

## 6. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление появилось в начале века как некоторый формальный метод интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем. К таким уравнениям сводятся многие практические задачи электротехники, радиотехники, теории автоматического регулирования.

В соответствии с современными представлениями этот метод по существу сводится к преобразованию линейных дифференциальных выражений. Линейный дифференциальный оператор разлагается в произведение более простых, для которых известен обратный оператор.

Строгое математическое обоснование операционное исчисление получило в рамках теории интегральных преобразований. Интегральное преобразование Лапласа позволило интерпретировать формальные правила преобразования операторных выражений как преобразование выражений алгебраических, связывающих изображения функций.

Современное операционное исчисление строится по схеме, типичной для теории интегральных преобразований. По функциям-оригиналам, входящим в дифференциальные уравнения, строятся их изображения, при этом дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические. Система алгебраических уравнений решается, и тем самым находятся изображения неизвестных функций. Неизвестные функции восстанавлива-

ются по найденным изображениям. Техника операционного исчисления базируется на таблице стандартных оригиналов и изображений, а также на ряде правил преобразования выражений при переходе от оригиналов к изображениям и обратно.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и их системы хорошо изучены. Решение задач, приводящих к таким уравнениям, не связано с какими-либо теоретическими трудностями и может быть осуществлено различными методами. Ни один метод не имеет преимуществ перед другими, и выбирать тот или иной метод следует с учетом особенности конкретной задачи. Операционное исчисление наиболее эффективно, когда решаемая задача является задачей Коши; при этом правые части дифференциальных уравнений и начальных условий содержат составные функции, которые, возможно, являются гладкими, но описываются в разных частях области определения разными формулами. Например:

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ e^x, & x > 0. \end{cases}$$

### 6.1. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа — это *интегральное преобразование*, которое определяется соотношением

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (6.1)$$

Интеграл в правой части (6.1) называется *интегралом Лапласа*. Изображение интегрального преобразования Лапласа называют также *изображением по Лапласу*. Взаимосвязь оригинала  $f(t)$  и его изображения  $F(p)$  записывают следующим образом:

$$F(p) = L[f(t)](p) \quad \text{или} \quad f(t) \doteq F(p).$$

*Функцией-оригиналом* интегрального преобразования Лапласа назовем любую, в общем случае комплекснозначную

функцию, удовлетворяющую условиям:

- 1)  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;
- 2)  $f(t)$  *кусочно непрерывна* на действительной оси, т.е. она может иметь разрывы только I рода, причем каждый конечный интервал содержит лишь конечное число точек разрыва;
- 3)  $f(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  имеет ограниченный показательный рост, т.е. существуют такие постоянные  $M > 0$  и  $\sigma$ , что  $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$  при  $t > 0$ .

Прокомментируем условия 1)–3), налагаемые на функцию-оригинал преобразования Лапласа. Поскольку основная цель операционного исчисления — решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем при заданных начальных условиях (задача Коши), а также смешанных задач математической физики, то поведение функций до начального момента (т.е. при  $t < 0$ ) не является существенным, и самое простое — полагать, что до начального момента функция тождественно равна 0. Это аналогично началу работы радиотехнического устройства, когда в некоторый момент времени на его вход подается сигнал, а до этого момента сигнал отсутствует, т.е. равен 0. Эти соображения мотивируют введение условия 1).

Условие 2) достаточно естественно. Отметим, что в литературе оно может заменяться более легким (минимальное требование — интегрируемость на любом конечном интервале) либо более жестким, например условиями Дирихле (т.е. дополнительно функция должна быть кусочно монотонной). Конкретный выбор одного из таких условий не является существенным с практической точки зрения и связан прежде всего с нюансами построения математической теории.

Условие 3) также важно для математического обоснования исчисления, но не является обременительным практически, так как большинство функций, описывающих физические процессы, подчиняются ему. Более того, из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что если правые части системы линейных дифференциальных уравнений с посто-

янными коэффициентами имеют экспоненциальный рост, то и решения системы имеют такой же рост.

**Пример 6.1.** Функция

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом преобразования Лапласа. Она, очевидно, подчиняется условиям 1) и 2). Условие 3) также выполнено с  $M = 1$  и  $\sigma = 0$ .

Функция  $\eta(t)$  играет особую роль в пространстве оригиналов преобразования Лапласа, являясь в нем единичной функцией: если  $f(t)$  — функция-оригинал, то  $f(t)\eta(t) \equiv f(t)$ . Называют эту функцию *функцией Хевисайда*.

**Замечание 6.1.** В дальнейшем мы будем считать условие 1) выполненным. Таким образом, если мы указываем, например, функцию  $f(t) = \sin t$ , то на самом деле имеем в виду функцию

$$f(t) = \sin(t)\eta(t) = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad \#$$

Для любой функции-оригинала  $f(t)$  параметр  $\sigma$  в условии 3) определяется неоднозначно. Число  $\sigma_0$ , являющееся точной нижней гранью всех таких  $\sigma$ , называется *порядком роста* функции  $f(t)$ .

Если для функции  $f(t)$  выполняется соотношение  $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$ , то

$$\frac{\ln |f(t)|}{t} \leq \sigma + \frac{\ln M}{t},$$

откуда следует, что порядок роста определяется формулой

$$\sigma_0 = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(t)|}{t}.$$

**Пример 6.2.** Для многочлена

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

показатель роста равен

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n|}{t} = \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{n \ln t + \ln \left| \frac{a_0}{t^n} + \cdots + a_n \right|}{t} = \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{n \ln t}{t} = 0, \end{aligned}$$

что кратко можно выразить так: любая степенная функция растет медленнее показательной.

**Пример 6.3.** Функция  $f(t) = e^{t^2}$  не является оригиналом, так как

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty.$$

В этом случае говорят, что  $f(t)$  имеет *неограниченный рост*.

**Пример 6.4.** Функция  $f(t) = \operatorname{tg} t$  также не является оригиналом, так как, во-первых, не выполняется условие 2) (функция имеет точки разрыва II рода), а во-вторых, не выполняется условие 3) (из него следует, что функция должна быть ограниченной на любом конечном промежутке, что неверно). #

Первые же вопросы, возникающие после введения преобразования Лапласа, — вопросы о сходимости интеграла и об области определения изображения по Лапласу.

**Теорема 6.1.** Если  $f(t)$  — оригинал и имеет показатель роста  $\sigma_0$ , то интеграл (6.1) сходится абсолютно всюду в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ . При этом сходимость равномерная в

любой области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$ . Функция  $F(p)$ , являющаяся изображением  $f(t)$ , аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ .

◀ Выберем произвольные  $\sigma$  и  $\sigma_1$ ,  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma$ . Существует такое значение  $M$ , что  $|f(t)| \leq M e^{\sigma_1 t}$  при  $t > 0$ . Следовательно, функция  $f(t)e^{-\sigma_1 t}$  ограничена на действительной оси. Поэтому для любого  $p = \xi + i\eta$ ,  $\xi \geq \sigma$ , получаем

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\xi t} dt \leq \int_0^{+\infty} M e^{-(\sigma - \sigma_1)t} dt, \quad (6.2)$$

т.е. подынтегральная функция имеет мажоранту — сходящийся интеграл, не зависящий от  $p$ . Это значит, что несобственный интеграл сходится всюду в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \sigma$  абсолютно и равномерно. Можно показать, что допустимо дифференцирование интеграла (6.2) по параметру  $p$ . Значит, функция  $F(p)$  является аналитической. ▶

Рассмотрим основные свойства изображений по Лапласу.

1. Изображение  $F(p)$  является функцией комплексного переменного, аналитической в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  — показатель роста оригинала.

Это следует из теоремы 6.1.

2. Существует предел

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

Действительно, возвращаясь к доказательству теоремы 6.1, получаем при  $\operatorname{Re} p > \sigma > \sigma_0$

$$|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq \int_0^{+\infty} M e^{-(\operatorname{Re} p - \sigma)t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \sigma},$$

откуда сразу следует нужное утверждение.

3. Если функция-оригинал  $f(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле, то имеет место формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (6.3)$$

где по определению

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-iw}^{\sigma+iw} F(p)e^{pt} dp,$$

а  $\sigma > \sigma_0$  может быть выбрана произвольно. Равенство (6.3) выполняется в каждой точке  $t$ , в которой функция  $f(t)$  непрерывна.

Формула (6.3) может быть получена при помощи интеграла Фурье. Если  $f(t)$  — оригинал преобразования Лапласа, то функция  $f(t)e^{-\xi t}$  при  $\xi > \sigma_0$  является оригиналом экспоненциального преобразования Фурье (5.27). Соединяя прямое и обратное преобразования Фурье, получаем

$$f(t)e^{-\xi t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-\xi\tau} e^{-i\eta\tau} d\tau$$

или

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\xi+i\eta)t} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-(\xi+i\eta)\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi+i\eta)e^{(\xi+i\eta)t} d\eta. \end{aligned}$$

Это равносильно нашему утверждению.

**Замечание 6.2.** Интеграл в правой части формулы обращения (6.3) называют *интегралом Меллина*, а саму формулу — *формулой Римана — Меллина*.

**Замечание 6.3.** Формула обращения (6.3) верна и в общем случае, если функции рассматривать как элементы пространства  $L^2(-\infty, +\infty)$ , т.е. если считать идентичными функции, различающиеся лишь на множестве меры 0.

**Замечание 6.4.** Из формулы обращения с учетом замечания 6.3 заключаем, что каждая функция-оригинал однозначно восстанавливается по своему изображению с точностью до значений в точках разрыва. Действительно, две функции, различающиеся на множестве меры 0, должны совпадать во всех точках непрерывности. #

Свойства 1 и 2 являются необходимыми для того, чтобы функция комплексного переменного  $F(p)$ , определенная в некоторой правой полуплоскости, являлась изображением по Лапласу. Однако эти свойства не являются достаточными. Следующая теорема дает достаточные условия для изображений по Лапласу, чуть более жесткие, чем 1 и 2.

**Теорема 6.2.** Пусть функция комплексного переменного  $F(p)$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $F(p)$  определена и аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ ;
- 2) в любой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \sigma$ ,  $\sigma > \sigma_0$  существует предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0;$$

3) функция  $F(p)$  абсолютно интегрируема вдоль всякой прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma$ ,  $\sigma > \sigma_0$ , т.е. функция  $F(\xi + i\eta)$  абсолютно интегрируема по переменной  $\eta$ .

