k(t) dt &= C_m C_k \int_{-1}^1 (Z_m(t))^{(m)} (Z_k(t))^{(k)} dt = \\ &= C_m C_k (Z_m(t))^{(m)} (Z_k(t))^{(k-1)} \Big|_{-1}^1 - C_m C_k \int_{-1}^1 (Z_m(t))^{(m+1)} (Z_k(t))^{(k-1)} dt = \\ &= -C_m C_k \int_{-1}^1 (Z_m(t))^{(m+1)} (Z_k(t))^{(k-1)} dt, \end{aligned}$$

поскольку функция $(t^2 - 1)^k$ имеет в точках -1 и 1 нули кратности k , а значит, ее производные до порядка $k - 1$ включительно обращаются в этих точках в нуль. Повторяя процедуру многократно, получаем

$$\int_{-1}^1 P_m(t) P_k(t) dt = (-1)^{m+1} C_m C_k \int_{-1}^1 (Z_m(t))^{(2m+1)} (Z_k(t))^{(k-m-1)} dt = 0, \quad (5.10)$$

так как в интеграле справа левый множитель подынтегральной функции есть производная порядка $2m + 1$ от многочлена степени $2m$, т.е. нуль.

Итак, многочлены Лежандра в $L^2[-1, 1]$ образуют ортогональную систему. Ясно, что линейная оболочка полиномов Лежандра содержит все полиномы, а значит, ортогональная система полиномов Лежандра замкнута* в $L^2[-1, 1]$. Свойство ортогональности распространяется на любые решения уравнения Лежандра: если $y_\alpha(t)$ и $y_\beta(t)$ — решения уравнения (5.8), отвечающие разным значениям α и β параметра μ , то

$$\int_{-1}^1 y_\alpha(t) y_\beta(t) dt = 0$$

*Согласно одной из теорем Вейерштрасса, любая функция, непрерывная на отрезке, может быть приближена полиномами в равномерной норме, а следовательно, и в L^2 -норме. Отсюда следует, что полиномы всюду плотны в $L^2[-1, 1]$.

(доказать этот факт можно по той же схеме, что и в случае функций Бесселя).

Вычислим квадраты норм полиномов Лежандра в $L^2[-1, 1]$.

Теорема 5.3. Для полиномов Лежандра выполняется равенство

$$\|P_m\|^2 = \frac{2}{2m+1}.$$

◀ Имеем:

$$\int_{-1}^1 P_m^2(t) dt = (-1)^m C_m^2 \int_{-1}^1 (Z_m(t))^{(2m)} Z_m(t) dt.$$

(это аналогично (5.10) при $k = m$). Но

$$(Z_m(t))^{(2m)} = ((t^2 - 1)^m)^{(m)} = (t^{2m})^{(2m)} = (2m)!$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^1 P_m^2(t) dt = (-1)^m (2m)! C_m^2 \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^m dt = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^m dt.$$

Интеграл в правой части заменой переменных $\frac{1+t}{2} = s$ сводится к бета-функции:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^m dt &= 2^{2m+1} \int_0^1 s^m (1 - s)^m ds = \\ &= 2^{2m+1} B(m+1, m+1) = 2^{2m+1} \frac{(\Gamma(m+1))^2}{\Gamma(2m+2)} = 2^{2m+1} \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}. \end{aligned}$$

В конечном счете

$$\int_{-1}^1 P_m^2(t) dt = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \cdot 2^{2m+1} \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} = \frac{2}{2m+1}. \quad \blacktriangleright$$

5.4. Присоединенное уравнение Лежандра

Уравнение

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' - \left(\frac{n^2}{1 - t^2} + \mu\right)y = 0$$

называется **присоединенным уравнением Лежандра**. Здесь интересен случай $\mu = -\nu^2$.

Выполним в этом уравнении замену $y = (1 - t^2)^\alpha z$. Получим

$$(1 - t^2)z'' - 2(2\alpha + 1)tz' + (\nu^2 - 2\alpha - 4\alpha^2)z + \frac{4\alpha^2 - n^2}{1 - t^2}z = 0.$$

Выберем $a = n/2$. Тогда $4\alpha^2 - n^2 = 0$ и уравнение сводится к следующему:

$$(1 - t^2)z'' - 2(n+1)tz' + (\nu^2 - n - n^2)z = 0. \quad (5.11)$$

Получилось уравнение, похожее на уравнение Лежандра, но отличающееся коэффициентом при первой производной. Оказывается его можно свести к уравнению Лежандра. Действительно, продифференцируем уравнение Лежандра n раз (надо использовать формулу биннома Ньютона). Получим

$$(1 - t^2)y^{(n+2)} - 2(n+1)ty^{(n+1)} + (\nu^2 - (n(n+1)))y^{(n)} = 0.$$

Отсюда следует, что если $y(t)$ — решение уравнения Лежандра, то $y^{(n)}(t)$ — решение уравнения (5.11). В частности, n -я производная полинома Лежандра $P_m(t)$ порядка m является решением уравнения (5.11) с $\nu^2 = m(m+1)$. Поэтому среди решений присоединенного уравнения Лежандра с параметрами $\mu = -m(m+1)$ и n есть такое:

$$P_m^n(t) = (1 - t^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{dt^n} P_m(t).$$

Функции $P_m^n(t)$ называются **присоединенными функциями Лежандра**.

Присоединенные функции Лежандра при четном n являются полиномами. При нечетном n они представляют собой многочлен, умноженный на $\sqrt{1-t^2}$. Впрочем, если учесть, что к уравнениям Лежандра мы пришли в результате замены $\cos \vartheta = t$, то с присоединенными функциями Лежандра как функциями ϑ все в порядке: они оказываются многочленами от $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$. Отметим, что формально можно рассматривать функции $P_m^n(t)$ с параметрами $m < n$, но в этом случае $P_m^n(t) = 0$.

