Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(для студентов ФН12-71, 4-й курс)

Москва, 2018

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Общее понятие динамической системы

Процессы, развивающиеся во времени. Понятие детерминированной системы. Примеры. Общее понятие динамической системы. Системы непрерывные и дискретные. Потоки и каскады. Системы сосредоточенные и распределенные. Потоки и каскады. Модификации (полупотоки и полукаскады). Терминология (орбиты, полуорбиты, периодические и стационарные точки, инвариантные множества)

Среди огромной массы математических моделей, используемых в самых различных областях современной науки, выделяются модели, описывающие изменение тех или иных процессов во времени. Смысл таких моделей — предсказание дальнейшего развития процесса, позволяющее минимизировать негативные последствия такого развития или, наоборот, максимизировать возможные выгоды. Такие предсказания могут носить разный характер, но можно выделить два главных подхода. При первом подходе исходят из того, что текущее состояние процесса и, возможно, его состояние в прошлом, однозначно определяют его развитие в будущем. В этом случае говорят о детерминированных моделях. При втором подходе детерминированный характер развития не предполагается, сказать, как будет развиваться конкретное проявление процесса, нельзя (например, нельзя заранее сказать, сколько проработает ваш смартфон до первой поломки). Однако предполагается, что рассматриваемый процесс наблюдается часто и что часто тех или иных сценариев развития в массе конкретных проявлений процесса носит достаточно определенный характер. Такой подход приводит к статистическим, или вероятностным, моделям. В этом случае, не имея возможности предсказать конкретное течение процесса, можно делать заключения о поведении крупных групп (партиях) таких процессов: нет возможности предсказать, как долго будет работать смартфон, но можно рассчитать, какая доля в крупной партии смартфонов проработает, например, не менее 5 лет. Информация бесполезна конкретному потребителю, но очень важна производителю.

В математике детерминированные модели привели к понятию динамической системы.

Динамическая система — совокупность трех объектов:

I. Фазовое пространство, представляющее собой некое множество X, элементы которого определяют конкретные состояния системы. Это множество может иметь разную природу. Чтобы говорить о близости тех или иных состояний, множество X следует снабдить топологией. Таким образом, фазовое пространство в самом общем случае — это топологическое пространство. Желание измерять расхождение между разными состояниями приводит к необходимости введения расстояния, тогда X — метрическое пространство.

II. Время, которое может быть дискретным или непрерывным.

III. Закон эволюции, который позволяет определить состояние системы в заданный момент времени t по известным состояниям системы во все предыдущие моменты времени.

Упрощение: закон эволюции определяется каким-то одним моментом времени, т.е. знание состояния системы в некоторый момент времени t_0 позволяет определить состояние системы в любой момент времени $t > t_0$.

Упрощение позволяет свести описание динамической системы к функции вида $G(t, t_0, x_0)$, которая означает следующее: она определяет состояние системы $G(t, t_0, x_0)$ в момент времени t при условии, что в момент времени t_0 она имела состояние x_0. Функция (отображение) G определяется как $G\colon T \times T \times X \to X$, где T — множество моментов времени, в которые можно наблюдать состояние системы; X — фазовое пространство системы, т.е. совокупность возможных состояний системы (как эти состояния реализуются, в данном случае неважно). По своему смыслу отображение G обладает следующим важным свойством:

$$G(t, t_1, G(t_1, t_0, x_0)) = G(t, t_0, x_0),$$

которое называется групповым. Если обозначить $\tau_1 = t - t_1$, $\tau_0 = t_1 - t_0$ и преобразовать обозначение $G(t, t_0, x_0) \to G_\tau(x_0)$ (момент времени считаем фиксированным и выводим за пределы аргументов), то групповое свойство запишется так:

$$G_{\tau_1+\tau_0} = G_{\tau_1} \circ G_{\tau_0}.$$

При изучении функции G часто фиксируют все аргументы, кроме одного, в данном случае варьироваться могут t или x_0. Если варьируется t, а x_0 фиксировано, мы получаем описание развития процесса во времени (динамики) с данным начальным состоянием x_0. При этом используют такую терминологию:

- множество $\{x \in X\colon x = G(t, t_0, x_0\}$, $t \in T$ — траектория, или орбита;
- множество $\{x \in X\colon x = G(t, t_0, x_0,\ t \in T,\ t > 0\}$ — правая (положительная) полутраектория (полуорбита);
- множество $\{x \in X\colon x = G(t, t_0, x_0,\ t \in T,\ t < 0\}$ — левая (отрицательная) полутраектория (полуорбита);

Если $G(t, t_0, x_0)$ не зависит от t, т.е. $G(t, t_0, x_0) \equiv x_0$, то орбита называется стационарной точкой. Если функция $G(t, t_0, x_0)$ по t периодична, то траекторию называют периодической.

Множество M в фазовом пространстве X, состоящее из целых траекторий (является объединением некоторой совокупности траекторий), называется ***инвариантным***. Также можно ввести понятия ***положительно инвариантного*** и ***отрицатально инвариантного*** множеств.

Ключевой задачей современной теории динамических систем является описание асимптотического поведения системы, т.е. поведения системы на значительных промежутках времени.

1.2. Типы динамических систем

Дифференцирование потока. Система дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности. Восстановление потока по системе дифференциальных уравнений. Геометрические представления. Каскады и отображения. Необратимые дискретные системы. Связь дискретных систем с непрерывными. Виды распределенных систем: эвлюционные УрЧП, системы с запаздыванием, системы с интегральными соотношениями

Из группового свойства вытекает, что множество T должно быть числовой группой по сложению. На практике рассматривают два варианта: $T = \mathbb{R}$ (множество действительных чисел) и $T = \mathbb{Z}$ (множество целых чисел). Соответственно выделяют ***динамические системы непрерывного времени*** и ***динамические системы дискретного времени*** (часто просто говорят о непрерывных и дискретных системах). Для непрерывных динамических систем функцию G называют ***потоком***, для дискретных — ***каскадом***.

Вернемся к аргументу t_0. На самом деле это тоже аргумент. Однако можно выделить класс систем, для которых G можно рассматривать как отображение от только двух аргументов: x_0 и $\tau = t - t_0$, т.е. $G(t + \tau, t_0 + \tau, x_0) \equiv G(t, t_0, x_0)$. В этом случае говорят об ***автономных динамических системах***. Если же момент t_0 является существенным, то ***система неавтономная***.

Динамические системы также различаются по характеру фазового пространства Если состояние системы можно описать конечным набором числовых параметров (многие механические системы), то ее называют ***сосредоточенной***. Есть масса динамических систем, которые не могут быть описаны конечным набором числовых параметров (например, модели динамики сплошной среды). Их называют ***распределенными системами***.