Тогда  $F(p)$  является изображением некоторой функции-оригинала  $f(t)$ , имеющей показатель роста не более  $\sigma_0$ , которая может быть найдена по формуле обращения (6.3).

◀ Нам надо показать, во-первых, что формула (6.3) корректно определяет некоторую функцию  $f(t)$ , во-вторых, что эта функция является оригиналом и, в-третьих, что изображением  $f(t)$  является данная функция  $F(p)$ . Отметим, что, хотя в определение  $f(t)$  входит свободный параметр  $\sigma$ , на самом деле  $f(t)$  от него не зависит, например, вследствие единственности оригинала для данного изображения (см. замечание 6.4).

Интеграл

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\eta)e^{(\sigma+i\eta)t} d\eta \end{aligned} \quad (6.4)$$

сходится согласно условию 3 теоремы, так как подынтегральная функция имеет мажоранту:

$$|F(\sigma + i\eta)e^{(\sigma+i\eta)t}| = |F(\sigma + i\eta)|e^{\sigma t}.$$

Поэтому функция  $f(t)$  определена корректно. Отметим, что интеграл (6.4) сходится равномерно по  $t$  на любом отрезке  $[t_1, t_2]$  действительной оси. Поэтому функция  $f(t)$ , определяемая соотношением (6.4), непрерывна. Более того,

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma + i\eta)|e^{\sigma t} d\eta = Ce^{\sigma t},$$

так что  $f(t)$  имеет ограниченный рост, и показатель роста не превосходит  $\sigma_0$  (потому что  $\sigma > \sigma_0$  может быть выбрана произвольно).

Чтобы убедиться, что функция  $f(t)$  является оригиналом, нам осталось проверить условие  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ . Рассмотрим контур  $\Gamma_R$ , состоящий из отрезка вертикальной прямой  $[\sigma - iw_R, \sigma + iw_R]$  и дуги  $C_R$  окружности  $|z| = R$ , расположенной в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \sigma$  (рис. 6.1). Так как в области, ограниченной контуром  $\Gamma_R$ , функция  $F(p)$  аналитична, то при  $t < 0$

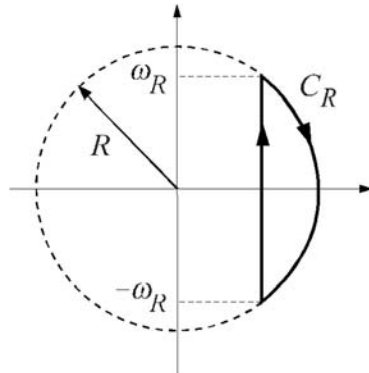


Рис. 6.1

$$\oint_{\Gamma_R} F(p)e^{pt} dp = 0.$$

С другой стороны, при  $t < 0$  и  $R \rightarrow +\infty$  интеграл

$$\int_{C_R} F(p)e^{pt} dp$$

стремится к 0 согласно *лемме Жордана*<sup>1</sup>, так как по условию 2 теоремы  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  в области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma$ . Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-iw_R}^{\sigma+iw_R} F(p)e^{pt} dp = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = 0.$$

Следовательно, функция  $f(t)$  есть функция-оригинал.

Докажем, что изображением функции  $f(t)$  является  $F(p)$ , т.е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} dt \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = F(p_0)$$

в каждой точке  $p_0$  при  $\operatorname{Re} p_0 > \sigma$ . Отметим, что подынтегральная функция повторного интеграла имеет мажоранту

$$|F(p)e^{-(p_0-p)t}| = |F(p)|e^{-(\operatorname{Re} p_0 - \sigma)t}.$$

Поэтому в интеграле

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} dt \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{-(p_0-p)t} dp$$

---

<sup>1</sup>Согласно этой лемме, если существует последовательность радиусов  $R_n$  такая, что для аналитической функции  $f(z)$  выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|f(z)|, |z| = R_n\} = 0,$$

то при  $\lambda > 0$

$$\int_{C_{R_n}} f(z)e^{-\lambda z} dz \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

можно поменять порядок интегрирования. Получим

$$\begin{aligned} F(p_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} dt \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} dt \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{-(p_0-p)t} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dp \int_0^{+\infty} F(p) e^{-(p_0-p)t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{p-p_0} dp. \end{aligned}$$

Рассмотрим контур  $\Gamma_R$ , описанный выше. Так как

$$\left| \int_{C_R} \frac{F(p) dp}{p-p_0} \right| \leq \max_{|p|=R} |F(p)| \int_{C_R} \frac{|dp|}{|p|-|p_0|} \leq \max_{|p|=R} |F(p)| \frac{2\pi R}{R-|p_0|},$$

то согласно условию 2 теоремы интеграл по дуге  $C_R$  стремится к 0 при  $R \rightarrow +\infty$ . Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p) dp}{p-p_0} = \operatorname{res} \left\{ \frac{F(p)}{p-p_0}, p=p_0 \right\} = F(p_0).$$

Мы тем самым доказали, что  $F(p)$  является изображением функции  $f(t)$ . ►

**Замечание 6.5.** Условие 2 в теореме 6.2 можно ослабить, потребовав, чтобы существовала последовательность радиусов  $R_n \rightarrow +\infty$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ |F(p)|, |p|=R_n, \operatorname{Re} p \geq \sigma \} = 0.$$

**Пример 6.5.** Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}}, \quad k > 0,$$

определенную в плоскости  $\mathbb{C}$  с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. В этой области функция  $w = \sqrt{p}$  имеет однозначную ветвь

$$\sqrt{p} = \sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

которая определяет ветвь, вообще говоря, многозначной функции  $F(p)$ . Функция  $F(p)$  удовлетворяет условиям теоремы 6.2 и потому является изображением. Действительно, выполнение первых двух условий очевидно, так как  $\sqrt{p}$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$  не имеет ни особых точек, ни нулей, а функция  $\exp(-k\sqrt{p})$  в этой полуплоскости ограничена. Далее, если  $p = \sigma + i\eta$ ,  $\sigma > 0$ , то

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}} \right| &= \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{\sigma^2 + \eta^2}} \exp \left[ -\sqrt[4]{\sigma^2 + \eta^2} \cos \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sigma} \right) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp \left( -\sqrt{\frac{\eta}{2}} \right), \end{aligned}$$

и функция  $F(p)$  абсолютно интегрируема вдоль прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma > 0$ .

Для вычисления интеграла Меллина рассмотрим контур  $\Gamma_R$ , изображенный на рис. 6.2. Он составлен из отрезка  $AB$  вертикальной прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma$ ,  $\sigma > 0$ , дуг  $BC$  и  $FA$  окружности  $|p| = R$ ,  $R > \sigma$ , отрезков  $CD$  и  $EF$  на разных берегах разреза и окружности  $C_\rho : |p| = \rho$ ,  $\rho < \sigma$ .

Так как внутри контура функция  $F(p)$  особых точек не имеет, получаем

$$\oint_{\Gamma_R} F(p) e^{pt} dp = 0.$$

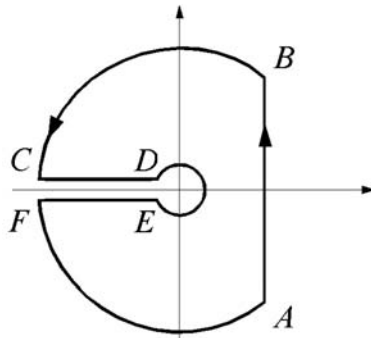


Рис. 6.2

Легко убедиться, что

$$\left| \int_{C_\rho} F(p) e^{pt} dp \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{t\rho} 2\pi\rho \rightarrow 0$$

при  $\rho \rightarrow 0$ . Так как  $\operatorname{Re} \sqrt{p} > 0$  в рассматриваемой области,  $|F(p)| \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ . По лемме Жордана

$$\int_{BC \cup FA} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0$$

при  $R \rightarrow +\infty$ . Таким образом, переходя к пределу при  $R \rightarrow +\infty$  и  $\rho \rightarrow 0$ , заключаем, что

$$\int_{AB} + \int_{CD} + \int_{EF} \rightarrow 0,$$

и интеграл Меллина равен разности между двумя интегралами, взятыми по отрицательной части действительной оси по разным берегам разреза. Интеграл по верхнему берегу разреза равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{i\sqrt{x}} e^{-ki\sqrt{x}} e^{-xt} d(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt - ki\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

так как на этом берегу  $\sqrt{p} = \sqrt{x e^{i\pi}} = i\sqrt{x}$ ,  $x > 0$ . Интеграл по нижнему берегу разреза равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{-i\sqrt{x}} e^{ki\sqrt{x}} e^{-xt} d(-x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt + ki\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

так как на этом берегу  $\sqrt{p} = \sqrt{x e^{-i\pi}} = -i\sqrt{x}$ ,  $x > 0$ . Разность между этими интегралами равна

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left( e^{ki\sqrt{x}} + e^{-ki\sqrt{x}} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt} 2 \cos k\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t} \cos ku \, du. \end{aligned}$$

Учитывая, что подынтегральная функция четна, а

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 t} \sin ku \, du = 0$$

как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t} \cos ku \, du &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 t} (\cos ku + i \sin ku) \, du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 t + iku} \, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(u - i\frac{k}{2t})^2 - \frac{k^2}{4t}} \, du = \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{k^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tu^2} \, du = \frac{1}{\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{k^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \, dv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-k\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}.$$

**Замечание 6.6.** Рассмотренный пример показывает, что непосредственное использование формулы Римана — Меллина является делом сравнительно трудоемким, так как приводит к вычислению сложных интегралов.

## 6.2. Основные теоремы операционного исчисления

### *Линейность*

Если  $f_1(t), \dots, f_k(t)$  — функции-оригиналы,  $f_i(t) \doteq F_i(p)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , то для любых числовых коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$  функция  $\alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_k f_k(t)$  есть функция-оригинал и

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^k \alpha_i F_i(p).$$

Это свойство есть констатация того, что преобразование Лапласа линейно (это верно для всех рассматриваемых нами интегральных преобразований, и мы не будем на этом останавливаться).