Теорема 5.4. Для любого натурального n функции $P_m^n(t)$, $m = n, n+1, n+2, \dots$, образуют полную ортогональную систему в $L^2[-1, 1]$. При этом

$$\|P_m^n\|^2 = \frac{2}{2m+1} \frac{(m+n)!}{(m-n)!}.$$

◀ Ортогональность этой системы вытекает из общих свойств собственных функций оператора Лапласа. Впрочем, этот факт можно установить и непосредственно, вычислив интеграл

$$(P_m^n, P_k^n) = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n ((t^2-1)^m)^{(m+n)} ((t^2-1)^k)^{(k+n)} dt,$$

который оказывается нулевым. Аналогичный интеграл

$$\|P_m^n\|^2 = (P_m^n, P_m^n) = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n ((t^2-1)^m)^{(m+n)} ((t^2-1)^m)^{(m+n)} dt$$

дает значение квадрата нормы присоединенных функций Лежандра.

Покажем, что для каждого n система присоединенных функций Лежандра в $L^2[-1, 1]$ замкнута, т.е. для любой функции $g \in L^2[-1, 1]$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую линейную комбинацию $\sum_{m=n}^N c_m P_m^n(t)$, что

$$\left\| g(t) - \sum_{m=n}^N c_m P_m^n(t) \right\| < \varepsilon.$$

Для каждой функции $g \in L^2[-1, 1]$ можно найти непрерывную функцию $G(t)$, такую, что

$$\left\| g(t) - (1-t^2)^{\frac{n}{2}} G(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция $G(t)$ может быть аппроксимирована в $L^2[-1, 1]$ полиномами (например, частичными суммами ряда по системе полиномов Лагранжа. Следовательно, существует полином $P(t)$, для которого

$$\|G(t) - P(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|(1-t^2)^{\frac{n}{2}}G(t) - (1-t^2)^{\frac{n}{2}}P(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последовательность полиномов $(P_m(t))^{(n)}$ позволяет выразить в виде линейной комбинации любой полином $P(t)$, т.е.

$$P(t) = \sum_{m=n}^N c_m (P_m(t))^{(n)}.$$

Отсюда

$$\left\| g(t) - \sum_{m=n}^N c_m P_m^n(t) \right\| \leq \|g(t) - (1-t^2)^{\frac{n}{2}}G(t)\| + \left\| (1-t^2)^{\frac{n}{2}}G(t) - \sum_{m=n}^N c_m P_m^n(t) \right\| < \varepsilon.$$

Так как система функций $P_m^n(t)$ замкнута, она полна, т.е. содержит все ограниченные решения присоединенного уравнения Лагранжа. ►

5.5. Шаровые и сферические функции

Вернемся к задаче определения собственных функций оператора Лапласа в шаре. Задача на собственные функции распалась на три уравнения:

по переменной φ

$$\Phi - \lambda_\varphi \Phi = 0, \quad \Phi(2\pi) = \Phi(0), \quad \Phi'(2\pi) = \Phi'(0);$$

решением которой является

$$\Phi_n^c(\varphi) = \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \Phi_n^s(\varphi) = \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

с собственными значениями $-n^2$;

по переменной ϑ для каждого значения $n = 0, 1, \dots$

$$\sin \vartheta (\sin \vartheta \Theta')' - (n^2 + \mu \sin^2 \vartheta) \Theta = 0,$$

что заменой переменного $\cos \vartheta = t$ (т.е. $\Theta(\vartheta) = y(\cos \vartheta) = y(t)$) сводится к присоединенному уравнению Лежандра

$$(1-t^2)y'' - 2ty' - \left(\frac{n^2}{1-t^2} + \mu\right)y = 0.$$

Его решения — присоединенные функции Лежандра $P_m^n(t)$ — дают решения уравнения по ϑ :

$$\Theta_{nm}(\vartheta) = P_m^n(\cos \vartheta), \quad m = n, n+1, \dots,$$

а соответствующие собственные значения равны $\mu_m = -m(m+1)$;

по переменной r для каждой пары значений n и m

$$\frac{(r^2 R')'}{R} - \lambda r^2 + \mu = 0,$$

или (с переобозначением $\lambda = -\omega^2$)

$$(r^2 R')' + (\omega^2 r^2 - m(m+1))R = 0. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12) после раскрытия скобок принимает следующий вид:

$$r^2 R'' + 2r R' + (\omega^2 r^2 - m(m+1))R = 0.$$

Это отличается от уравнения Бесселя лишь коэффициентом при первой производной. Выполним замену переменной $R = r^\alpha y$. Получим после сокращения на r^α :

$$r^2 y'' + 2(\alpha + 1)ry' + (\omega^2 r^2 - m(m+1) + \alpha(\alpha + 1))y = 0.$$

Положим $\alpha = -1/2$:

$$r^2 y'' + ry' + \left(\omega^2 r^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2\right)y = 0.$$

Это параметризованное уравнение Бесселя для полуцелых порядков. Его решением, ограниченным при $r \rightarrow 0$, является $y(r) = J_{m+1/2}(\omega r)$. Следовательно, решением уравнения (5.12) будет

$$R(r) = \frac{J_{m+1/2}}{\sqrt{r}}.$$

Функцию $R(r)$ нужно выбирать в соответствии с граничным условием поставленной задачи (5.5): $R(r_0) = 0$. В результате получаем $J_{m+1/2}(\omega r_0) = 0$. Обозначив $\mu_{m+1/2,k}$ нули функции Бесселя, получим решения

$$R_{nmk}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}\left(\frac{\mu_{m+1/2,k} r}{r_0}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Комбинируя найденные функции получаем:

1) собственные функции оператора Лапласа на сфере

$$\begin{aligned} Y_{nm}^c(\vartheta, \varphi) &= P_m^n(\cos \vartheta) \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, \dots, \\ Y_{nm}^s(\vartheta, \varphi) &= P_m^n(\cos \vartheta) \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

с собственными значениями $\lambda_{nm} = -m(m+1)$;

2) собственные функции оператора Лапласа в шаре

$$\begin{aligned} Z_{nmk}^c(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}\left(\frac{\mu_{m+1/2,k} r}{r_0}\right) P_m^n(\cos \vartheta) \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, \dots, \\ Z_{nmk}^s(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{r}} J_{m+1/2}\left(\frac{\mu_{m+1/2,k} r}{r_0}\right) P_m^n(\cos \vartheta) \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

с собственными значениями $\lambda_{nmk} = -\left(\frac{\mu_{m+1/2,k}}{r_0}\right)^2$.