Отметим, что функция G, описывающая систему, во многих случаях не известна, известны лишь некоторые закономерности или правила, по которым она определяется однозначно.

Непрерывная группа преобразований $\varphi^t(x)$ (фазовый поток). Дифференцируемые динамические системы.

Орбита (фазовая траектория). Векторное поле системы — поле векторов скорости орбит системы. Координатное представление — система дифференциальных уравнений. Восстановление фазового потока по векторному полю. Теорема существования и единственности.

Глобальные особенности. Пример: $\dot{x} = x^3$. Понятие локальной группы преобразований.

Неавтономные непрерывные системы. Расширенное фазовое пространство.

Первые интегралы. Выпрямление векторного поля.

Дискретная группа преобразований $\varphi^t(x)$ — каскад. Параметр t пробегает счетное множество. Обычно считают, что $t \in \mathbb{Z}$. Дискретные системы и отображения. Пример: $x_{n+2}+2x_{n+1}-3x_n = 0$. Необратимые дискретные системы.

2. ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

2.1. Линейные системы

Основные факты теории линейных систем. Положения равновесия линейных систем и их типы.

Система $\dot{x} = Ax + b$. Однородный случай $\dot{x} = Ax$. Структура общего решения системы: $x(t) = R(t)x_0$, где $R(t)$ — резольвентная (фундаменталдьная) матрица. Формула $R(t) = e^{At}$.

Преобразование линейных систем. Приведение к каноническому виду. Вычисление матричной экспоненты.

Как известно, для любого линейного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве L, все линейное пространство разделяется в прямую сумму корневых подпространств. Каждое корневое подпространство соответствует определенному собственному значению линейного оператора и имеет размерность, равную алгебраической кратности этого собственного значения. Комплексные корни характеристического уравнения берутся парами сопряженных, а корневое подпространство будет иметь размерность, равную суммарной кратности соответствующей пары комплексно сопряженных характеристических корней.

В случае однородной системы $\dot{x} = Ax$ матрицу A следует интерпретировать как матрицу линейного оператора. Его характеристические корни можно разделить на три группы: первая объединяет корни, которые в комплесной плоскости расположены левее мнимой оси (в левой полуплоскости), вторая — корни, расположенные на мнимой оси, третья — правее мнимой оси (в правой полуплоскости). Прямая сумма корневых подпространств, соответствующих характеристическим корням первой группы называется ***устойчивым подпространством***, второй группы — ***центральным подпространством***, третьей группы — ***неустойчивым подпространством***.

В рамках устойчивого (неустойчивого) подпространства можно выделить ***ведущее подпространство***, которое есть прямая сумма корневых подпространств, соответствующих характеристическим корням, расположенным в левой (правой) полуплоскости и имеющих в этой полуплоскости наименьшую по модулю действительную часть.

Например, для трехмерной системы $\dot{x} = Ax$, где A имеет характеристические корни -1, -2, -3, устойчивым является все пространство $\mathbb{R}^3$, неустойчивое и центральное подпространства нульмерны (проще говоря, отсутствуют). При этом ведущим будет одномерное подпространство, соответствующее собственному значению -1.

Типы двумерных линейных систем:

1. Два действительных собственных значения. Узел. Случай совпадающих корней: жорданов узел (одна жорданова клетка) и дикритический узел (две жордановы клетки).

2. Два комплексно-сопряженных корня с ненулевой действительной частью. Фокус.

3. Два действительных собственных значения разных знаков. Седло. Сепаратрисы. Устойчивое и неустойчивое подпространства.

4. Два комплексно-сопряженных чисто мнимых корня. Центр.

5. Вырожденный случай: нулевое собственное значение.

Трехмерные системы:

1. Устойчивый (неустойчивый) узел — три действительных корня одного знака или один действительный и два комплексных с тем же знаком действительной части и с ведущим подпространством, соответствующим действительному корню.

2. Устойчивый (неустойчивый) фокус — один действительный и два комплексных с действительной частью того же знака и ведущим подпространством, соответствующим паре комплексных корней.

3. Седло-фокус — один действительный характеристический корень, являющийся отрицательным (положительным и два комплексных корня с положительной (отрицательной) действительной частью. Устойчивое (неустойчивое) подпространство одномерно и соответствует действительному корню, неустойчивое (устойчивое) подпространство двумерно и соответствует паре комплексных корней.

Многомерные системы. Жорданова нормальная форма. Инвариантные подпространства.

Теорема 2.1. Решение системы $\dot{x} = Ax$ с начальным условием $x(0) = x_0$ удовлетворяет неравенству

$$Ce^{\lambda_{\min} t}\|x_0\| \leqslant \|x(t)\| \leqslant Ce^{\lambda_{\max} t}\|x_0\|,$$

где C — некоторая постоянная, связанная с матрицей A; $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — числа, удовлетворяющие условиям $\lambda_{\min} < \operatorname{Re}\lambda_i$, $\lambda_{\max} > \operatorname{Re}\lambda_i$; λ_i — собственные значения A.

Исследование корней характеристического уравнения: критерий Рауса — Гурвица. Уравнение $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, где $a_0 > 0$. Составляем матрицу Гурвица

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

в которой на диагонали стоят коэффициенты по убыванию степеней без старшего, а в каждом столбце индексы коэффициентов уменьшаются на единицу сверху вниз, причем при отсутствии коэффициента для данного индекса он заменяется нулем (т.е. считаем, что $a_k = 0$ при $k < 0$ и при $k > n$). Критерий Гурвица гласит, что все корни уравнения имеют отрицательные действительные части, если все угловые миноры матрицы Гурвица положительны (похоже на критерий положительной определенности квадратичной формы, но матрица несимметричная).

Частные случаи. При $n = 2$ уравнение $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, матрица

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Условия: $a_1 > 0$, $a_1 a_2 > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

При $n = 3$ уравнение $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, матрица

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Условия: $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.

Пример 2.1. Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Собственные векторы:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Взамен комплексных и сопряженных векторов выбираем действительную и мнимую части. Получаем матрицу перехода:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная матрица:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$x = C_1 e^{-2t}, \quad y = e^{-2t}(C_2 \cos t - C_1 \sin t), \quad z = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Тип точки покоя — устойчивый фокус.

2.2. Нелинейные системы

Топологическая эквивалентность. Теорема Гробмана — Хартмана. Анализ системы по первому приближению. Устойчивое и неустойчивое многообразия. Центральное многообразие. Задача гладкой линеаризации. Резонансы. Понятие устойчивости положения равновесия динамической системы.