*Теорема подобия*

Если  $f(t)$  — функция-оригинал, то для любого положительного числа  $\alpha$  функция  $f(\alpha t)$  — тоже оригинал, и если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

◀ Выполнив в интеграле замену переменной  $\tau = \alpha t$ , получим

$$\begin{aligned} L[f(\alpha t)](p) &= \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p \frac{\tau}{\alpha}} \frac{d\tau}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

*Теорема смещения*

Если  $f(t)$  — функция-оригинал,  $f(t) \doteq F(p)$ , то для любого комплексного числа  $\lambda$  функция  $e^{\lambda t} f(t)$  — тоже оригинал и

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p - \lambda).$$

◀ Утверждение теоремы вытекает из следующей выкладки:

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda t} f(t)](p) &= \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p - \lambda). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

*Теорема запаздывания*

Если  $f(t)$  — функция-оригинал,  $f(t) \doteq F(p)$ , то для любого положительного числа  $a$  функция  $f(t - a)$  — тоже оригинал и

$$f(t - a) \doteq e^{-ap} F(p).$$

◀ Условия 1)–3) определения оригинала, очевидно, выполняются. Учитывая, что  $f(t - a) = 0$  при  $t < a$ , при помощи замены переменной  $\tau = t - a$  получаем

$$\begin{aligned} L[f(t - a)](p) &= \int_0^{+\infty} f(t - a)e^{-pt} dt = \\ &= \int_a^{+\infty} f(t - a)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p(\tau+a)} d\tau = \\ &= e^{-ap} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau = e^{-ap} F(p). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Замечание 6.7.** Теоремы сдвига и запаздывания являются двойственными. Однако если в теореме сдвига параметр  $\lambda$  — любое комплексное число, то в теореме запаздывания параметр  $a$  должен быть действительным положительным.

*Интегрирование оригинала*

Если  $f(t)$  — функция-оригинал,  $f(t) \doteq F(p)$ , то функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

является оригиналом и

$$g(t) \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

◀ Действительно, первые два условия для функции-оригинала, очевидно, выполняются. Проверим условие 3). Имеем

$$\begin{aligned} |g(t)| &= \left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t M e^{\sigma\tau} d\tau = \frac{M}{\sigma} (e^{\sigma t} - 1). \end{aligned}$$

Мы можем считать, что  $\sigma > 0$ . Тогда

$$|g(t)| \leq \frac{M'}{\sigma} e^{\sigma t}.$$

Отсюда, в частности, заключаем, что показатель роста функции  $g$  не превосходит  $\max\{\sigma(f), 0\}$ . Проверим формулу перехода к первообразной:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(\tau) dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) \frac{e^{-p\tau}}{p} d\tau = \frac{1}{p} F(p). \end{aligned}$$

Порядок интегрирования можно изменить потому, что несобственный двойной интеграл от функции  $f(\tau)e^{-pt}$  по угловой области  $0 < t < \infty, 0 < \tau < t$  сходится абсолютно. ►

#### *Дифференцирование оригинала*

Пусть функция  $f(t)$  непрерывна при  $t > 0$ , имеет производную всюду, кроме некоторого дискретного множества точек (т.е. множества, имеющего конечное число точек на любом конечном интервале). Если  $f(t)$  и  $f'(t)$  — функции-оригиналы,  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0),$$

где  $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ .

◀ Из поставленных условий вытекает равенство

$$f(t) = f(+0)\eta(t) + \int_0^t f'(\tau) d\tau.$$

Нам остается к функции  $f'(t)$  применить теорему об интегрировании оригинала и воспользоваться соотношением  $\eta(t) \doteq p^{-1}$ :

$$L[f(t)](p) = \frac{f(+0)}{p} + \frac{L[f'(t)](p)}{p},$$

что и приводит к нужному соотношению. ►

Отметим, что при дифференцировании оригинала главное, чтобы производная  $f'(t)$  была оригиналом и чтобы для нее была верна формула Ньютона — Лейбница.

**Пример 6.6.** Функция  $\sin(e^{x^2})$ , будучи непрерывной и ограниченной, является оригиналом. Однако  $f'(t) = 2xe^{x^2} \times \sin(e^{x^2})$  уже не будет оригиналом, так как имеет неограниченный рост. #

Дифференцирование оригинала может применяться многократно. Если функция  $f(t)$  имеет  $k - 1$  производную, непрерывную при  $t > 0$ , существует  $k$ -я производная всюду, кроме, быть может, некоторого дискретного множества, и если все эти производные являются оригиналами, то

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \dots - f^{(k-1)}(+0),$$

где  $f(t) \doteq F(p)$ .

#### *Интегрирование изображения*

Если функция  $f(t)$  — оригинал,  $f(t) \doteq F(p)$ , функция  $f(t)/t$  ограничена в окрестности 0, то она является оригиналом и

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(p) dp.$$

◀ Функция  $f(t)/t$  может не быть оригиналом только по одной причине: если она не ограничена при  $t \rightarrow +0$ . По условию

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p).$$

Проинтегрируем написанное равенство по  $p$  от точки  $p_0 =$

$= \xi + i\eta$  до  $\infty$  по отрезку горизонтальной прямой:

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{\infty} dp \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt &= \int_{\xi}^{+\infty} d\sigma \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\eta)t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_{\xi}^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\eta)t} d\sigma = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\eta t} dt \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\sigma t} d\sigma = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-(\xi+i\eta)t} dt = \int_{p_0}^{\infty} F(p) dp. \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования возможно, так как несобственный двойной интеграл сходится абсолютно. ►

#### *Дифференцирование изображения*

Если функция  $f(t)$  — оригинал,  $f(t) \doteq F(p)$ , то функция  $-tf(t)$  — тоже оригинал, причем

$$-tf(t) \doteq F'(p).$$

◀ Очевидно, что функция  $tf(t)$  является оригиналом, причем с тем же порядком роста, что и  $f(t)$ . Применим теорему об интегрировании изображения к функции  $\varphi(t) = tf(t)$ . Если  $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$ , то

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} \Phi(p) dp = F(p).$$

Дифференцируя по  $p$ , находим  $F'(p) = -\Phi(p)$ , что и доказывает это утверждение. ►

#### *Свертка оригиналов*

**Сверткой** двух функций-оригиналов  $f(t)$  и  $g(t)$  называют функцию

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Свертка оригиналов  $f$  и  $g$  является оригиналом, причем показатель роста свертки не превосходит максимального из показателей для  $f$  и  $g$ . Если  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $g(t) \doteq G(p)$ , то

$$(f * g)(t) \doteq F(p)G(p). \quad (6.5)$$

◀ Легко убедиться, что при  $t < 0$  свертка обращается в 0. Докажем, что свертка кусочно непрерывных функций непрерывна. Рассмотрим приращение свертки в произвольной точке  $t$ :

$$\begin{aligned} (f * g)(t + h) - (f * g)(t) &= \\ &= \int_0^{t+h} f(\tau)g(t + h - \tau)d\tau - \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_t^{t+h} f(\tau)g(t + h - \tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t f(\tau)[g(t + h - \tau) - g(t - \tau)]d\tau. \end{aligned}$$

На любом отрезке  $[0, T]$  функции  $f(t)$  и  $g(t)$  ограничены некоторым числом  $M$ . Поэтому при  $t < T$ ,  $|h| < T - t$  получаем

$$\begin{aligned} |(f * g)(t + h) - (f * g)(t)| &\leq \\ &\leq M^2h + M \int_0^t |g(t + h - \tau) - g(t - \tau)|d\tau = \\ &= M^2h + M \int_0^t |g(u + h) - g(u)|du. \end{aligned}$$

Непрерывность в точке  $t$  будет доказана, если мы докажем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t |g(u + h) - g(u)|du = 0. \quad (6.6)$$

Отметим, что это соотношение верно для непрерывно дифференцируемых функций, так как если  $|g'(u)| \leq K$  на отрезке  $[0, T]$ , то по теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\int_0^t |g(u+h) - g(u)| du \leq \int_0^T Kh du = KTh \rightarrow 0$$

при  $h \rightarrow 0$ . Для каждой интегрируемой функции  $g(t)$  и любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такую непрерывно дифференцируемую функцию  $\varphi(t)$ , что

$$\int_0^T |\varphi(t) - g(t)| dt \leq \varepsilon$$

(например,  $\varphi(t)$  — это частная сумма ряда Фурье для  $g(t)$ ). Но тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t |g(u+h) - g(u)| du &\leq \int_0^t |\varphi(u+h) - \varphi(u)| du + \\ &+ \int_0^t |\varphi(u) - g(u)| du + \int_0^t |\varphi(u+h) - g(u+h)| du \leq \\ &\leq \int_0^t |\varphi(u+h) - \varphi(u)| du + 2 \int_0^T |\varphi(u) - g(u)| du \leq \\ &\leq \int_0^t |\varphi(u+h) - \varphi(u)| du + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Выбирая достаточно малое  $h$  и учитывая гладкость  $\varphi$ , получаем

$$\int_0^t |g(u+h) - g(u)| du \leq 3\varepsilon,$$

что и завершает доказательство соотношения (6.6).

Следующая оценка показывает, что свертка имеет ограниченный рост, причем не выше роста  $f$  и  $g$ :

$$\left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_0^t M_1 e^{\sigma_1 \tau} M_2 e^{\sigma_2(t-\tau)} d\tau \leq M_1 M_2 t e^{\sigma t},$$

где  $\sigma_1 > \sigma(f)$ ,  $\sigma_2 > \sigma(g)$ ,  $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ .

Вычислим изображение для свертки

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau &= \\
 &= \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} f(\tau)g(t-\tau)dt = \\
 &= \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt} g(t-\tau)dt = \\
 &= \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p(u+\tau)} g(u)du = \\
 &= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_0^{+\infty} e^{-pu} g(u)du = F(p)G(p).
 \end{aligned}$$

Эти выкладки имеют смысл при  $\operatorname{Re} p > \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$ , так как тогда двойной несобственный интеграл от функции

$$e^{-pt} f(\tau)g(t-\tau) = [e^{-p\tau} f(\tau)][e^{-p(t-\tau)} g(t-\tau)]$$

в области  $t > 0, 0 < \tau < t$  сходится абсолютно. ►

**Замечание 6.8.** Из соотношения (6.5) следует, что свертка коммутативна,  $f * g = g * f$ , так как и та, и другая функция имеют одно и то же изображение, равное произведению изображений  $f$  и  $g$ .