5.6. Гармонические функции

Гармоническая функция — дважды непрерывно дифференцируемая в заданной области функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа.

Рассмотрим некоторые свойства гармонических функций.

Двумерный случай. В двумерном случае понятие гармонической функции тесно связано с понятием аналитической функции комплексного переменного.

Теорема 5.5. Функция u , дважды непрерывно дифференцируемая в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, является гармонической в этой области тогда и только тогда, когда она есть действительная часть некоторой аналитической в D функции комплексного переменного.

◀ Достаточность условия вытекает из теории функций комплексного переменного: в этой теории доказывается, что действительная и мнимая части аналитической функции бесконечно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению Лапласа, которое вытекает из условий Коши — Римана.

Необходимость условия вытекает из следующих соображений. Если f — гармоническая в области D функция, то функции $u = f_x$ и $v = -f_y$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши — Римана. Значит, функция $g = f_x - if_y$ аналитична в D . Поэтому ее действительная и мнимая части бесконечно дифференцируемы. Сама функция f является действительной частью соответствующей первообразной аналитической функции g . ►

Формулы Грина. Анализ гармонических функций использует некоторые формулы, вытекающие из формулы Остроградского — Гаусса.

Пусть функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы в области G , ограниченной кусочно-гладкой границей Γ . Тогда векторное поле $u \operatorname{grad} v$ непрерывно дифференцируемо и к нему можно применить формулу Остроградского — Гаусса:

$$\iint_{\Gamma} (u \operatorname{grad} v) \mathbf{n} \, dS = \iiint_G \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) \, dV$$

(здесь \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ). Непосредственный подсчет показывает, что

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \Delta v.$$

Кроме того,

$$(u \operatorname{grad} v) \mathbf{n} = u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}.$$

Таким образом, с учетом записанных соотношений получаем формулу

$$\iiint_G u \Delta v \, dV = - \iiint_G \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dV + \iint_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, dS, \quad (5.13)$$

которую называют **первой формулой Грина**.

Поменяв в формуле (5.13) функции u и v местами, запишем симметричную формулу:

$$\iiint_G v \Delta u \, dV = - \iiint_G \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dV + \iint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS. \quad (5.14)$$

Вычтя (5.14) из (5.13), придем к следующей формуле:

$$\iiint_G (u \Delta v - v \Delta u) \, dV = \iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS. \quad (5.15)$$

Ее называют **второй формулой Грина**.

Частные решения. Множество гармонических функций достаточно обширное. В нем можно выделить некоторые частные решения, которые можно записать с помощью элементарных функций.

Простейшие гармонические функции — линейные. Для этих функции любые частные производные порядка выше 1-го равны нулю. Чуть более широкий класс — функции полилинейные, т.е. линейные по кадой переменной. Примером такой функции является $u(x, y, z) = xyz$.

В практике решения задач для уравнения Лапласа в прямоугольнике методом Фурье возникают функции вида

$$u(x, y) = \cos \omega x \operatorname{ch} \omega y,$$

а также функции, получающиеся заменой одного или обоих косинусов соответствующим синусом (всего 4 варианта). Все они являются гармоническими функциями двух переменных. Их также можно рассматривать как функции трех переменных, и в этом случае они также гармонические.

Вдохновившись предыдущим примером, можно сконструировать функцию вида

$$u(x, y, z) = \cos \omega_1 x \cos \omega_2 y \operatorname{ch} \omega_3 z,$$

которая является гармонической. Непосредственный подсчет показывает, что условием гармоничности является

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_3^2.$$

Следует отметить гармонические функции, являющиеся многочленами. Например, гармоническими являются

$$x^2 - y^2, \quad x^3 - 3xy^2, \quad x^2 + y^2 - 2z^2.$$

Наконец, отметим решения, обладающие цилиндрической и сферической симметрией. В случае двух переменных запишем уравнений Лапласа в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Предположив, что функция u от полярного угла не зависит, получим уравнение

$$(ru')' = 0.$$

Его общим решением является

$$u = C_1 \ln \frac{1}{r} + C_2.$$

Отбросив очевидную константу, выделим решение

$$u_0 = \ln \frac{1}{r} = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

которое в дальнейшем будет играть важную роль.

Запишем уравнение Лапласа в сферической системе координат:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Полагая, что u не зависит от угловых переменных, получаем уравнение

$$(r^2 u')' = 0.$$

Его общее решение

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Здесь мы получаем еще одно важное частное решение

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (5.16)$$

Теорема о среднем. Рассмотрим область G , ограниченную двумя сферами (шаровой слой):

$$G = \{(x, y, z): \rho^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_0^2\}.$$

Применим к этой области вторую формулу Грина, выбрав в качестве u произвольную гармоническую функцию, а в качестве v функцию

$$v = \frac{1}{r} - \frac{1}{R_0},$$

которая отличается от функции (5.16) постоянной, причем на внешней границе области $v = 0$. Так как $\Delta u = \Delta v = 0$ в G , верно равенство

$$0 = \iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS,$$

Учитывая, что для данной области $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial r}$ на внешней границе и $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial u}{\partial r}$ на внутренней, равенство можем записать следующим образом:

$$\iint_{r=R_0} u \frac{\partial v}{\partial r} dS = \iint_{r=\rho} \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS,$$