Система $\dot{x} = f(x)$, $x \in G$, и $\dot{y} = g(y)$, $y \in \Omega$, топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon G \to \Omega$, переводящий траектории первой системы в траектории второй и сохраняющий направление движения по траекториям.

Пример 2.2. Системы $\dot{x} = f(x)$ и $\dot{x} = k(x)f(x)$ топологически эквивалентны, если $k(x) \geqslant c > 0$. В этом случае траектории систем совпадают, но изсменяется скорость движения про траекториям. Если же $k(x) \leqslant c < 0$, то по-прежнему траектории совпадают, но направление движения по траекториям разное. В этом случае системы не являются топологически эквивалентными.

Система $\dot{x} = f(x)$ в окрестности точки x_0 топологически локально эквивалентна системе $\dot{y} = g(y)$ в окрестности точки y_0, если существуют окрестности этих точек, в которых системы топологически эквивалентны.

Пример 2.3. Любая гладкая система в окрестности регулярной точки топологически локально эквивалентна простейшей линейной системе $\dot{y}_1 = 1$, $\dot{y}_i = 0$, $i = \overline{2,\, n}$.

Одним из важнейших понятий в теории динамических систем является понятие грубой системы. Под этим понимается то, что при достаточном малом изменении система не меняет своего качественного поведения, или, другими словами, близкие системы топологически эквивалентны. Для строгого определения грубости необходимо уточнить понятие близких систем.

Автономную систему можно интерпретировать как векторное поле. На классе гладких векторных полей на данном множестве (многообразии) можно ввести топологию. Например, на компактном многообразии (типа сферы) можно рассмотреть топологию, порожденную sup-нормой. В общем случае топологию не всегда удается задавать с помощью нормы, но есть более общие способы. Во всяком случае топология определяет то, что называется окрестностью того или иного элемента. Векторное поле X близко векторному полю Y, если Y находится в некоторой окрестности X. Векторное поле X грубое, если существует такая его окрестность, что любое векторное поле из этой окрестности топологически эквивалентно X.

Понятие грубости может быть локальным. В связи с этим говорят о грубых положениях равновесия. Положения равновесия системы грубое (особая точка векторного поля грубая), если существует такая окрестность этой системы, все элементы которой локально топологически эквивалентны исходной системе.

Говорят, что положение равновесия гиперболическое, если в нем линейное приближение не имеет собственных значений на мнимой оси. Согласно ляпуновской теории устойчивости, гиперболическое положение равновесия устойчиво (асимптотически) тогда и только тогда, когда все собственные числа линейного приближения находятся в левой полуплоскости. Это положение — основа метода Ляпунова исследования положений равновесия на устойчивость по первому приближению. Оно является следствие гораздо более сильного утверждения.

Теорема 2.2 (теорема Гробмана — Хартмана). Любая система в окрестности гиперболического положения равновесия локально топологически эквивалентна своему линейному приближению.

В частности, в случае гиперболического положения равновесия система и ее линейное приближение устойчивы или неустойчивы одновременно.

Как уточнение теоремы Гробмана — Хартмана можно интерпретировать следующий факт.

Теорема 2.3. Две системы в окрестности своих гиперболических положений равновесия топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их линейные приближения имеют одинаковые количества собственных значений в левой (правой) полуплоскости.

Из сформулированных утверждений вытекает, что гиперболическое положение равновесия является грубым, поскольку для близких систем знаки собственных значений сохраняются. В то же время, если система имеет собственное значение на мнимой оси, то малым изменением можно добиться смещения его в правую полуплоскость, а можно и в левую. Такое положение равновесия не может быть грубым. Таким образом, в действительности понятия «грубое положение равновесия» и «гиперболическое положение равновесия» совпадают. Впрочем, это совпадение — следствие удачного выбора топологии в пространстве векторных полей: изменение топологии изменяет смысл понятия грубости, но изменяет понятие гиперболичности.

Поведение системы в окрестности гиперболического положения равновесия аналогично поведению линейной системы в нуле. Есть аналоги устойчивого и неустойчивого подпространств. Здесь имеется в виду следующее. Существует инвариантное многообразие, размерность которого совпадает с количеством собственных значений в левой полуплоскости, причем соответствующие собственные векторы в положении равновесия касаются многообразия. Такое многообразие называется устойчивым. Аналогично понятие неустойчивого многообразия. В гиперболическом положении равновесия сумма размерностей двух многообразий совпадает с размерностью фазового пространства.

Если точка покоя не является гиперболической, т.е. есть собственные числа, в комплексной плоскости расположенные на мнимой оси, делать выводы о характере поведения в окрестности такой точки по линейному приближению нельзя. Необходимо включать слагаемые более высокого порядка (слагаемые многомерного тейлоровского разложения). Но какие? Можно включить весь дифференциал второго порядка, но часть слагаемых при этом не будут существенными. Кроме того, неясно, достаточно ли слагаемых 2-го порядка или надо добавлять слагаемые более высокого порядка.

Мы ограничимся более простым случаем нарушения грубости — случаем вырожденной линейной части, когда одно или оба собственных значения нулевые. Здесь дело связано с коммутатором векторных полей. И в данном случае систему удобно трактовать как векторное поле.

Предположим, что система $\dot{x} = f(x)$ имеет нулевое положение равновесия, т.е. $f(0) = 0$. Обозначим через A матрицу Якоби отображения f в нуле. Отображение f можно представить в виде

$$f(x) = Ax + H(x), \quad |H(x)| = O(|x|^p), \quad p > 1.$$

Рассмотрим замену переменных

$$x = y + P(y), \quad |P(y)| = O(|y|^r, \quad r > 1.$$

Отметим, что в некоторой олкрестности нуля указанное отображение по теореме об обратной функции обратимо, так что действительно можно говорить о локальной замене переменной.

Для указанноЙ замены находим

$$\dot{x} = \dot{y} + P'(y)\dot{y} = (E + P'(y))\dot{y},$$

откуда

$$\dot{y} = (E + P'(y))^{-1}\dot{x} = (E + P'(y))^{-1}(Ax + H(x)) = (E + P'(y))^{-1}\bigl(Ay + AP(y) + H(y + P(y))\bigr).$$

Матрицу $(E + P'(y))^{-1}$ и отображение $H(y + P(y)$ можно разложить по формуле Тейлора:

$$(E + P'(y))^{-1} = У - P'(y) + O(|P'(y)|^2 = У - P'(y) + O(|y|^{2r-2},$$
$$H(y + P(y)) = H(y) + O(H'(y)P(y)) = H(y) + O(|y|^{p+r-1}.$$

Используя эти разложения, находим

$$\dot{y} = Ay + AP(y) - P'(y)Ay + H(y) + O(|y|^{r+1}).$$

Мы видим, что замена переменных, во-первых, не изменяет в правой части слагаемых степени менее r, а во-вторых, слагаемые степени r изменяются по простому закону. Выражение $AP(y) - P'(y)Ay$ можно трактовать следующим образом. Рассмотрим векторное поле $\mathcal{A}$, которое в координатах y записывается линейным выражением Ay, а вектор-функцию $P(y)$ будет трактовать как запись векторного поля $\mathcal{P}$. Тогда запись $AP(y) - P'(y)Ay$ будет представлять собой коммутатор $[\mathcal{A}, \mathcal{P}]$ векторных полей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$.