**Замечание 6.9.** Теорема о свертке показывает, что произведение изображений снова является изображением.

**Замечание 6.10.** Если  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $g(t) \doteq G(p)$ , то

$$\begin{aligned}
 pF(p)G(p) &= [pF(p) - f(+0)]G(p) + f(+0)G(p) \doteq \\
 &\doteq (f' * g)(t) + f(+0)g(t)
 \end{aligned}$$

(в предположении, что  $f'(t)$  — оригинал). С учетом симметрии получаем две близкие формулы:

$$\begin{aligned}
 pF(p)G(p) &\doteq f(+0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \\
 pF(p)G(p) &\doteq g(+0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau.
 \end{aligned}$$

Каждую из этих формул называют *интегралом Дюамеля*.

*Предельные значения оригинала и изображения*

Для любой функции-оригинала  $f(t)$  с изображением  $F(p)$  выполняется равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(+0), \quad (6.7)$$

где предельный переход  $p \rightarrow \infty$  осуществляется внутри угловой области  $|\arg p| \leq \alpha < \pi/2$ .

◀ Утверждение сводится к случаю  $f(+0) = 0$ , для чего вместо функции  $f(t)$  достаточно рассмотреть функцию  $f_0(t) = f(t) - f(+0)\eta(t)$ , имеющую изображение  $F_0(p) = F(p) - f(+0)/p$ . При этом равенство (6.7) будет означать, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF_0(p) = 0.$$

Итак, пусть  $f(+0) = 0$ . Для произвольного  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $\delta > 0$ , что  $|f(t)| < \varepsilon \cos \alpha$  при  $0 < t < \delta$  ( $\alpha$  — угол раствора области,  $\alpha < \pi/2$ ). Тогда для  $p = \sigma + i\eta$ ,  $\sigma > \sigma_1 > \sigma(f)$ ,  $|\arg p| \leq \alpha$ , имеем  $|p| \cos \alpha \leq \sigma$  и

$$\begin{aligned} |pF(p)| &= |p| \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \\ &\leq |p| \left| \int_0^{\delta} f(t)e^{-pt} dt \right| + |p| \left| \int_{\delta}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \\ &\leq |p| \varepsilon \cos \alpha \int_0^{\delta} e^{-\sigma t} dt + |p| \int_{\delta}^{+\infty} M e^{\sigma_1 t} e^{-\sigma t} dt \leq \\ &\leq \frac{|p| \varepsilon \cos \alpha}{\sigma} + \frac{|p| M}{\sigma - \sigma_1} e^{-(\sigma - \sigma_1)\delta} \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{M \sigma}{(\sigma - \sigma_1) \cos \alpha} e^{-(\sigma - \sigma_1)\delta}. \end{aligned}$$

Видно, что число  $\sigma$  может быть выбрано настолько большим, что  $|pF(p)| < 2\varepsilon$ . Так как число  $\varepsilon$  выбиралось произвольно, то это значит, что  $pF(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  при условии, что  $|\arg p| \leq \alpha$ . ►

Если функция-оригинал  $f(t)$  с изображением  $F(p)$  имеет предел

$$f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t),$$

то также существует

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(+\infty),$$

где предельный переход  $p \rightarrow \infty$  осуществляется внутри угловой области  $|\arg p| \leq \alpha < \pi/2$ .

Доказательство этого соотношения проводится по той же схеме, что и для (6.7), а поэтому мы его опустим.

### 6.3. Изображения элементарных функций-оригиналов

*Таблица стандартных оригиналов и изображений*

При помощи установленных свойств преобразования Лапласа можно найти изображения для ряда элементарных функций-оригиналов. Как мы уже видели,  $\eta(t) \doteq p^{-1}$ . По теореме о дифференцировании изображения

$$t \doteq -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}, \quad t^2 \doteq -\left(\frac{1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3},$$

а в общем случае

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$$

(строго эту формулу можно доказать при помощи метода математической индукции). Та же формула для изображения степенной функции может быть получена при помощи теоремы об интегрировании оригинала:

$$1 \doteq \frac{1}{p},$$

$$t = \int_0^t 1 dt \doteq \frac{1}{p^2},$$

$$\begin{aligned}
 t^2 &= 2 \int_0^t t dt \doteq \frac{2}{p^3}, \\
 &\vdots \\
 t^n &= n \int_0^t t^{n-1} dt \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

По теореме смещения для любого комплексного числа  $\lambda$

$$e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \eta(t) \doteq \frac{1}{p - \lambda}.$$

Вспомним, что

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad \operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sh} \omega t &\doteq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \\
 \operatorname{ch} \omega t &\doteq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right] = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},$$

и мы приходим к формулам

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

В результате этих рассуждений мы получаем таблицу простейших оригиналов и их изображений:

$$\begin{array}{ll}
 t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}, & \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \\
 e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p - \lambda}, & \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \\
 t^n e^{\lambda t} \doteq \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}, & e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \\
 \text{sh } \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, & e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}. \\
 \text{ch } \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}, &
 \end{array}$$

### Составные оригиналы

С помощью теоремы запаздывания и функции Хевисайда можно находить изображения **составных оригиналов**, часто встречающихся в задачах электротехники и радиотехники. Отметим, что функция  $\eta(t - a) - \eta(t - b)$ ,  $a < b$ , имеет ступенчатый вид (рис. 6.3)

$$\eta(t - a) - \eta(t - b) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & a < t < b, \\ 0, & t > b. \end{cases}$$

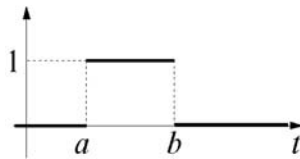


Рис. 6.3

Если функция  $f(t)$  задана как составная в виде

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & a_1 < t < a_2, \\ f_2(t), & a_2 < t < a_3, \\ \vdots \\ f_{k-1}(t), & a_{k-1} < t < a_k, \\ f_k(t), & t > a_k, \end{cases}$$

то при помощи запаздывающих функций Хевисайда ее можно представить как сумму

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k-1} f_i(t) [\eta(t - a_i) - \eta(t - a_{i+1})] + f_k(t) \eta(t - a_k).$$

При таком представлении переход к изображениям делается легче. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 6.7.** Рассмотрим функцию (рис. 6.4)

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 2 - t, & 1 < t < 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

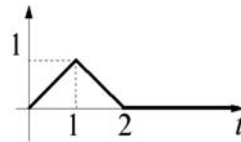


Рис. 6.4

Эту функцию можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= t[\eta(t) - \eta(t - 1)] + (2 - t)[\eta(t - 1) - \eta(t - 2)] = \\ &= t\eta(t) - (2t - 2)\eta(t - 1) + (t - 2)\eta(t - 2). \end{aligned}$$

По таблице оригиналов и изображений находим  $t \doteq p^{-2}$ , а по теореме запаздывания  $(t - a)\eta(t - a) \doteq e^{-ap}p^{-2}$ . Поэтому

$$f(t) \doteq \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2} = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p^2}.$$

**Пример 6.8.** Рассмотрим функцию (рис. 6.5)

$$f(t) = \begin{cases} 2t - t^2, & 0 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

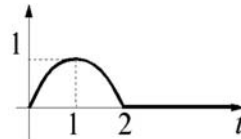


Рис. 6.5

Эту функцию можно представить в виде

$$f(t) = (2t - t^2)[\eta(t) - \eta(t - 2)] = (2t - t^2)\eta(t) - (2t - t^2)\eta(t - 2).$$

Первое слагаемое имеет изображение

$$2t - t^2 \doteq \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^3}.$$

Найдем изображение второго слагаемого:

$$\begin{aligned} (2t - t^2)\eta(t - 2) &= [2(u + 2) - (u + 2)^2]\eta(u)|_{u=t-2} = \\ &= -(2u + u^2)\eta(u)|_{u=t-2} \doteq -e^{-2p} \left( \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(t) &\doteq \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^3} + e^{-2p} \left( \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right) = \\ &= \frac{2}{p^2} (1 + e^{-2p}) - \frac{2}{p^3} (1 - e^{-2p}). \end{aligned}$$

### Замечание 6.11.

$$t - 1 \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}, \quad \text{но} \quad (t - 1)\eta(t - 1) \doteq \frac{e^{-p}}{p^2}.$$

#### *Периодические оригиналы*

Пусть  $f(t)$  — периодическая при  $t > 0$  функция-оригинал, т.е. для некоторого  $T > 0$  выполняется равенство  $f(t + T) = f(t)$ ,  $t > 0$ . Обозначим через  $f_0(t)$  функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Тогда легко убедиться в равенстве

$$f(t) = f_0(t) + f(t - T). \quad (6.8)$$

Действительно, при  $t < T$  имеем  $f(t - T) = 0$ , и равенство (6.8) по существу означает, что  $f(t) = f_0(t)$ . При  $t > T$  имеем  $f_0(t) = 0$ , и тождество (6.8) сводится к условию периодичности.

В равенстве (6.8) перейдем к изображениям, полагая, что  $f(t) \doteq F(p)$ , а  $f_0(t) \doteq F_0(p)$ :

$$F(p) = F_0(p) + F(p)e^{-pT}.$$

В результате получаем

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

**Пример 6.9.** Рассмотрим функцию  $f(t) = \{t\}$ , которая ставит в соответствие каждому действительному числу  $t > 0$  его дробную часть:  $f(t) = t - k$ , если  $k \leq t < k + 1$ ,  $k$  — целое. Эта функция периодическая с периодом  $T = 1$ , причем

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Согласно сказанному выше находим

$$\begin{aligned} f_0(t) &= t[\eta(t) - \eta(t - 1)], \\ F_0(p) &= \frac{1}{p^2} - \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \right) e^{-p}, \\ F(p) &= \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p(1 - e^{-p})}. \end{aligned}$$

## 6.4. Теоремы разложения

При восстановлении функций-оригиналов по изображению обычно используют таблицу оригиналов и изображений. Использование формулы обращения — дело трудное. Однако с ее помощью можно получить несколько практических результатов, которые называют *теоремами разложения* и которые могут помочь в задаче восстановления оригиналов.