или

$$-\frac{1}{R_0^2} \iint_{r=R_0} u dS = -\frac{1}{\rho^2} \iint_{r=\rho} u dS - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R_0} \right) \iint_{r=\rho} \frac{\partial u}{\partial r} dS. \quad (5.17)$$

При $\rho \rightarrow 0$ имеем

$$\iint_{r=\rho} u dS \sim u(0)4\pi\rho^2, \quad \iint_{r=\rho} \frac{\partial u}{\partial r} dS \sim C\rho^2.$$

Поэтому переход к пределу при $\rho \rightarrow 0$ в равенстве (5.17) даст

$$-\frac{1}{R_0^2} \iint_{r=R_0} u dS = -4\pi u(0),$$

откуда

$$u(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi R_0^2} \iint_{r=R_0} u dS.$$

Повторяя выкладки для функции $u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ (здесь $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — векторное обозначение точки в \mathbb{R}^3), которая, ясно, является гармонической, получаем формулу

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi R_0^2} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=R_0} u dS. \quad (5.18)$$

В равенстве (5.18) правая часть представляет собой среднее значение функции u по сфере радиусом R_0 и центром в точке \mathbf{x}_0 . Само это равенство составляет содержание следующей теоремы о среднем.

Теорема 5.6. Если функция гармонична в шаре $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq R$, то для любого $R_0 < R$ имеет место формула (5.18).

Формула (5.18) получена в трехмерном случае. Однако она остается верной и для других размерностей (с поправкой на смысл среднего значения). В частности, в двумерном случае ее

можно получить из теоремы о среднем для аналитической функции, которая в свою очередь вытекает из формулы Коши.

Другие свойства гармонических функций. Из теоремы о среднем вытекает следующее важное свойство.

Теорема 5.7. Непостоянная гармоническая функция не может достигать своего максимума или минимума внутри области.

◀ Предположим, что в точке $a \in D$ гармоническая функция $u(x)$ достигает, например, максимума. Выберем шар $U_{a,R}$ целиком (вместе с границей) лежащий в D . Согласно теореме о среднем

$$u(a) = \frac{1}{m(S_{a,R})} \int_{S_{a,R}} u(x) dS.$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{1}{m(S_{a,R})} \int_{S_{a,R}} (u(a) - u(x)) dS = 0.$$

Из условия $u(a) \geq u(x)$, $x \in S_{a,R}$, и непрерывности функции $u(x)$ заключаем, что на сфере $S_{a,R}$ функция $u(x)$ тождественно равна $u(a)$.

Так как радиус R шара можно уменьшать произвольным образом, то приходим к выводу, что $u(x)$ постоянна во всем шаре $U_{a,R}$.

Рассмотрим множество M точек в D , в которых функция u имеет значение $u(a)$ (т.е. максимальное). Как доказано, это множество открытое. В силу непрерывности функции $u(x)$ в D множество M замкнуто в относительной топологии множества D . Таким образом, M — открыто-замкнутое подмножество области D , а следовательно, совпадает с D . Это означает, что $u(x)$ постоянна в D . ▶

Следствие 5.1. Для функции, гармонической в области D и непрерывной (кусочно-непрерывной) в \bar{D} верно неравенство

$$\max_{x \in D} |u(x)| \leq \max_{x \in \partial D} |u(x)|.$$

Сформулированное следствие в литературе известно как **принцип максимума**.

Следствие 5.2. Решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u|_{x \in \partial D} = \mu(x)$ при непрерывной функции μ единственно.

◀ Из принципа максимума вытекает, что если гармоническая функция на границе области тождественно равна нулю, то эта функция равна нулю и во всей области. Если две функции на границе области имеют одинаковые значения, то их разность на границе области равна нулю, т.е. эта разность — тождественный нуль, а функции совпадают. ▶

Полагая, что $v = 1$ во второй формуле Грина, получим равенство

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

Это равенство означает, что **задача Неймана**

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \mathbf{x} \in G; \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mu(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases}$$

имеет решение только в том случае, когда среднее значение функции μ на границе равно нулю. Например, задача

$$\begin{cases} \Delta u(r, \vartheta, \varphi) = 0, & r < 1; \\ \frac{\partial u}{\partial r} = \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi, & r = 1, \end{cases}$$

решения не имеет.

В то же время задача Неймана всегда имеет решение с точностью до постоянной, поскольку в уравнения задачи неизвестная функция входит только в виде частных производных, на которые аддитивная константа не влияет.

Например, задача

$$\begin{cases} \Delta u(r, \vartheta, \varphi) = 0, & r < 1; \\ \frac{\partial u}{\partial r} = \cos \vartheta \sin \varphi, & r = 1, \end{cases}$$

имеет решения, множество которых описывается формулой $u = y + C$.

6. МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

6.1. Наводящие соображения

Ключевым свойством краевых задач математической физики для линейных дифференциальных уравнений является то, которое лежит в основе принципа суперпозиции: при сложении краевых условий решения складываются. Например, пусть есть краевые задачи

$$\begin{cases} Lu = f_1, & x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x \in \Gamma} = \varphi_1; \end{cases} \quad \begin{cases} Lu = f_2, & x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x \in \Gamma} = \varphi_2; \end{cases}$$

их решения u_1 и u_2 . Тогда решением задачи

$$\begin{cases} Lu = f_1 + f_2, & x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x \in \Gamma} = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

будет $u = u_1 + u_2$.