Линейное векторное поле $\mathcal{A}$ порождает линейный оператор ad_A, которое переводит векторное поле X в векторное поле $[\mathcal{A}, X]$, т.е. $\mathrm{ad}_A X = [\mathcal{A}, X]$.

Так как векторное поле $\mathcal{A}$ линейное (в данной системе координат), то для любого полиномиального векторного поля X векторное поле $\mathrm{ad}_A X$ тоже полиномиальное, причем той же степени. Выделим линейное пространство H^m векторных полей, координаты которых в заданной системе координат представляют собой однородные многочлены степени m. Это линейное пространство конечномерное, а его базис образуют векторные поля вида $x^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ (здесь α — мультииндекс).

Линейный оператор ad_A отображает линейное пространство H^m в себя. Положим $F^m = \mathrm{ad}_A(H^m)$ (т.е. F^m — образ линейного оператора ad_A) и пусть $F^m \oplus G^m = H^m$ (G^m — прямое дополнение к F^m). Для любого векторного поля $X \in F^m$ существует такой однородный векторный многочлен $P(y)$, что $\mathrm{ad}_A P = -X$. При замене $x = y + P(y)$ из тейлоровского разложения $f(x)$ будет убрано слагаемое X. В результате из правой части с тейлоровским разложением общего вида мы можем получить правую часть с разложением специального вида.

Теорема 2.4 (о нормальных формах). Пусть X — векторное поле гладкости C^r, удовлетворяющее условиям $X(0) = 0$, $X'(0) = A$ (здесь X' — Матрица Якоби представления векторного поля). Тогда в некоторой окрестности нуля существует гладкая (аналитическая) замена переменных $x \mapsto y$, которая преобразует векторное поле X в векторное поле $\tilde{X}$ вида

$$\tilde{X} = A + g_2 + \ldots + g_r + o(|y|^r), \tag{2.1}$$

где $g_k \in G^k$, $k = \overline{1,\, r}$. #

Доказательство теоремы строится на последовательно выполняемой замене переменных указанного выше вида, которая применяется последовательно по степеням k тейлоровском разложения X. Если X_k объединяет слагаемые степени k в тейлоровском разложении X, то $X_k \in H^k$

и имеет представление $X_k = f_k + g_k$, где $f_k \in H^k$, $g_k \in G^k$. то заменой переменных составную часть f_k можно убрать, оставив только g_k.

Отметим, что остаточный член в представлении (2.1) в общем случае опустить нельзя (так как в принципе все g_i могут оказаться нулевыми, а существенные слагаемые могут скрываться в остаточном члене). Однако, если векторное поле

$$\tilde{X}_0 = A + g_2 + \ldots + g_r,$$

является грубым (т.е. топологически эквивалентным любому достаточно близкому векторному полю), то $\tilde{X}$, как близкое, топологически эквивалентно $\tilde{X}_0$ и на основании этого можно построить классификацию особых точек. Векторное поле $\tilde{X}_0$ называется ***нормальной формой*** векторного поля X. Сформулированная теорема — это обобщение теоремы Гробмана — Хартмана.

Пару слов о выборе G^m. Условие $g_m \in G^m$ лишь подчеркивает, что слагаемые из F^m не влияют на локальное поведение системы, так что их можно не учитывать, а в однородном многочлене g_m оставить меньшее число слагаемых. Подпространство G^m определяется неоднозначно, однако замена одного подпространства G^m другим означает лишь, что к g_m добавляется некая сумма из F_m и только. Такое добавление убирается соответствующей заменой переменных.

Возможный способ выбора подпространства G^m — ортогональное дополнение к F^m. Так как $F^m = \mathrm{ad}_A(H^m)$, то, как известно из курса линейной алгебры, ортогональное дополнение к F^m (образу линейного оператора) есть ядро сопряженного оператора, т.е.

$$G^m = F^{\perp} = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{ad}_A\,\big|_{H^m}\big)^*,$$

где $*$ обозначает сопряженный оператор.

Остановимся на простейшем случае $r = 2$, т.е. рассмотрим учет квадратичных слагаемых. Применение теоремы о нормальных формах рассмотрим на конкретном примере. Для целей классификации естественно считать, что матрица A имеет канонический вид.

Пример 2.4. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

которой соответствует векторное поле $y\dfrac{\partial}{\partial x}$. Сопряженному оператору соответствует векторное поле $x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Пространство H^2 порождается 6 векторными полями $x^k y^{2-k}\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $x^k y^{2-k}\dfrac{\partial}{\partial y}$, $k = 0, 1, 2$. Вычисления дают:

$$\Big[x\frac{\partial}{\partial y},\, x^k y^{2-k}\frac{\partial}{\partial x}\Big] = (2-k)x^{k+1}y^{1-k}\frac{\partial}{\partial x} - x^k y^{2-k}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\Big[x\frac{\partial}{\partial y},\, x^k y^{2-k}\frac{\partial}{\partial y}\Big] = (2-k)x^{k+1}y^{1-k}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Полагая $k = 0, 1, 2$, получаем векторные поля

$$2xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y},\quad -x^2\frac{\partial}{\partial y},\quad 2xy\frac{\partial}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial}{\partial y},\quad 0.$$

Опуская анализ этих полей, запишем возможные комбинации, дающие нулевой результат:

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Значит, нормальная форма при $r = 2$ имеет вид

$$\tilde{X} = y\frac{\partial}{\partial x} + Ax^2\frac{\partial}{\partial x} + (Axy + Bx^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Соответствующая система имеет вид

$$\dot{x} = y + Ax^2, \quad \dot{y} = Axy + Bx^2.$$

Секторная структура точек покоя: e, h, p.

Характеристическая траектория — траектория, стремящаяся к положению равновесия, причем так, что угол наклона вектора скорости имеет конечный предел. Положения равновесия имеет нетривиальную секторную декомпозицию, если существуют окрестность V с гладкой границей ∂V и характеристические траектории c_1, c_2, $\ldots$, c_n, трансверсально пересекающие ∂V в точках p_1, p_2, $\ldots$, p_n в указанном порядке так, что V разделяется на секторы S_i, в которых реализуется одна из ситуаций:

1) эллиптический сектор;

2) гиперболический сектор (седло);

3) параболический сектор (типа аттрактор или репеллер).