**Теорема 6.3 (1-я теорема разложения).** Если функция  $F(p)$  аналитична в окрестности  $\infty$ , имеет в  $\infty$  нуль, то она является изображением. При этом, если

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p^{-n}$$

— ее разложение Лорана в окрестности  $\infty$ , то

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (6.9)$$

т.е. оригинал для изображения  $F(p)$  получается путем почленного перехода к оригиналам в ряде Лорана.

◀ Нам требуется показать, что ряд

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

сходится для любого действительного числа  $t$  и представляет собой функцию-оригинал. И кроме того, надо показать, что изображением этого оригинала является  $F(p)$ .

Пусть  $F(p)$  аналитична в области  $|p| > R$ . Выберем произвольное число  $R_1 > R$ . Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R_1^{-n}$$

сходится (это — значение функции  $F(p)$  в точке  $R_1$ ) и потому последовательность  $\{|a_n| R_1^{-n}\}$  ограничена, т.е.  $|a_n| \leq M R_1^n$ .

Но тогда

$$|a_n| \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{M R_1 (R_1 t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

где выражение справа — это общий член ряда, сходящегося при любом значении  $t$ . По признаку сравнения ряд (6.9) сходится абсолютно для всех значений  $t$ . Более того,

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{MR_1(R_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} = MR_1 e^{R_1 t},$$

т.е. функция  $f(t)$  имеет ограниченный рост, а так как  $R_1 > R$  выбиралось произвольно, то порядок роста  $f(t)$  не превосходит  $R$ .

Функция  $f(t)$ , представляемая степенным рядом, конечно, непрерывна. При  $t < 0$  полагаем  $f(t) = 0$ . Найдем изображение этой функции. Для этого нам достаточно показать, что в равенстве

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left( \sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) dt = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{k-1} dt \quad (6.10)$$

можно перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$  под знаком интеграла. Положим

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Тогда

$$|f_n(t)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \leq MR_1 e^{R_1 t}$$

при  $R_1 > R$ . Следовательно, если  $\operatorname{Re} p = \sigma \geq R_2$ , где  $R_2 > R_1$ , то

$$\begin{aligned} \max_n \left| \int_T^{+\infty} e^{-pt} f_n(t) dt \right| &\leq \max_n \int_T^{+\infty} e^{-\sigma t} |f_n(t)| dt \leq \\ &\leq MR_1 \int_T^{+\infty} e^{(R_1 - \sigma)t} dt \leq MR_1 \int_T^{+\infty} e^{-(R_2 - R_1)t} dt = \\ &= MR_1 \frac{e^{-(R_2 - R_1)T}}{R_2 - R_1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $T \rightarrow \infty$ . Значит, интеграл

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) e^{-pt} dt$$

сходится при  $\operatorname{Re} p \geq R_1$  равномерно по  $n$ . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) e^{-pt} dt,$$

и, переходя в равенстве (6.10) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем соотношение (6.9). ►

**Пример 6.10.** Функция  $\sin(1/p)$  аналитична всюду в  $\mathbb{C}$ , за исключением точки  $p = 0$ , являющейся для этой функции особой. По теореме 6.3 функция является изображением. При этом

$$\sin \frac{1}{p} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

**Теорема 6.4 (2-я теорема разложения).** Каждая рациональная функция  $F(p)$ , у которой степень числителя меньше степени знаменателя, является изображением, при этом

$$F(p) \doteq \sum_{k=1}^r \left( \sum_{j=1}^{\mu_k} A_{jk} \frac{t^{\mu_k-j}}{(\mu_k-j)!} \right) e^{p_k t}, \quad (6.11)$$

где  $p_1, \dots, p_r$  — полюсы функции  $F(p)$  с кратностями  $\mu_1, \dots, \mu_r$  соответственно. Коэффициенты  $A_{jk}$  могут быть вычислены по формуле

$$A_{jk} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} [(p-p_k)^{\mu_k} F(p)].$$

◀ У рациональной функции  $F(p)$  конечное число особых точек и все особые точки являются полюсами. Пусть главная часть лорановского разложения  $F(p)$  в полюсе  $p_k$  имеет вид

$$\gamma_k(p) = \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{A_{jk}}{(p-p_k)^{\mu_k-j+1}}$$

( $j=1$  соответствует наибольшей отрицательной степени, т.е. порядку полюса). Тогда функция

$$F_0(p) = F(p) - \sum_{k=1}^r \gamma_k(p)$$

является целой аналитической. При этом в  $\infty$  все главные части  $\gamma_k(p)$  обращаются в 0, функция  $F(p)$  по условию также обращается в 0. Значит,  $F_0(\infty) = 0$  и потому  $F_0 \equiv 0$  как ограниченная целая функция. Таким образом, получаем представление

$$F(p) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{A_{jk}}{(p-p_k)^{\mu_k-j+1}},$$

и нам остается в этом представлении в виде конечной суммы перейти к оригиналам почленно. Отметим, что для каждого  $k = 1, \dots, r$  функция  $(p-p_k)^{\mu_k} F(p)$  в окрестности точки  $p_k$  разлагается в ряд Тейлора

$$(p-p_k)^{\mu_k} F(p) = \sum_{j=1}^{\mu_k} A_{jk} (p-p_k)^{j-1} + \dots$$

Коэффициенты  $A_{jk}$  этого разложения могут быть найдены по стандартным формулам для коэффициентов Тейлора. ►

**Следствие.** Если  $F(p)$  — рациональная функция с простыми полюсами  $p_1, \dots, p_r$ , обращающаяся в 0 в точке  $\infty$ ,  $F(p) = A(p)/B(p)$  — несократимая дробь, то

$$F(p) \doteq \sum_{k=1}^r \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

◀ По условиям  $\mu_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , и мы получаем по теореме 6.4

$$F(p) \doteq \sum_{k=1}^r A_k e^{p_k t},$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) F(p) = \lim_{p \rightarrow p_k} A(p) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{(p - p_k)}{B(p)} = \\ &= A(p_k) \frac{1}{B'(p_k)}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Теорема 6.5 (3-я теорема разложения).** Пусть  $F(p)$  — функция комплексного переменного, аналитическая в  $\mathbb{C}$  всюду, кроме некоторой конечной или счетной последовательности точек  $p_1, p_2, \dots$ , являющихся ее изолированными особыми точками, причем все эти точки расположены в некоторой левой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \leq \sigma_0$ . Предположим:

1) существует такая последовательность радиусов  $\{R_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|F(p)|, |p| = R_n\} = 0;$$

2) функция  $F(p)$  абсолютно интегрируема вдоль любой вертикальной прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma$ ,  $\sigma > \sigma_0$ .

Тогда  $F(p)$  является изображением и

$$F(p) \doteq \sum_k \operatorname{res}\{F(p)e^{p t}, p = p_k\}. \quad (6.12)$$

◀ Условия теоремы позволяют применить теорему 6.2. Это значит, что  $F(p)$  является изображением, оригинал для которого может быть получен по формуле обращения. Рассмотрим контур  $\Gamma_n$ , состоящий из отрезка прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma$  и дуги  $C_n$  окружности  $|p| = R_n$ , которая расположена слева от указанной прямой (рис. 6.6). Интеграл

$$\oint_{\Gamma_n} F(p)e^{pt} dp,$$

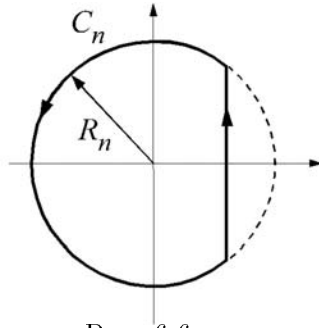


Рис. 6.6

взятый вдоль контура  $\Gamma_n$  против часовой стрелки, будет равен сумме вычетов функции по особым точкам  $p_k$ , попавшим внутрь контура. По лемме Жордана

$$\int_{C_n} F(p)e^{pt} dp \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \sum_k \operatorname{res}\{F(p)e^{pt}, p = p_k\},$$

что в силу теоремы 6.2 равносильно (6.12). ▶

**Замечание 6.12.** Нетрудно убедиться, что справа в формуле (6.11) стоит сумма вычетов функции  $F(p)e^{pt}$ , так как

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{pt}}{(p-p_k)^{\mu_k-j+1}}, p = p_k \right\} &= \frac{1}{(\mu_k-j)!} \frac{d^{\mu_k-j}}{dp^{\mu_k-j}} (e^{pt}) \Big|_{p=p_k} = \\ &= \frac{t^{\mu_k-j}}{(\mu_k-j)!} e^{p_k t}. \end{aligned}$$

Поэтому 2-я теорема разложения может быть переформулирована в том же виде, что и 3-я. Однако эти теоремы различны, так как под условия 3-й теоремы разложения подпадают только те рациональные функции, у которых степень числителя меньше степени знаменателя минимум на 2. Например, для изображения  $p^{-1}$  функции Хевисайда применима 2-я теорема разложения, но не 3-я, так как в 3-й теореме нарушается условие 2. С другой стороны, 2-я теорема разложения неприменима, если функция имеет существенно особые точки, даже если общее число особых точек конечно.

**Пример 6.11.** Рациональная функция

$$F(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)^2}$$

является изображением, и соответствующий оригинал может быть получен на основании как теоремы 6.4, так и теоремы 6.5. Имеем

$$\begin{aligned} F(p) &\doteq \operatorname{res}\{F(p), p=a\} + \operatorname{res}\{F(p), p=b\} = \\ &= \lim_{p \rightarrow a} [(p-a)F(p)e^{pt}] + \lim_{p \rightarrow b} \frac{d}{dp} [(p-b)^2 F(p)e^{pt}] = \\ &= \frac{e^{at}}{(a-b)^2} + \lim_{p \rightarrow b} \frac{d}{dp} \left( \frac{e^{pt}}{p-a} \right) = \\ &= \frac{e^{at}}{(a-b)^2} + \frac{te^{bt}}{b-a} - \frac{e^{bt}}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

## 6.5. Приложения операционного исчисления

Методы операционного исчисления могут быть использованы при интегрировании линейных дифференциальных уравнений и их систем. Применение основывается на теореме о дифференцировании оригинала. В случае уравнений в частных производных переход к изображениям осуществляется по

одной из переменных. Операционное исчисление может также применяться для решения некоторых типов интегральных уравнений.