Принцип суперпозиции открывает возможность разделения поставленной задачи, раскладывая в сумму исходные данные. Например, задачу

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x \in \Gamma} = \varphi; \end{cases}$$

можно разделить на две такие задачи:

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x \in \Gamma} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Lu = 0, & x \in G, \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{x \in \Gamma} = \varphi. \end{cases}$$

Остановимся на первой из них. Функцию f можно разделить по «территориальному принципу»: область G делим на подобласти G_i , $i = \overline{1, k}$, и полагаем $f_i = f$ в G_i и $f_i = 0$ вне. Тогда решение можно представить в виде

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_k.$$

При измельчении разбиения количество слагаемых растет, а каждое слагаемое становится все меньше. Их следует нормировать, отнеся к объему соответствующей подобласти.

В случае, если краевая задача связана с уравнением теплопроводности, функция f описывает плотность источников тепла. Когда области G_i достаточно малы по размерам, функции f_i можно представить как постоянные со значением $f(x_i)$, соответствующая мощность источника есть $f(x_i)\Delta V_i$, где ΔV_i — объем области G_i . Обозначив через v_i решение задачи, определяемой источником в G_i равномерно распределенной единичной суммарной мощности, получим

$$u = v_1 f(x_1) \Delta V_1 + v_2 f(x_2) \Delta V_2 + \dots + v_k f(x_k) \Delta V_k.$$

Объяснение нашего приема опиралось на некоторые физические соображения, но в действительности с физической сутью дела этот прием не связан. Но в результате решение оказалось представленным в виде интегральной суммы. Формальный предельный переход приводит к

представлению решения в виде тройного интеграла (двойного для плоской задачи и одномерного для одномерной):

$$u(x) = \int_G \Phi(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in G.$$

Здесь $\Phi(x, \xi)$ — решение соответствующей задачи, в которой в правой части указан точечный источник единичной мощности, размещенный в точке ξ . Такое представление решения называют **интегральным**, функцию Φ — **ядром** интегрального представления, или **функцией Грина**.

Аналогичным образом можно представить решение второй задачи (однородное дифференциальное уравнение, неоднородное граничное условие), только соответствующий интеграл будет браться по границе области (поверхности в трехмерном случае, кривой в двумерном и сумме по двум конца в одномерном).

Знание функции Грина позволяет вычислить решение (хотя бы численно) для различных исходных данных (функций f и φ).

Как ищут функцию Грина? Для этого используют различные приемы. Отметим лишь, что задача нахождения функции Грина тесно связана с другой задачей, в которой, например, f определяет точечный источник. Точечный источник нельзя описать обычной функцией, его можно рассматривать лишь как предельный. Пусть функция $f_\delta(x)$ определена в шаре $|x - \xi| < \delta$ и имеет там постоянное значение $1/W$, где W — объем шара (т.е. мощность источника 1). Каждой такой функции соответствует решение u_δ . При $\delta \rightarrow 0$ решения u_δ стремятся к некоторому предельному решению u_0 , которое можно интерпретировать как решение, соответствующее точечному источнику. Сам точечный источник есть формальный предел $f_\delta \rightarrow 0$, который называют **δ -функцией Дирака**.

δ -функция может использоваться как обычная функция, но лишь в подынтегральных выражениях. При этом для любой функции f

$$\int_G \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

Общее решение уравнения $Lx = \delta(x)$ называют **фундаментальным решением** для дифференциального оператора L . Общее решение представляет собой сумму частного решения и общего решения однородного уравнения. подбирая из общего решения то частное решение, которое удовлетворит однородным граничным условиям соответствующего типа, получаем функцию Грина. Действительно, если $H(x, \xi)$ — решение задачи

$$LU = \delta(x - \xi), \quad U|_{x \in \Gamma} = 0,$$

то

$$u = \int_G H(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{—}$$

решение задачи

$$Lu = f(x), \quad u|_{x \in \Gamma} = 0,$$

поскольку

$$Lu = \int_G LH(x, \xi) \cdot f(\xi) d\xi = \int_G \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f(x).$$

6.2. Фундаментальное решение оператора Лапласа

Из различных соображений можно сделать вывод, что δ -функция обладает круговой (сферической) симметрией. Следовательно, решение уравнения $\Delta u = \delta(x)$ можно искать с такой симметрией.

В двумерном случае, запишем оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Ищем решение уравнения Лапласа, не зависящее от φ , т.е. решение уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0.$$

Решением является $u = C_1 + C_2 \ln r$. Отбрасывая постоянную (это простейшее решение уравнения Лапласа и входит как составляющая в фундаментальное решение), получаем решение в виде $u = C_2 \ln r$, которое может рассматриваться как частное решение в фундаментальном решении. Константу C_2 определим из следующих соображений. Для любой области G , согласно формуле Остроградского — Гаусса

$$\iint_G \Delta u \, dV = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \quad (6.1)$$

Если u — из фундаментального решения, то $\Delta u = \delta$ и левая часть равенства равна 1. Выбрав в качестве G круг радиуса ε , т.е. $|x| < \varepsilon$, а в качестве u функцию $C_2 \ln r$, получим

$$1 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} (C_2 \ln r) r \Big|_{r=\varepsilon} d\varphi = 2\pi C_2.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Итак, фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости

$$H(r) = \frac{1}{2\pi} \ln r + \gamma(r, \varphi),$$

где $\gamma(x, y)$ — произвольная гармоническая функция.

В трехмерном случае поступаем аналогично. Имея в виду сферическую симметрию, запишем оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Полагая, что решение не зависит от ϑ и φ (в силу сферической симметрии), получаем уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0.$$

Его решением является

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Рассмотрим функцию $u = \frac{C_1}{r}$. Постоянную C_1 найдем исходя из уравнения (6.1). Согласно этому уравнению

$$1 = \iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C_1}{r} \right) \Big|_{r=\varepsilon} dS.$$

В сферических координатах

$$-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{C_2}{r^2} \Big|_{r=\varepsilon} \varepsilon^2 \sin \vartheta d\vartheta = 1.$$

Отсюда $C_2 = -1/(4\pi)$

$$u = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Итак, фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве

$$H(r) = -\frac{1}{4\pi r} + \gamma(r, \varphi),$$

где γ — произвольная гармоническая функция в пространстве.