Секторная структура характерна для каждого положения равновесия аналитической динамической системы (функция аналитическая, если в окрестности точки она представляется степенным рядом).

3. ЦИКЛЫ

3.1. Предварительные сведения

Кроме положений равновесия у динамической системы могут быть и другие особые траектории. Например, могут быть периодические траектории, или ***циклы***.

Предварительно введем несколько понятий и обсудим некоторые факты.

Согласно теореме о существовании и единственности решения задачи Коши для системы $\dot{x} = f(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in G$ существует $\delta > 0$, что на интервале $(t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)$ определено решение $x(t)$, системы, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$ (это при соответствующих требованиях гладкости функции f). Во-первых, если $x(t)$ — решение системы, то и $x(t + a)$ — решение системы, поэтому всегда можно считать, что $t_0 = 0$. Во-вторых, параметр δ выбирается неоднозначно, но если взять два решения с одинаковым начальным условием, то они совпадут на общей части области определения. Это значит, что есть решение на объединении областей определения исходных решений. Взяв все возможные решения и объединив их области определения, получим решение с максимальной областью определения. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие решения, а под фазовой траекторией будем понимать кривую в фазовом пространстве, заданную решением с максимальной областью определения. Для решения $x(t)$, удовлетворяющему условию $x(0) = x_0$, максимальную область определения будем обозначать $(t_\alpha(x_0),\ t_\omega(x_0))$.

Пусть γ — фазовая траектория, соответствующая решению $x(t)$, определенному на интервале $(p,\ q)$. Возникает вопрос, что происходит при $t \to p + 0$ и при $t \to q - 0$. Ситуация может быть разная, иногда очень нетривиальная.

Назовем ω-предельным множеством траектории γ совокупность пределов последовательностей $\gamma(t_n)$, для которых $t_n \to q - 0$. Аналогично α-предельным множеством назовем совокупность пределов последовательностей $\gamma(t_n)$, для которых $t_n \to p + 0$. Их обозначим $\omega(\gamma)$ и $\alpha(\gamma)$. Таким образом,

$$\omega(\gamma) = \bigcap_{t<q} \overline{\gamma((t,\ q))}, \quad \alpha(\gamma) = \bigcap_{t>p} \overline{\gamma((p,\ t))}$$

(здесь под $x((\alpha,\ \beta))$ понимается образ интервала $(\alpha,\ \beta)$ при отображении x: $(p.\ q) \to \mathbb{R}^n$).

Каждая фазовая траектория однозначно определяется одной своей точкой, поэтому уместны обозначения $\alpha(x_0)$ и $\omega(x_0)$ для α- и ω-предельных множеств траектории, проходящей через точку x_0.

Если $p < +\infty$, то $\omega(\gamma) = \varnothing$. Действительно, Пусть $x_* \in \omega(\gamma)$. Тогда есть последовательность $t_n \to q - 0$, для которой $\gamma(t_n) \to x_*$. По теореме существования и единственности есть траектория, определенная по крайней мере на некотором интервале $(q - \delta,\ q + \delta)$ и проходящая через точку x_* в момент времени q. Эта траектория является продолжением траектории $\gamma(t)$ за пределы точки q. Это противоречит определению значения q.

Множество $M \subset G$ называется ***инвариантным*** для системы $\dot{x} = f(x)$, если вместе с каждой своей точкой x_0 это множество содержит и всю фазовую траекторию системы, проходящую через эту точку.

Точка на фазовой траектории разделяет ее на две полутраектории, положительную и отрицательную. Множество $M \subset G$ ***положительно инвариантно***, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и положительную полутраекторию, начинающуюся в этой точке. Аналогично понятие ***отрицательно инвариантного множества***. Множество инвариантно, если он одновременно и положительно инвариантно, и отрицательно инвариантно.

Фазовую траекторию будем называть ограниченной в области $G \subset \mathbb{R}^n$, если ее замыкание является компактным подмножеством G.

Теорема 3.1. Для любой траектории α- и ω-предельные множества являются замкнутыми и инвариантными. Если траектория ограниченная, то эти множества связны.

Траектория $\gamma(t)$ периодическая, если существует такое T, что $\gamma(t+T) = \gamma(t)$, причем $g(t_1) \neq \gamma(t_2)$ при $|t_1 - t_2| < T$.

Пример 3.1. Простейший пример периодических траекторий — траектории линейной системы типа центр:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Ее траектории можно описать формулами $x = R\cos t$, $y = -R\sin t$. Все они периодические.

Пример 3.2. Система

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

имеет замкнутую траекторию $x^2 + y^2 = 1$, поскольку при этом условии система сводится к предыдущей, у которой эта кривая — тоже фазовая траектория (более строго это можно обосновать, заметив, что в каждой точке окружности векторное поле касается этой окружности).

При переходе в полярную систему координат получим систему

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\varphi} = -1.$$

Уравнения распались, каждое можно анализировать отдельно. Первое уравнение имеет два положения равновесия: 0 и 1. По знаку производной (положительна при $0 < r < 1$, отрицательна при $r > 1$) определяем, что $r = 1$ — устойчивое положение равновесия, $r = 0$ — неустойчивое. Изменения полярного радиуса и полярного угла независимы. На основании этого легко воспроизвести фазовый портрет (рис. 3.1).

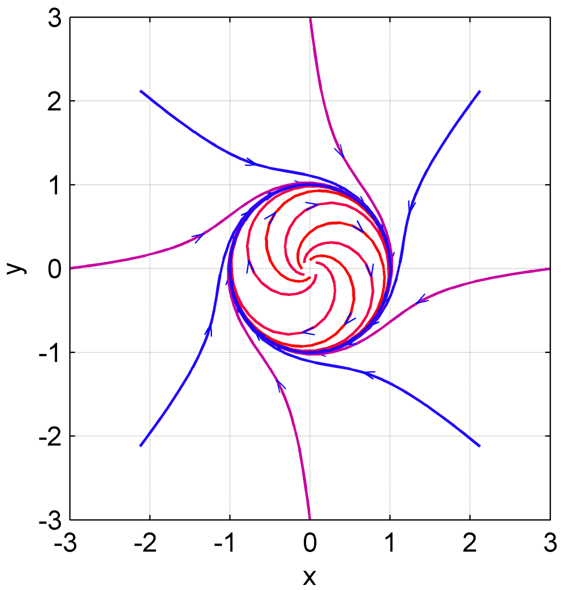

Рис. 3.1

Пример 3.3. Уравнение ван дер Поля

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

имеет устойчивый предельный цикл (рис. 3.2). Видно, что есть два направления, по которым