*Линейные дифференциальные уравнения  
с постоянными коэффициентами*

Для начала рассмотрим случай дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Обозначим через

$$D[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x$$

произвольный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий в пространстве оригиналов. Наиболее просто решается задача Коши

$$\begin{cases} D[x](t) = f(t), \\ x^{(k)}(t_0) = x_0^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (6.13)$$

Так как коэффициенты не зависят от времени, мы, не теряя общности, можем считать, что  $t_0 = 0$ . В противном случае можно от функции  $x(t)$  перейти к функции  $y(t) = x(t + t_0)$ , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению с правой частью  $f(t + t_0)$  и начальным условиям  $y^{(k)}(0) = x_0^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Предположим, что искомая функция  $x(t)$  и ее производные до порядка  $n$  включительно, а также правая часть дифференциального уравнения  $f(t)$  являются функциями-оригиналами. Тогда в дифференциальном уравнении можно перейти к изображениям. Если  $x(t) \doteq X(p)$ , то по теореме о дифференцировании оригинала

$$\begin{aligned} x^{(k)}(t) &\doteq p^k X(p) - p^{k-1} x_0^0 - \dots - x_0^{k-1}, \\ k &= 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Поэтому в изображениях дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} (p^n X - p^{n-1} x_0^0 - \dots - x_0^{n-1}) + \\ + a_1 (p^{n-1} X - p^{n-2} x_0^0 - \dots - x_0^{n-2}) + \dots + a_n X = F(p), \end{aligned}$$

где  $f(t) \doteq F(p)$ . Перегруппируем левую часть:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)X - (p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1})x_0^0 - \dots - x_0^{n-1} = F(p).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} D(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \\ \Delta_0 D(p) &= D(p), \\ \Delta_k D(p) &= \frac{\Delta_{k-1} D(p) - \Delta_{k-1} D(0)}{p}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$D(p)X - \Delta_1 D(p)x_0^0 - \dots - \Delta_n D(p)x_0^{n-1} = F(p). \quad (6.14)$$

Мы получили в пространстве изображений линейное алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения  $X$ . Решая это уравнение, мы находим  $X$ , а по нему восстанавливаем искомую функцию  $x(t)$ .

**Пример 6.12.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x'' + x' = e^t, \\ x(1) = 1, \\ x'(1) = 2. \end{cases}$$

Так как начальные условия даны не при  $t = 0$ , ставим вспомогательную задачу для функции  $y(t) = x(t + 1)$ :

$$\begin{cases} y'' + y' = e^{t+1}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2, \end{cases}$$

в которой левая часть дифференциального уравнения не изменится, а правая часть и начальные условия корректируются преобразованием параллельного переноса.

Переходя к изображениям с учетом начальных условий, получаем

$$(p^2 Y - p - 2) + (pY - 1) = \frac{e}{p-1},$$

где  $y(t) \doteq Y(p)$ , или

$$(p^2 + p)Y = \frac{e}{p-1} + p + 3.$$

Решая полученное уравнение, находим изображение искомой функции  $Y$ :

$$Y = \frac{e}{(p-1)(p^2+p)} + \frac{p+3}{p^2+p}.$$

По 2-й теореме разложения (случай простых полюсов) находим функцию  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= \left( \frac{1}{2}e^{t+1} - e + \frac{1}{2}e^{-t+1} \right) + (3 - 2e^{-t}) = \\ &= \frac{1}{2}e^{t+1} + \left( \frac{e}{2} - 2 \right) e^{-t} + (3 - e). \end{aligned}$$

Наконец, сдвигом  $y(t)$  находим решение исходной задачи:

$$x(t) = y(t-1) = \frac{1}{2}e^t + \left( \frac{e}{2} - 2 \right) e^{-t+1} + (3 - e).$$

Отметим, что все функции  $\Delta_k D(p)$  являются многочленами,  $\deg \Delta_k D(p) = n - k$ . Многочлен  $D(p)$  является характеристическим для дифференциального уравнения поставленной задачи. Деля соотношение (6.14) на  $D(p)$ , находим

$$X = \frac{F(p)}{D(p)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta_k D(p)}{D(p)} x_0^k. \quad (6.15)$$

Каждое слагаемое в сумме справа является рациональной функцией со степенью числителя, меньшей степени знаменателя. Такая рациональная функция является изображением. Если  $f(t)$  — оригинал, то  $F(p)$  — корректно определенное изображение, и первое слагаемое в (6.15) справа также является изображением как произведение двух изображений. Значит, уравнение в задаче (6.13) имеет решение в изображениях. Мы приходим к выводу, что если правая часть дифференциального уравнения в задаче Коши является функцией-оригиналом, то и ее решение также будет функцией-оригиналом.

Рассмотрим задачу Коши с чисто нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} D[x](t) = f(t), \\ x^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (6.16)$$

Тогда в правой части (6.15) останется только одно слагаемое:

$$X = \frac{F(p)}{D(p)}.$$

Для перехода к оригиналам мы можем использовать теорему о свертке:

$$x(t) = (f * \pi)(t) = \int_0^t \pi(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

где  $\pi(t) \doteq D(p)^{-1}$ . Функцию  $\pi(t)$  в приложениях операционного исчисления называют *передаточной функцией*. Передаточная функция — это ядро интегрального представления оператора  $D^{-1}[x]$ , действующего в пространстве функций с нулевыми начальными условиями и являющегося обратным к дифференциальному оператору  $D[x]$ .

Наряду с задачей (6.16) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} D[x_1](t) = 1, \\ x_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (6.17)$$

Для этой задачи находим решение в изображениях:

$$X_1(p) = \frac{1}{pD(p)}.$$

Это соотношение используем для представления изображения передаточной функции

$$\frac{1}{D(p)} = pX_1(p).$$

Решение задачи (6.16) может быть теперь записано в виде

$$X(p) = \frac{F(p)}{D(p)} = pF(p)X_1(p).$$

Для перехода к оригиналам в последнем соотношении используем интеграл Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau \quad (6.18)$$

или

$$x(t) = \int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau + f(+0)x_1(t). \quad (6.19)$$

Формулы (6.18) и (6.19), выражающие решение  $x(t)$  задачи Коши (6.16) через решение вспомогательной задачи (6.17), называются **формулами Дюамеля**.

Если задача Коши сформулирована для однородного дифференциального уравнения ( $f(t) = 0$ ) с ненулевыми начальными условиями, то ее решение в изображениях согласно (6.15) имеет вид

$$X = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta_k D(p)}{D(p)} x_0^k.$$

В общем случае можно использовать принцип суперпозиции и свести задачу (6.13) к двум вспомогательным задачам: первая — с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} D[x_1](t) = f(t), \\ x_1^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

вторая — с однородным дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} D[x_1](t) = 0, \\ x_1^{(k)}(0) = x_0^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Сумма решений этих двух задач, как легко увидеть, будет решением (6.13).

**Пример 6.13.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x'' - x = \frac{1}{1 + e^t}, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 2. \end{cases}$$

Особенностью этой задачи является трудность в определении изображения правой части. Однако можно по принципу суперпозиции разбить решение на сумму  $x(t) = x_o(t) + x_n(t)$ , где  $x_o(t)$  — решение однородного уравнения с данными начальными условиями,  $x_n(t)$  — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

Функция  $x_o(t)$  находится без затруднений как решение задачи Коши

$$\begin{cases} x'' - x = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 2. \end{cases}$$

Мы получаем  $x_o(t) = \operatorname{ch} t + 2 \operatorname{sh} t$ .

Функцию  $x_n(t)$  можно выразить при помощи формулы Дюамеля

$$x_n(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t - \tau) d\tau.$$

Функция  $x_1(t)$  находится как решение задачи Коши

$$\begin{cases} x'' - x = 1, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Это решение имеет вид  $x_1(t) = \operatorname{ch} t - 1$ . Окончательно находим

$$x_n(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(t - \tau)}{1 + e^\tau} d\tau = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t \ln \frac{1 + e^t}{2} + \frac{1}{2} (e^t - 1) - \frac{te^t}{2}. \quad \#$$

Особенно эффективным операционное исчисление является тогда, когда правая часть дифференциального уравнения является составной функцией. Пусть  $f(t)$  задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} f_1(t), & 0 < t < a_2, \\ \vdots \\ f_{k-1}(t), & a_{k-1} < t < a_k, \\ f_k(t), & t > a_k. \end{cases}$$

При использовании традиционных методов мы должны были бы решить задачу на интервале  $(0, a_2)$  с правой частью  $f_1(t)$ . Далее полученное решение нужно было бы использовать для постановки новых начальных условий задачи на интервале  $(a_2, a_3)$  и решать эту задачу с правой частью  $f_2(t)$  и т.д.

С помощью запаздывающей функции Хевисайда мы можем представить составную функцию в виде суммы более простых оригиналов и воспользоваться свойством линейности преобразования Лапласа.

**Пример 6.14.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

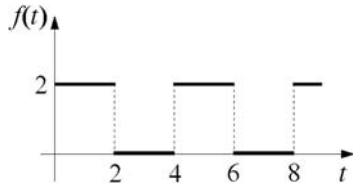


Рис. 6.7

с периодической правой частью  $f(t)$ , показанной на рис. 6.7.

Период правой части  $T = 4$ . Один „импульс“ описывается функцией  $f_0(t) = 2[\eta(t) - \eta(t - 2)]$ . Таким образом,

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-4p}} = \frac{2}{1 - e^{-4p}} \left( \frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p} \right) = \frac{2}{p(1 + e^{-2p})}.$$

Переходя к изображениям в дифференциальном уравнении, находим

$$(p^2 + 1)X = F(p) + p \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{F(p)}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Оригинал для изображения  $F(p)/(p^2 + 1)$  можно записать в виде ряда

$$\begin{aligned} \frac{F(p)}{p^2 + 1} &= \frac{2}{p(p^2 + 1)(1 + e^{-2p})} = \frac{2}{p(p^2 + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2kp} \doteq \\ &\doteq 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - \cos(t - 2k)] \eta(t - 2k). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$x(t) = \cos t + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - \cos(t - 2k)] \eta(t - 2k).$$

Отметим, что сумма в представлении решения в каждой точке  $t > 0$  имеет лишь конечное число ненулевых слагаемых и потому это представление корректно. Решение можно преобразовать в виде суммы периодической части с периодом 4, связанной с периодичностью правой части, и некоторой аперидической части. Такое представление, впрочем, не единственно. #

Общее решение линейного дифференциального уравнения может быть найдено как решение задачи Коши с произвольными начальными условиями.