6.3. Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

Уравнение Гельмгольца — второе важное уравнение в теории колебаний. Если уравнение Лапласа описывает стационарные решения волнового уравнения, то уравнение Гельмгольца — периодические. Рассмотрим решения волнового уравнения, имеющие вид

$$u(t, \mathbf{x}) = e^{ikt} A(\mathbf{x}). \quad (6.2)$$

Подставив в волновое уравнение, получим

$$-k^2 e^{ikt} A(\mathbf{x}) = e^{ikt} \Delta A(\mathbf{x}).$$

Сокращаем экспоненту:

$$-k^2 A(\mathbf{x}) = \Delta A(\mathbf{x}),$$

или

$$\Delta A + k^2 A = 0.$$

Полученное уравнение называется **уравнением Гельмгольца**. Его решения позволяют получить решения волнового уравнения в виде (6.2), когда зависимость от времени имеет специальный вид. Такие решения называют **монохроматическими волнами**. Они тесно связаны с методом Фурье: уравнение Гельмгольца — это уравнение на собственные функции оператора Лапласа, но рассматриваемое чуть в другом свете. В задаче на собственные значения требуется определить показатель k , а здесь он уже задан.

Рассмотрим задачу построения фундаментального решения для уравнения Гельмгольца. Как и в случае уравнения Лапласа, можем предполагать, что это решение не зависит от угловых координат.

Двумерный случай. В этом случае из уравнения Гельмгольца, убирая слагаемые с производной по углу, получим

$$\frac{1}{r}(ru')' + k^2 u = 0.$$

Это уравнение сводится к уравнению Бесселя индекса 0:

$$r^2 u'' + ru' + k^2 r^2 u = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$u = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr).$$

Выяснение констант требует интегрирования функций Бесселя. Опуская детали, запишем ответ:

$$\mathcal{E}_2(r) = \frac{1}{4}Y_0(kr).$$

Зачастую используют комплексный вариант записи с помощью функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$:

$$\mathcal{E}_2(r) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr).$$

Трехмерный случай. В этом случае уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{r^2}(r^2u')' + k^2u = 0.$$

Преобразуем:

$$r^2u'' + 2ru' + k^2r^2u = 0.$$

Полученное уравнение сводится (как в собственных функциях для уравнения Лапласа для шара) к функциям Бесселя полуцелого индекса. Оказывается, такие функции элементарны. В данном случае сделаем замену $ru = v$. Тогда $ru' + u = v'$, $r^2u' = rv' - v$, откуда $(r^2u')' = rv''$. В результате приходим к уравнению

$$rv'' + k^2rv = 0 \quad \Rightarrow \quad v'' + k^2v = 0.$$

Его решением являются функции $v_1 = \cos kr$ и $v_2 = \sin kr$. В результате получаем общий вид решений уравнения Гельмгольца со сферической симметрией:

$$u = C_1 \frac{\cos kr}{r} + C_2 \frac{\sin kr}{r}.$$

Второе слагаемое ограничено в нуле и, после доопределения, оказывается решением однородного уравнения Гельмгольца во всем пространстве. Его отбрасываем. Постоянную можно вычислить из следующих соображений.

Полагая $u = C_1 \frac{\cos kr}{r}$ и $v = \frac{\sin kr}{r}$, применим 2-ю формулу Грина к шару радиуса R :

$$\iiint_G (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS. \quad (6.3)$$

Отметим равенство

$$\iiint_G (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iiint_G (uLv - vLu) dV,$$

где $L = \Delta + k^2I$ — оператор Гельмгольца. Полагая, что $Lu = \delta$, получаем

$$\iiint_G (uLv - vLu) dV = - \iiint_G v\delta dV = -v(0) = -k.$$

Правая часть считается непосредственно. Так как

$$u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{C_1 k}{r^2},$$

закключаем, что для $\Gamma = \{r = R\}$

$$\iint_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) dS = 4\pi R^2 \frac{C_1 k}{R^2} = 4\pi C_1 k.$$

В конечно счете $4\pi C_1 = -1$ и

$$\mathcal{E}_3(r) = -\frac{\cos kr}{4\pi r}.$$

Как и в двумерном варианте используют комплексный вариант записи, в котором мнимая часть — решение уравнения Гельмгольца:

$$\mathcal{E}_3(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

или

$$\mathcal{E}_3(r) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

Замечание 6.1. В формуле (6.3) выбор функции v продиктован лишь соображениями простоты. Смысл применения этой формулы — лишь в замене объемного интеграла от Lu , который нельзя интерпретировать обычным образом, на несколько других, «обычных» интегралов. Например, в качестве v можно выбрать постоянную $v \equiv 1$. Тогда $Lv = k^2$, и мы приходим к формуле

$$k^2 \int_G u dV - 1 = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

или

$$k^2 \int_G u dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 1,$$

на основании которой можно вычислить константу C в фундаментальном решении $C \frac{\cos kr}{r}$.

6.4. Интегральное представление решения краевой задачи для уравнения Лапласа

Фундаментальное решение уравнения Лапласа (а точнее, частное решение, зависящее только от r) позволяет получить интегральное представление решение задачи Дирихле или задачи Неймана. Остановимся на следующей задаче Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega; \\ u|_{x \in \partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

Выберем точку $x_0 \in \Omega$ и рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \{|x - x_0| \leq \varepsilon\}$. В этой области выберем функцию $H(x)$ из фундаментального решения уравнения Лапласа (какую именно, уточним позже). Тогда функция $H(x - x_0)$ гармонична в Ω_ε . Используем ее в качестве v во второй формуле Грина, т.е. полагаем $v(x) = H(x - x_0)$. Тогда в левой части формулы слагаемое $u\Delta v$ равно нулю, и мы получаем

$$- \iiint_{\Omega_\varepsilon} H \Delta u dV = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} - H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} - H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \quad (6.4)$$

где $\Sigma_\varepsilon = \{|x - x_0| = \varepsilon\}$ — сфера с центром в точке x_0 и радиусом ε .