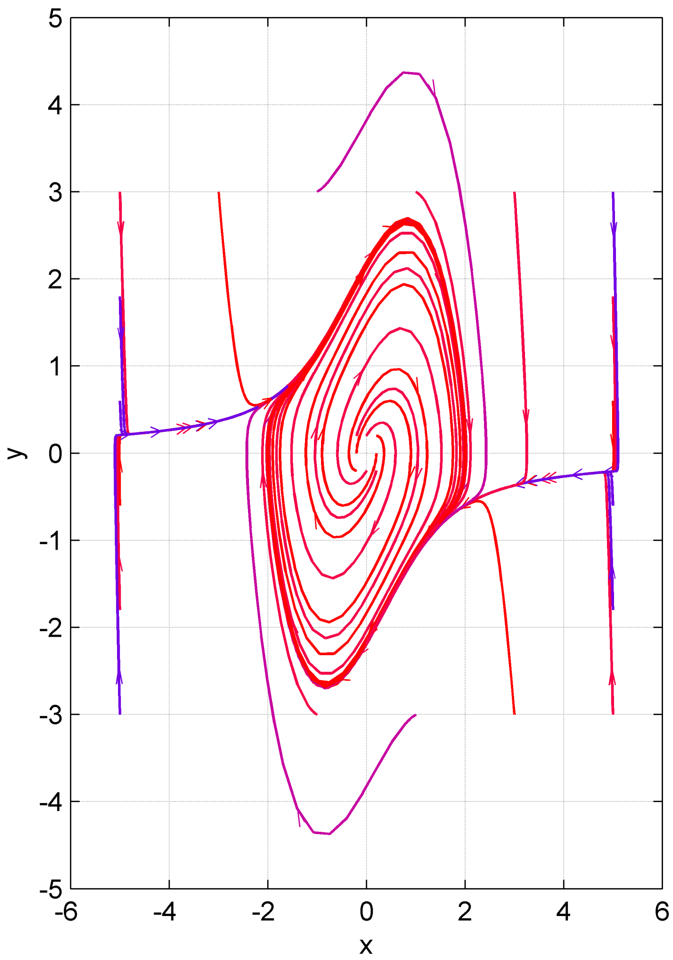

Рис. 3.2

все траектории извне цикла устремляются к нему.

Теорема 3.2. Пусть $\gamma(t)$ — максимальное решение автономной системы с областью определения I_γ. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:

1) отображение $\gamma\colon I_\gamma \to G$ инъективно;
2) отображение γ постоянно, причем $I_\gamma = \mathbb{R}$;
3) отображение γ является периодическим, причем $I_\gamma = \mathbb{R}$.

◀ Если отображение γ не является инъективным, то существуют значения t_1 и t_2, для которых $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Значит, $\gamma(t_1+\tau)$ и $\gamma(t_2+\tau)$ — два решения системы, удовлетворяющих одному начальному условию. Следовательно, они должны совпадать. Но области определения этих решений $I_\gamma - t_1$ и $I_\gamma - t_2$ (смещения интервала I_γ) тогда тоже должны совпадать. Это возможно лишь при $I_\gamma = \mathbb{R}$.

Итак, неинъективное решение $\gamma(t)$ определено на всей числовой оси. Рассмотрим множество P точек t, для которых $\gamma(t) = \gamma(0)$ (в частности, такой является $t_2 - t_1$). Эти точки образуют группу по сложению. Пусть $t_* = \inf\{t \in P\colon t > 0\}$. Если $t_* = 0$, то P всюду плотно на числовой оси, а так как γ на P — постоянная функция, то $\gamma(t) = \gamma(0)$ на всей числовой оси. Если же $t_* > 0$ то все точки $t \in P$ имеют вид $t = nt_*$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $P = n\mathbb{Z}$, а решение будет периодическим с минимальным периодом t_*. ▶

Теорема 3.3. Если траектория системы ограничена, то она определена на всей числовой оси.

◀ В доказательстве теоремы существования и единственности решения задачи Коши интервал существования решения системы $\dot{x} = f(x)$ определяется через размеры окрестности точки и через максимальное значение нормы функции f в этой окрестности. Отсюда можно сделать вывод, что для любой точки $x_0 \in G$ существует окрестность U, такая, что для всех точек x_* соответствующее решение задачи Коши определено на некотором фиксированном интервале $(-\delta, \delta)$, где δ зависит от U, но не от выбора точки в этой окрестности.

Предположим, что траектория γ ограничена и определена на интервале (p, q). Для нее множество $\omega(\gamma)$ не пусто в силу компактности замыкания. Пусть $x_* \in \omega(\gamma)$. Для любой окрестности U существует сколь угодно близкое к q значение t_0, для которого $\gamma(t_0) \in U$. Однако если выбрать U как выше, то решение, проходящее через точку $\gamma(t_0)$, будет определено на интервале $(-\delta, \delta)$, т.е. функция $\gamma(t)$ определена на интервале $(t_0-\delta, t_0+\delta)$. При t_0, достаточно близком к q, мы выходим за пределы интервала (p, q), если только $q \neq +\infty$. Значит, на самом деле $q = +\infty$. Аналогично $p = -\infty$ и функция γ определена на $\mathbb{R}$. ►

Понятие решения, устойчивого по Ляпунову.

Решение $x(t)$ устойчиво, если для для любого t_0 и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого решения $y(t)$ с начальным условием $y(t_0)$, удовлетворяющим условию $|y(t_0)-x(t_0)| < \delta$, верно неравенство $|y(t)-x(t)| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$. Устойчивое решение асимптотически устойчиво, если для любого близкого решения $|y(t)-x(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Орбитальная устойчивость. Пример с семейством циклов меняющегося периода.

3.2. Теория Флоке

Исследование качественного поведения системы около цикла — гораздо более сложная задача, чем исследование точек покоя. Укажем два распространенных метода исследования.

Первый метод состоит в следующем. На цикле выберем точку p и проведем гиперповерхность π через эту точку, трансверсальную циклу. Можно показать, что траектории, начинающиеся на гиперповерхности вблизи p опять пересекут гиперповерхность (можно взять первый инцидент). В результате на гиперповерхности в некоторой окрестности U возникает отображение $F\colon U \to \pi$, называемое ***отображением последования***, также ***отображением Пуанкаре***. Это отображение в U имеет единственную неподвижную точку. Свойства отображения F определяют качественный характер поведения системы в окрестности цикла, по крайней мере с точки зрения устойчивости. Отображение Пуанкаре формирует дискретную систему, и мы вернемся к нему, когда будем рассматривать такие системы.