**Пример 6.15.** Найдем общее решение уравнения  $x'' + x = \sin t$ . Для этого поставим задачу Коши

$$\begin{cases} x'' + x = \sin t, \\ x(0) = c_1, \\ x'(0) = c_2. \end{cases}$$

Переходя к изображениям, получаем

$$p^2 X - pc_1 - c_2 + X = \frac{1}{p^2 + 1} \iff (p^2 + 1)X = pc_1 + c_2 + \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Решая это уравнение, находим изображение искомой функции

$$X = \frac{p}{p^2 + 1}c_1 + \frac{c_2}{p^2 + 1} + \frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Переходя к оригиналам, получаем решение, зависящее от параметров  $c_1$  и  $c_2$ :

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t),$$

где

$$\frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) \doteq \frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Отметим, что общее решение неоднородного уравнения естественным образом распадается на сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. #

Решение другого вида задач для обыкновенного дифференциального уравнения может быть получено на основе общего решения.

**Пример 6.16.** Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} x'' + x = \sin t, & 0 < x < 1, \\ x(0) = 0, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

На основе общего решения, полученного в предыдущем примере, получаем

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t).$$

Подставляя краевые условия, получаем систему алгебраических линейных уравнений относительно постоянных  $c_1$  и  $c_2$ :

$$x(0) = c_1 = 0,$$

$$x(1) = c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 + \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1) = 1.$$

Решая эту систему, находим

$$c_2 = \frac{2 - \sin 1 + \cos 1}{2 \sin 1}.$$

Отметим, что левое краевое условие можно было учесть сразу, а взамен правого поставить дополнительное начальное с произвольным значением.

*Системы дифференциальных уравнений*

Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных линейных уравнений проводится по той же схеме, что и одиночных уравнений. Если коэффициенты системы уравнений постоянны, то в изображениях мы получим систему линейных алгебраических уравнений. Проиллюстрируем это на примере.

**Пример 6.17.** Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \\ x(0) = 0, & y(0) = 0, \\ x'(0) = 1, & y'(0) = 0. \end{cases}$$

Полагая  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $y(t) \doteq Y(p)$ , переходим к изображениям:

$$\begin{cases} (p^2 X - 1) + pX + p^2 Y - Y = \frac{1}{p-1}, \\ pX + 2X - pY + Y = \frac{1}{p+1} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p^2 + p)X + (p^2 - 1)Y = \frac{1}{p-1} + 1, \\ (p+2)X - (p-1)Y = \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Решение полученной системы не составляет особого труда: может быть использован любой из известных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Получаем

$$\begin{cases} X = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2}, \\ Y = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}. \end{cases}$$

Переходя к оригиналам, например, при помощи 2-й теоремы

разложения, находим решение исходной задачи

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} \operatorname{sh} t + \frac{3}{4} t e^{-t}, \\ y(t) = \frac{3}{4} t \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Отметим, что любая система дифференциальных уравнений может быть приведена к нормальному виду, т.е. преобразована в систему первого порядка по каждой неизвестной функции, разрешенную относительно производных. В нашем случае мы получаем систему, которая в векторной форме записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Переходя к изображениям, получаем

$$pX - \mathbf{x}^{(0)} = AX + F$$

или

$$(pE - A)X = \mathbf{x}^{(0)} + F,$$

где  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ . Матрица  $pE - A$  обратима для каждого значения  $p$ , для которого  $\det(pE - A) \neq 0$ , т.е. для всех значений  $p$ , кроме характеристических. Обратная матрица будет иметь своими элементами рациональные функции от  $p$ , являющиеся изображениями (особыми точками будут только характеристические числа, которых имеется конечное число). Поэтому получаем

$$X = (pE - a)^{-1} \mathbf{x}^{(0)} + (pE - a)^{-1} F.$$

Имея в виду, что матричные произведения справа — это суммы попарных произведений, переходим к оригиналам при помощи теоремы о свертке:

$$x(t) = R(t) \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t R(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau,$$

где  $R(t)$  — оригинал для матрицы-изображения  $(pE - A)^{-1}$ . Матрица-оригинал  $R(t)$  — это резольвента системы, или нормальная фундаментальная система решений соответствующей однородной системы: если мы положим  $\mathbf{f} \equiv 0$  и  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$ , где 1 стоит на  $k$ -м месте, то в качестве решения получим  $k$ -й столбец матрицы  $R(t)$ .

**Пример 6.18.** Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x' = x - y + \sin t, \\ y' = x + y + \cos t - \sin t - e^t, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Для этой задачи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t - e^t \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}(pE - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} p-1 & 1 \\ -1 & p-1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \begin{pmatrix} p-1 & -1 \\ 1 & p-1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

и резольвентой задачи является

$$\begin{aligned}R(t) &= \begin{pmatrix} L^{-1} \left( \frac{p-1}{(p-1)^2+1} \right) & -L^{-1} \left( \frac{1}{(p-1)^2+1} \right) \\ L^{-1} \left( \frac{1}{(p-1)^2+1} \right) & L^{-1} \left( \frac{p-1}{(p-1)^2+1} \right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Следовательно, решение имеет вид

$$\begin{aligned}x(t) &= e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t e^{t-\tau} \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau) \\ \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t - e^t \end{pmatrix} dt = \\ &= \begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Отметим, что предложенное решение — не самое удачное, так как проще было бы непосредственно вычислить изображение  $X(p)$  решения  $x(t)$ .

*Дифференциальные уравнения  
с переменными коэффициентами*

Операционное исчисление может быть полезно при интегрировании обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, если эти коэффициенты являются многочленами. При переходе к изображениям диф-

ференцирование оригинала превращается в умножение на параметр  $p$ , а умножение оригинала на независимую переменную — в дифференцирование изображения. Поэтому при переходе к изображениям в дифференциальном уравнении с полиномиальными коэффициентами порядок уравнения и степень коэффициентов меняются местами, т.е. в изображениях мы получим уравнение, порядок которого будет равен максимальной степени коэффициентов, а степени коэффициентов будут не выше порядка исходного уравнения. Если максимальная степень коэффициентов меньше порядка исходного уравнения, мы получим в изображениях уравнение меньшего порядка, которое легче решить.

**Пример 6.19.** Рассмотрим задачу Коши для уравнения Бесселя нулевого порядка

$$\begin{cases} tx'' + x' - \lambda^2 tx = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Полагая, что  $x(t) \doteq X(p)$ , находим:

$$\begin{aligned} tx &\doteq -X', \\ x' &\doteq pX - 1, \\ x'' &\doteq p^2X - p, \\ tx'' &\doteq -(p^2X - p)' = 1 - p^2X' - 2pX. \end{aligned}$$

В результате мы получаем в изображениях дифференциальное уравнение первого порядка

$$1 - p^2x' - 2pX + pX - 1 + \lambda^2X' = 0,$$

или

$$(\lambda^2 - p^2)X' - pX = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его обычными методами, получаем

$$X(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 - \lambda^2}},$$

где выбирается ветвь корня, имеющая на действительной оси при  $p > \lambda$  положительные значения.

Значение постоянной интегрирования  $C$  может быть найдено при помощи предельных значений для изображения

$$C = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} pX(p) = \lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 1.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - \lambda^2}}.$$

Это изображение является аналитической функцией в окрестности  $\infty$ . Поэтому оригинал может быть найден по 1-й теореме разложения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^2 - \lambda^2}} &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\lambda^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\lambda^{2n}}{p^{2n+1}} \doteq \\ &\doteq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = I_0(\lambda t). \end{aligned}$$

### *Уравнения в частных производных*

Операционный метод эффективно работает с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных параболического и гиперболического типов. Преобразование проводится по переменной  $t$ , которая, как правило, предста-

влетает собой время (или может интерпретироваться как время). Такое преобразование позволяет понизить размерность задачи на 1.

**Пример 6.20.** Найдем распределение температуры в тонком полубесконечном стержне с изолированной боковой поверхностью, если его начальная температура равна 0 по всей длине, а на торце поддерживается постоянная температура  $u_0$ .

Пусть  $u(x, t)$  — температура стержня в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$  ( $x = 0$  соответствует левому концу стержня, толщиной стержня пренебрегаем). Если коэффициент теплопроводности стержня постоянен по всей его длине и равен  $a$ , то процесс распределения теплоты по стержню приводит к следующей задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u'_t = au''_{xx}, & t > 0, \quad x > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0. \end{cases}$$

Рассматривая неизвестную функцию  $u(x, t)$  как оригинал преобразования Лапласа по  $t$ , зависящий от параметра  $x$ , переходим к изображениям

$$\begin{cases} pU(x, p) = aU''_{xx}(x, p), & x > 0, \\ U(0, p) = \frac{1}{p}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, p) = 0. \end{cases}$$

Мы получили краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Решая эту задачу, находим

$$U(x, p) = \frac{1}{p} \exp\left(-\sqrt{p} \frac{x}{\sqrt{a}}\right).$$

По изображению восстанавливаем функцию-оригинал

$$u(x, t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right),$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz.$$

### *Интегральные уравнения*

Операционное исчисление может использоваться для решения *интегральных уравнений типа свертки*, имеющих вид

$$\int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (6.20)$$

или

$$x(t) + \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (6.21)$$

Такого рода уравнения часто возникают в задачах математической физики. В уравнениях (6.20) и (6.21)  $x(t)$  — неизвестная функция,  $k(t)$  и  $f(t)$  — некоторые заданные функции. В теории интегральных уравнений уравнение (6.20) называют *уравнением I рода*, а уравнение (6.21) — *уравнением II рода*.