При $\varepsilon \rightarrow 0$ тройной интеграл в левой части (6.4) сходится к интегралу по области Ω (интеграл этот можно понимать в несобственном смысле, но в сферических координатах появляется множитель r^2 , подавляющий особенность $1/r$ функции H). Если функция u в окрестности точки x_0 ограничена вместе со своими частными производными, то поверхностный интеграл

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS$$

также стремится к нулю, поскольку на сфере радиуса ε функция H есть бесконечно большая порядка $1/\varepsilon$, в то время как $dS = \varepsilon^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, так что в конечном счете при записи поверхностного интеграла в сферических координатах подынтегральная функция будет бесконечно малой порядка ε . Остается найти предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграла

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

Используем параметризацию сферы

$$x - x_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon \sin \vartheta \cos \varphi \\ \varepsilon \sin \vartheta \sin \varphi \\ \varepsilon \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Вектор \mathbf{n} нормали (единичной) будет иметь вид $\mathbf{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T$. Поверхностный интеграл преобразуется в двойной интеграл

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(u \frac{\partial H}{\partial r} \right) \Big|_{r=\varepsilon} \varepsilon^2 \sin \vartheta d\vartheta.$$

Так как $\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial r}$ (γ — аддитивное гармоническое слагаемое), получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi u(\varepsilon, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta + \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi u(\varepsilon, \vartheta, \varphi) \frac{\partial \gamma}{\partial r}(\varepsilon, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Второй интеграл при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю, и мы его можем опустить. Первый интеграл преобразуем по теореме о среднем:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi u(\varepsilon, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{u_{\text{ср}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = u_{\text{ср}},$$

где $u_{\text{ср}}$ — среднее значение u на сфере Σ_ε , совпадающее в силу непрерывности u со значением этой функции в некоторой точке. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $u_{\text{ср}} \rightarrow u(x_0)$. Следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} dS \rightarrow u(x_0).$$

Итак, при переходе в (6.4) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем равенство

$$- \iiint_{\Omega} H \Delta u dV = \iint_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} - H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS - u(x_0).$$

Учитывая, что $\Delta u = f$ в Ω и $u = \varphi$ на границе Ω , окончательно приходим к соотношению

$$u(x_0) = \iiint_{\Omega} H f dV + \iint_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} - H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \quad (6.5)$$

Для того, чтобы убрать неизвестное слагаемое $H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ в правой части соотношения дополнительно потребуем, чтобы $H|_{x \in \partial\Omega} = 0$. Тогда

$$u(x_0) = \iiint_{\Omega} H f dV + \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} \varphi dS. \quad (6.6)$$

Итак, решение рассматриваемой задачи Дирихле представлено в интегральном виде. Функцией Грина в данном случае является функция $H(x, x_0) = \mathcal{E}(x - x_0) + \gamma(x, x_0)$, где $\mathcal{E}(x)$ — найденное нами частное сферически симметричное решение в составе фундаментального решения, а $\gamma(x, x_0)$ — гармоническая функция, на границе $\partial\Omega$ удовлетворяющая условию $\gamma(x, x_0)|_{x \in \partial\Omega} = -\mathcal{E}(x - x_0)$. Для каждой точки x_0 гармоническая функция γ своя, поскольку ее значения на $\partial\Omega$ зависят от точки x_0 . Отметим, что построенная функция H описывает не только источники, размещенные по области Ω с плотностью f , но и граничные источники, описываемые поверхностной плотностью φ .

Задача Неймана для уравнения Пуассона решается аналогично задаче Дирихле с тем лишь различием, что в поверхностном интеграле равенства (6.5) следует убрать первое слагаемое, а не второе, для чего достаточно потребовать выполнения условия $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда в задаче

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

получим представление

$$u(x_0) = \iiint_{\Omega} H f dV - \iint_{\partial\Omega} H \varphi dS.$$

В более общем случае граничные условия могут быть смешанными: на части границы Γ_1 первого рода: $u|_{\Gamma_1} = \varphi(x)$; на оставшейся части $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$ второго рода: $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_2} = \psi(x)$. Тогда функцию H надо выбирать так, чтобы на Γ_1 она удовлетворяла однородным условиям первого рода, а на Γ_2 однородным условиям второго рода. В результате придем к смешанной формуле

$$u(x_0) = \iiint_{\Omega} H f dV + \iint_{\Gamma_1} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} \varphi dS - \iint_{\Gamma_2} H \psi dS.$$

6.5. Метод отражений

Как видно, функция Грина для задач Дирихле и Неймана состоит из постоянной части — функции

$$H_0(x) = \mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln r$$

в двумерном случае и функции

$$H_0(x) = \mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi r}$$

в трехмерном — и переменной части, представленной некоторой гармонической функцией в рассматриваемой области, включение которой призвано обеспечить для функции Грина однородные граничные условия соответствующего типа. Постоянная часть описывает точечный

источник, и мы будем называть ее функцией источника. Отметим, что если точка x_0 находится вне области Ω , в которой рассматривается задача, то смещенная функция $H_0(x - x_0)$ является гармонической в Ω . Возникает идея сформировать добавочную гармоническую функцию, комбинируя функции источников для «чужих» точек. Рассмотрим некоторые примеры в двумерном случае.