Второй метод основан на линеаризации системы. В каждой точке $\gamma(t)$ цикла γ можно составить линеаризованную систему $\dot\xi = A(t)\xi$, где $A(t) = f'(\gamma(t))$ (матрица Якоби f в точке $\gamma(t)$. При достаточной гладкости f матрица $A(t)$ гладкая, причем $A(t+T) = A(t)$ (T — период цикла). Значит, $A(t)$ периодическая с периодом T.

Возникла линейная система с переменными, но периодическими коэффициентами. У нее имеется очевидное решение — нулевое, которое соответствует циклу γ (ξ — отклонение точки $x(t)$ траектории от точки $\gamma(t)$ цикла, соответствующей тому же моменту времени). Устойчивость цикла, согласно одной из теорем Ляпунова, в определенном смысле равносильна устойчивости полученной линейной системы: отклонение траектории от цикла соответствует отклонению траектории линейной системы от положения равновесия.

Оказывается описать решение линейной системы с периодическими коэффициентами можно примерно так же, как и решение линейной системы с постоянными коэффициентами, отделив периодический фактор. Эта идея лежит в основе теории Флоке.

Теорема 3.4 (Флоке). Для линейной системы $\dot x = A(t)x$ с T-периодической матрицей $A(t)$ любая фундаментальная матрица $\Phi(t)$ может быть представлена в виде

$$\Phi(t) = Z(t)e^{Rt}, \tag{3.1}$$

где $Z(t)$ — T-периодическая невырожденная матрица, а R — постоянная матрица.

◀ Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица, то и $\Phi(t+T)$ — фундаментальная матрица. Действительно, во-первых,

$$\frac{d}{dt}\Phi(t+T) = \dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T),$$

т.е. столбцы матрицы $\Phi(t+T)$ являются решениями системы. А во-вторых, столбцы матрицы $\Phi(t+T)$ линейно независимы (общее свойство: если решения линейной системы линейно независимы в одной точке, то они линейно независимы во всех точках). Значит, $\Phi(t+T)$ — фундаментальная матрица.

Столбцы матрицы $\Phi(t+T)$, как решения системы, могут быть выражены с помощью фундаментальной матрицы $\Phi(t)$. Следовательно,

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C,$$

где C — постоянная матрица. Она невырождена, так как $\Phi(t+T)$ невырождена. Условие невырожденности C означает, что она является экспонентой некоторой матрицы, т.е. может быть представлена в виде $C = e^{RT}$. В результате

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)e^{RT}.$$

Положим $Z(t) = \Phi(t)e^{-Rt}$ (это эквивалентно (3.1)). Остается показать, что $Z(t)$ — периодическая матрица (она невырождена как произведение невырожденных матриц). Имеем

$$Z(t+T) = \Phi(t+T)e^{-R(t+T)} = \Phi(t)e^{RT}e^{-R(t+T)} = \Phi(t)e^{-Rt} = Z(t).$$

Теорема доказана. ▶

Замечание 3.1. В этой теореме, вообще говоря, предполагаются комплексные числа, т.е. матрицы $Z(t)$ и R — комплекснозначные. Можно перейти к действительнозначному варианту, но это увеличит период $Z(t)$ вдвое.

Кроме того, матрица R определяется неоднозначно — с точностью до скалярной матрицы, кратной $2\pi i$. Но при этом матрица e^{RT} определена однозначно: она попросту равна $\Phi(0)^{-1}\Phi(T)$.

В качестве фундаментальной матрицы удобно использовать нормированную матрицу $\Phi_0(t)$, удовлетворяющую условию $\Phi_0(0) = E$. С помощью такой матрицы любое решение $x(t)$ с начальным условием x_0 записывается в виде $x(t) = \Phi_0(t)x_0$. В дальнейшем мы будем использовать такую матрицу. При этом соответствующая матрица $Z_0(t)$ в представлении (3.1) удовлетворяет условию нормирования $z_0(0) = E$,

Матрицу $C = e^{RT}$ для нормированной матрицы $\Phi_0(t)$ называют ***матрицей монодромии***. Из представления (3.1) вытекает, что $\Phi_0(T) = Z_0(T)e^{RT} = e^{RT}$. Таким образом, матрица монодромии представляет собой нормированную фундаментальную матрицу, вычисленную через период:

$$C = \Phi_0(T).$$

Собственные числа матрицы R называют ***характеристическими показателями***, а собственные числа матрицы монодромии — ***характеристическими множителями*** или ***мультипликаторами***.

Теорема 3.5. Каждому мультипликатору ρ соответствует нетривиальное решение $x_\rho(t)$, удовлетворяющее условию

$$x_\rho(t+T) = \rho x_\rho(t)$$

◀ Искомое решение определим начальным условием $x_\rho(0)$, выбрав в качестве него собственный вектор матрицы монодромии C, отвечающий собственному значению ρ. Тогда $Cx_\rho(0) = \rho x_\rho(0)$ и

$$x_\rho(t) = \Phi_0(t)x_\rho(0).$$

Отсюда
$$x_\rho(t+T) = \Phi_0(t+T)x_\rho(0) = \Phi_0(t)e^{RT}x_\rho(0) = \rho\Phi_0(t)x_\rho(0) = \rho x_\rho(t).$$
Следовательно, построенное решение $x_\rho(t)$ искомое. ▶

Следствие 3.1. Линейная периодическая система периода T имеет T-периодическое решение тогда и только тогда, когда у нее есть мультипликатор $\rho = 1$.

Следствие 3.2. Если система $\dot\xi = A(t)\xi$ получена как линеаризация нелинейной системы $\dot x = f(x)$ вдоль периодического решения $\gamma(t)$, то у этой системы один из мультипликаторов равен 1.

◀ По условию функция $\gamma(t)$ является решением исходной системы $\dot x = f(x)$, т.е. $\gamma'(t) = f(\gamma(t)$. Продифференцируем это равенство:
$$\gamma''(t) = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t).$$
Полученное равенство означает, что функция $\gamma'(t)$ является решением линейной системы $\dot x = A(t)x$, где $A(t) = f'(\gamma(t))$ — матрица линеаризованной системы. Итак, линеаризованная система имеет решением — функцию $\gamma'(t)$, которая, как и $\gamma(t)$ является периодической с периодом T. Согласно следствию 3.1, линеаризованная система имеет мультипликатор, равный 1. ▶

В линейной периодической системе выполним замену $x = Z(t)y$, придем к системе $\dot y = Ry$. Матрица $Z(t)$ периодическая и при любом t невырожденная. Поэтому существуют такие положительные числа c_1, c_2, что $c_1 \leqslant \|Z(t)\| \leqslant c_2$. Отсюда следует, что условия устойчивости и асимптотической устойчивости для систем $\dot x = A(t)x$ и $\dot y = Ry$ эквивалентны. Это позволяет сформулировать условия устойчивости для линейной периодической системы.