Предполагая, что ядро  $k(t)$  и правая часть  $f(t)$  являются оригиналами преобразования Лапласа, можем перейти к изображениям. Сначала остановимся на уравнении I рода. В изображениях получим

$$K(p)X(p) = F(p),$$

где  $k(t) \doteq K(p)$ ,  $x(t) \doteq X(p)$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ . Значит,

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p)}. \quad (6.22)$$

Правая часть соотношения (6.22) может не быть изображением. В этом случае интегральное уравнение I рода не имеет решений в классе функций-оригиналов преобразования Лапласа. Отметим, что уравнение I рода может не иметь решений и в более широких классах функций.

Уравнение II рода (6.21) в изображениях приводит к равенству

$$X(p) + K(p)X(p) = F(p),$$

из которого находим

$$X(p) = \frac{F(p)}{1 + K(p)} = F(p) - \frac{K(p)}{1 + K(p)}F(p).$$

Функция  $K(p)/[1 + K(p)]$  всегда является изображением. Если  $q(t)$  — оригинал этого изображения, то решение уравнения (6.21) можно записать через свертку:

$$x(t) = f(t) - \int_0^t q(t - \tau)f(\tau) d\tau. \quad (6.23)$$

**Пример 6.21.** Найдём решение уравнения

$$\int_0^t (t - \tau)^{-\lambda} x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 < \lambda < 1,$$

предполагая, что функции  $f(t)$  и  $f'(t)$  являются оригиналами.

Ядро интегрального уравнения является функцией-оригиналом, причем

$$t^{-\lambda} \doteq \frac{\Gamma(1-\lambda)}{p^{1-\lambda}}.$$

Поэтому для изображения искомой функции (если, конечно, она является оригиналом, в чем мы убедимся далее) получаем

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p)} = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{1}{p^\lambda} pF(p).$$

С помощью интеграла Дюамеля находим оригинал  $x(t)$ :

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(\lambda)} \left[ t^{\lambda-1} f(+0) + \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f'(\tau) d\tau \right].$$

**Пример 6.22.** Найдем решение уравнения II рода с произвольной правой частью

$$x(t) + \int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t).$$

Здесь ядром уравнения является функция  $k(t) = t$ , имеющая изображение  $K(p) = p^{-2}$ . Поэтому

$$\frac{K(p)}{1+K(p)} = \frac{1}{p^2+1},$$

следовательно,  $q(t) = \sin t$ . По формуле (6.23) находим решение уравнения в виде свертки с известным ядром:

$$x(t) = f(t) - \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

### 6.6. Контрольные вопросы и упражнения

6.1. Является ли функция  $f(t) = |t - 1|^{-1}\eta(t)$  оригиналом преобразования Лапласа ?

6.2. Существуют ли функции-оригиналы преобразования Лапласа, не имеющие изображения ?

6.3. Согласно линейности преобразования Лапласа получаем

$$L \left[ \frac{1 - e^t}{t} \right] = L \left[ \frac{1}{t} \right] - L \left[ \frac{e^t}{t} \right].$$

Верно ли такое утверждение ?

6.4. Можно ли распространить каким-либо образом теорему подобия на случай  $\alpha < 0$  ?

6.5. Докажите, что если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$e^{\beta t} f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F \left( \frac{p - \beta}{\alpha} \right).$$

6.6. Пусть  $F(p)$  — изображение преобразования Лапласа. Является ли изображением функция  $F^{(n)}(p)$  ?

6.7. Докажите, что если  $f(t) \doteq F(p)$ , то

$$\frac{f(t)}{t^2} \doteq \int_p^\infty \int_s^\infty F(\rho) d\rho ds$$

(при условии, что  $f(t)t^{-2}$  — оригинал).

6.8. Можно ли каким-либо образом распространить теорему запаздывания на случай отрицательного параметра ?

6.9. Докажите, что для любого действительного числа  $\lambda$

$$t^\lambda \doteq \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{p^{\lambda+1}}.$$

6.10. Докажите лемму Жордана.

6.11. Докажите следующую *теорему Эфроса*. Пусть  $\varphi(t, \alpha)$  — функция, которая для каждого  $\alpha > 0$  является оригиналом по переменной  $t$ , причем изображение ее можно представить в виде

$$\varphi(t, \alpha) \doteq \Phi(p)e^{-\alpha\psi(p)},$$

где функция  $\psi(p)$  отображает некоторую правую полуплоскость  $\operatorname{Re} p > 0$  в себя. Тогда для любого оригинала  $f(t)$ ,  $f(t) \doteq F(p)$  верно равенство

$$\int_0^{+\infty} f(\alpha)\varphi(t, \alpha)d\alpha \doteq F(\psi(p))\Phi(p).$$

6.12. Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ . Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right) d\tau \doteq \frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}.$$

6.13. Выясните, является ли изображением функция

$$F(p) = \frac{1}{p(1+e^p)}.$$

Если да, найдите соответствующий ей оригинал.

**Указание.** Проанализируйте пример 6.14.

6.14. Докажите, что для любого изображения  $K(p)$  функция  $K(p)/[1+K(p)]$  также является изображением.

6.15. Используя операционное исчисление, решите следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u'_x(0, t) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0. \end{cases}$$

### 3. Основные правила операционного исчисления

#### *Основные теоремы*

Наименование	Формула
Преобразование Лапласа	$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$
Преобразование Меллина	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$
Линейность	$\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(t) \doteq \sum_{i=1}^k \alpha_i F_i(p)$
Теорема подобия	$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0$
Теорема смещения	$e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}$
Теорема запаздывания	$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad \tau > 0$
Дифференцирование оригинала	$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0)$
Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p)$

Наименование	Формула
Дифференцирование изображения	$-t f(t) \doteq F'(p)$
Интегрирование изображения	$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(p) dp$
Теорема о свертке	$f(t) * g(t) \doteq F(p)G(p)$
Предельные соотношения	$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(+0),$ $ \arg p  \leq \alpha < \frac{\pi}{2},$ $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(+\infty),$ $ \arg p  \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

*Оригиналы и изображения*

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$t^\nu \doteq \frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}} \quad (\nu \in \mathbb{R})$$

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\text{sh } \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$\text{ch } \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p - \lambda}$$

$$t^n e^{\lambda t} \doteq \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$$

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$$

$$e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$$

$$t^n \sin \omega t \doteq \frac{n! \operatorname{Im}[(p + \omega i)^{n+1}]}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \\ (n \in \mathbb{N})$$

$$t^n \cos \omega t \doteq \frac{n! \operatorname{Re}[(p + \omega i)^{n+1}]}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \\ (n \in \mathbb{N})$$

$$\sin \omega \sqrt{t} \doteq \frac{\omega \sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{-\frac{\omega^2}{4p}}$$

$$\frac{\cos \omega \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{\omega^2}{4p}}$$

$$\text{sh } \omega \sqrt{t} \doteq \frac{\omega \sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{\frac{\omega^2}{4p}}$$

$$\frac{\text{ch } \omega \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\frac{\omega^2}{4p}}$$

$$\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \doteq e^{-\lambda\sqrt{p}} \\ (\lambda > 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\lambda\sqrt{p}} \\ (\lambda > 0)$$

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

$$J_0(2\sqrt{\lambda t}) \doteq \frac{1}{p} e^{-\frac{\lambda}{p}}$$

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> . . . . .	5
<b>Основные обозначения</b> . . . . .	6
<b>Вопросы для самопроверки</b> . . . . .	8
<b>Введение</b> . . . . .	10
<b>1. Цилиндрические функции</b> . . . . .	13
1.1. Уравнение Бесселя . . . . .	13
1.2. Цилиндрические функции I рода (функции Бесселя) . . . . .	16
1.3. Цилиндрические функции II рода . . . . .	23
1.4. Цилиндрические функции III рода . . . . .	28
1.5. Модифицированные цилиндрические функции . . . . .	30
1.6. Контрольные вопросы и упражнения . . . . .	33
<b>2. Задача Штурма — Лиувилля</b> . . . . .	35
2.1. Постановка задачи . . . . .	35
2.2. Линейные дифференциальные операторы 2-го порядка . . . . .	38
2.3. Обращение оператора Штурма — Лиувилля . . . . .	40
2.4. Контрольные вопросы и упражнения . . . . .	49
<b>3. Сингулярная задача Штурма — Лиувилля</b> . . . . .	51
3.1. О постановке задачи . . . . .	51
3.2. Собственные функции сингулярной задачи . . . . .	53
3.3. Разложение по собственным функциям . . . . .	62
3.4. Граничные условия для сингулярного конца . . . . .	70
3.5. Двусторонняя сингулярная задача . . . . .	73
3.6. Контрольные вопросы и упражнения . . . . .	77

---

<b>4. Разложения по функциям Бесселя</b> . . . . .	79
4.1. Разложение на промежутке $[a, +\infty)$ . . . . .	80
4.2. Разложение на промежутке $(0, a]$ . . . . .	82
4.3. Разложение на промежутке $(0, +\infty)$ . . . . .	90
<b>5. Интегральные преобразования</b> . . . . .	97
5.1. Общие положения . . . . .	97
5.2. Интегральное преобразование для линейного дифференциального оператора 2-го порядка . . . . .	99
5.3. Интегральное преобразование на отрезке . . . . .	104
5.4. Интегральное преобразование на полуограниченном или неограниченном интервале . . . . .	110
5.5. Основные интегральные преобразования на неограниченных интервалах . . . . .	121
5.6. Применение интегральных преобразований на примере некоторых задач математической физики . . . . .	135
5.7. Контрольные вопросы и упражнения . . . . .	150
<b>6. Операционное исчисление</b> . . . . .	153
6.1. Преобразование Лапласа . . . . .	154
6.2. Основные теоремы операционного исчисления . . . . .	166
6.3. Изображения элементарных функций-оригиналов . . . . .	176
6.4. Теоремы разложения . . . . .	181
6.5. Приложения операционного исчисления . . . . .	188
6.6. Контрольные вопросы и упражнения . . . . .	209
<b>Приложения</b> . . . . .	211
1. Гамма-функция Эйлера . . . . .	211
2. Интеграл Римана — Стильтьеса . . . . .	214
3. Основные правила операционного исчисления . . . . .	217
<b>Список рекомендуемой литературы</b> . . . . .	220
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	223
<b>Латинский алфавит</b> . . . . .	225
<b>Греческий алфавит</b> . . . . .	225