Пример 6.1. Построим функцию Грина для задачи Дирихле в полуплоскости $y > 0$. Необходимо к функции

$$H_0(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

добавить гармоническую в верхней полуплоскости функцию так, что сумма на оси абсцисс будет обращаться в нуль. На помощь приходят соображения симметрии. Положим

$$\gamma(x, y, x_0, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y + y_0)^2)$$

(эта функция соответствует добавлению точечного источника в точку $(x_0, -y_0)$ в нижней полуплоскости, симметричную точке (x_0, y_0) с отрицательным знаком). Функции H и $-\gamma$ на оси абсцисс (при $y = 0$) одинаковые значения, так что сумма $H + \gamma$ имеет на этой оси нулевые значения. Поэтому функция

$$\begin{aligned} G(x, y, x_0, y_0) &= \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y + y_0)^2) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \end{aligned}$$

является функцией Грина для задачи Дирихле в верхней полуплоскости.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & y > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

В соответствии с формулой (6.6), в которой полагаем $f = 0$, находим

$$u(x_0, y_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial y} \Big|_{y=0} \varphi(x) dx$$

(знак минус отражает направление нормали вовне области, т.е. в сторону уменьшения y). Вычислив

$$\frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{2(y + y_0)}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \right),$$

окончательно получаем

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 \varphi(x)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx$$

Пример 6.2. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x > 0, \quad y > 0; \\ u(x, 0) = \varphi_a(x), & \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \varphi_b(y). \end{cases}$$

Поставлена задача в первом квадранте со смешанными граничными условиями. При построении функции Грина к функции источника необходимо добавить гармоническую функцию,

обеспечивающую нулевые значения функции Грина на оси абсцисс и нулевые значения ее производной по x на оси ординат. Задачу решим добавлением функций источников в трех точках:

- в точке $(x_0, -y_0)$ со знаком минус;
- в точке $(-x_0, y_0)$ со знаком плюс;
- в точке $(-x_0, -y_0)$ со знаком минус.

Из соображений симметрии вытекает, что сумма четырех функций удовлетворяет однородным условиям I рода на оси абсцисс и II рода на оси ординат. В то же время три функции из четырех являются гармоническими в первом квадранте. Таким образом, указанная сумма есть функция Грина поставленной задачи. Запишем ее:

$$\begin{aligned} G(x, y, x_0, y_0) &= \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - \frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y + y_0)^2) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \ln((x + x_0)^2 + (y - y_0)^2) - \frac{1}{4\pi} \ln((x + x_0)^2 + (y + y_0)^2) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2][(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2]}{[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2][(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2]}. \end{aligned}$$

Замечание 6.2. Построения, связанные с функцией Грина, исходили из предположения, что область, в которой рассматривается краевая задача, является ограниченной. В рассмотренных примерах это требование нарушено. Чтобы представление решения с помощью функции Грина имело место, требуется предельный переход, в котором неограниченная область исчерпывается ограниченными. Для корректности такого перехода необходимо, чтобы граничные условия удовлетворяли дополнительным условиям при стремлении к бесконечности. Типичное требование такого рода — условие абсолютной сходимости соответствующего несобственного интеграла от функций, задающих граничные условия или правую часть дифференциального уравнения.

Замечание 6.3. Метод, изложенный в примерах выше, который основан на добавлении фантомных источников и использовании соображений симметрии, называют *методом отражений*. Его можно использовать для угловых областей на плоскости специального раствора π/n . Тогда полуплоскость можно замостить целиком несколькими одинаковыми областями и в каждой разместить соответствующим образом отраженный источник. В других случаях метод отражений не работает.

Замечание 6.4. На плоскости при рассмотрении конкретно уравнения Лапласа или уравнения Пуассона открывается дополнительная возможность использовать конформные отображения. Такие отображения не изменяют оператора Лапласа и любую задачу можно преобразовать в задачу для одной из стандартных областей. В частности, можно любую угловую область $0 < \varphi < \alpha$ конформно отобразить в верхнюю полуплоскость отображением $w = z^{\pi/\alpha}$. Однако следует иметь в виду, что после конформного преобразования функция-источник перестает быть функцией-источником — лишь одним из семейства функций фундаментального решения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики: учеб. для вузов. 2-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
- [2] *Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д.* Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 492 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).
- [3] *Паршев Л.П.* Уравнения математической физики. Решение волнового уравнения методом распространяющихся волн: методические указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 60 с.
- [4] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с. (Сер. Классический университетский учебник)
- [5] *Власова Е.А.* Ряды: учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 616 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IX).
- [6] *Чигирева О.Ю.* Ряды Фурье. Преобразование Фурье: метод. указания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 51 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	1
1.1. О содержании курса	1
1.2. Методы исследования в математической физике	2
1.3. Линейные уравнения	2
1.4. Волновое уравнение	6
1.4.1. Общее решение	6
1.4.2. Задача Коши	6
1.4.3. Метод распространяющихся волн	8
1.4.4. Частные решения трехмерного волнового уравнения	12
2. Преобразование Фурье	14
2.1. Определение	14
2.2. Свойства преобразования Фурье	16
2.3. Косинус- и синус-преобразования	19
2.4. Преобразование Фурье в задачах математической физики	20
3. Метод Фурье	21
3.1. Волновое уравнение	21
3.2. Элементы гармонического анализа	23
3.3. Тригонометрические ряды	28
3.4. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	32
3.5. Оператор Штурма — Лиувилля	34
3.6. Метод Фурье	36
4. Функции Бесселя	40
4.1. Задача Штурма — Лиувилля для круга	40
4.2. Уравнение Бесселя	41
4.3. Функции Бесселя	42
4.4. Свойства функций Бесселя	44
5. Специальные функции	47
5.1. Гамма-функция	47
5.2. Задача Штурма — Лиувилля для шара	49
5.3. Уравнение Лежандра	51
5.4. Присоединенное уравнение Лежандра	53
5.5. Шаровые и сферические функции	55
5.6. Гармонические функции	56
6. Метод функций Грина	62
6.1. Наводящие соображения	62
6.2. Фундаментальное решение оператора Лапласа	63
6.3. Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца	65
6.4. Интегральное представление решения краевой задачи для уравнения Лапласа	67
6.5. Метод отражений	69