Теорема 3.6. Линейная периодическая система с непрерывной матрицей устойчива тогда и только тогда, когда ее мультипликаторы расположены внутри замкнутого единичного круга $|\rho| \leqslant 1$, причем для мультипликаторов на единичной окружности адгебраическая и геометрическая кратности совпадают. Для асимптотической устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы попадали внутрь единичного круга.

3.3. Инвариантные торы

Обобщением (в определенном смысле) понятия цикла является инвариантный тор. Двумерный тор топологически представляет собой декартово произведение двух окружностей, в трехмерном пространстве его можно реализовать как поверхность, образованная вращением окружности вокруг оси, расположенной вне круга. В n-мерном пространстве пожно построить $(n-1)$-мерный тор, представляющий собой декартово произведение $n-1$ окружностей.

Движение по двумерному тору представляет собой в окружающем пространстве как сумма двух периодических движений: по одной угловой координате и по другой. Если движение по каждой координате равномерное, то общий характер этого движения определяется условием соизмеримости периодов. Если периоды соизмеримы, то есть общий период двух движений и в результате суммарное движение оказывается периодическим. Если же периоды несоизмеримы, то движение непериодическое, но при этом в процессе движения траектория подходит сколь угодно близко к заданной точке. Такое движение называется квазипериодическим. При этом движении траектория всюду плотно наматывается на тор. Отметим, что «плотно» не значит «всюду». Множество таких всюду плотных намоток по мощности континуум.

Пример 3.4. Рассмотрим систему
$$\begin{cases} \dot x = (\nu-1)x - y + xz, \\ \dot y = x + (\nu-1)y + yz, \\ \dot z = \nu z - x^2 - y^2 - z^2, \end{cases}$$

называемую ***системой Ланфорда***.

Эта система интересна тем, что имеет цилиндрический характер. Действительно, преобразуем ее, перейдя в цилиндрические координаты

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = \zeta.$$

Получим

$$\begin{cases} \dot\rho = (\nu - 1)\rho + \rho\zeta, \\ \dot\varphi = 1, \\ \dot\zeta = \nu\zeta - \rho^2 - \zeta^2. \end{cases}$$

Система распалась на две независимые подсистемы: первая

$$\begin{cases} \dot\rho = (\nu - 1)\rho + \rho\zeta, \\ \dot\zeta = \nu\zeta - \rho^2 - \zeta^2. \end{cases}$$

описывает перемещение точки в плоскости, проходящей через ось Oz, а вторая $\dot\varphi = 1$ — независимое движение этой плоскости (ее равномерное вращение).

Первая система имеет положения равновесия $\rho = 0$, $\zeta = 0$ и $\rho = 0$, $\zeta = \nu$. При $1/2 < \nu < 1$ появляется третье положение равновесия $\rho = \sqrt{(1-\nu)(2\nu - 1)}$, $\zeta = 1 - \nu$. Оно представляет собой фокус. При $1/2 < \nu < 2/3$ этот фокус устойчивый, а при $2/3 < \nu < 1$ неустойчивый. При потере устойчивости, когда ν, возрастая, проходит значение $3/2$, в системе возникает устойчивый цикл. Этому циклу в системе Ланфорда соответствует инвариантный тор.

4. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

Динамический хаос — явление, связанное с неустойчивостью траекторий. Если есть ограниченное инвариантное множество (состоящее из целых траекторий), причем все траектории неустойчивы, то небольшая окрестность в этой области через определенное время размазывается по всей области. В результате, зная исходное состояние системы с некоторой точностью (сколь угодно малой, впрочем), мы ничего не можем сказать о состоянии системы в дальней перспективе.

Возникает своеобразный парадокс. С одной стороны, понятие динамической системы предполагает полную определенность поведения системы в будущем: точное значение состояния системы в определенный момент времени однозначно определяет состояние системы в последующие моменты времени. Но с другой стороны любая сколь угодно малая погрешность в определении начального состояния лишает нас возможности знать будущее хоть в какой-то мере. Вот это явление и называют ***динамическим хаосом***.

Считается, что явление хаоса было открыто Е. Лоренцом (E.N. Lorenz), метеорологом-теоретиком, который, рассматривая движение сплошной среды, получил некоторое прибюлижение в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет сложное поведение:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases}$$

4.1. Аттракторы

Для ограниченной траектории ω-предельное множество не пусто. Что это за множество? Это может быть положение равновесия (например, устойчивый узел). Это может быть предельный цикл. В любом случае ω-предельное множество является инвариантным и, следовательно, представляет собой объединение целых фазовых траекторий. Если это отдельная траектория, то она может быть положением равновесия, предельным циклом, но в многомерном случае может иметь более сложную структуру.

Может случиться, что это множество является предельным для всех близлежащих траекторий. Такая ситуация приводит к понятию ***аттрактор***. Приступим к определениям.

Притягивающее множество — множество K, обычно компактное, удовлетворяющее условию: существует такая окрестность $U \supset K$, что любая положительная полутраектория, начинающаяся в точке из U, имеет ω-предельное множество, целиком лежащее в K. Объединение всех U с указанным свойством есть, очевидно, максимальная окрестность, которая называется ***областью притяжения*** или ***бассейном*** притягивающего множества. ***Аттрактором*** называется притягивающее множество, дополнительно обладающее свойствами:

1) оно инвариантно;

2) оно компактно (замкнуто и ограничено);

3) оно неразложимо, т.е. у него нет таких подмножеств, которые удовлетворяют предыдущим условиям (притягиваемость, инвариантность, компактность).

Аттрактору соответствует двойственное понятие ***репеллер*** — аттрактор обратной системы, получаемой обращением времени.

Простейшим аттрактором является устойчивое положение равновесия. Также аттрактором может быть устойчивый предельный цикл. Эти аттракторы состоят из одной траектории. Аттрактором может быть инвариантный тор, который тогда состоит из континуума траекорий.

Инвариантный тор — пример сложного аттрактора. Еще один вариант сложного аттрактора — кольцо, заполненное периодическими траекториями. Однако есть и гораздо более сложные примеры аттракторов, которые трудно описать аналитически и которые устроены наподобие канторова множества.

Аттракторы искать трудно. Сам факт наличия ограниченной непериодической траектории может свидетельствовать в сторону аттрактора, но это не доказательство. Какие же признаки существования аттракторов?

Могут быть разные критерии существования аттракторов. Точных критериев нет (во всяком случае простых), но есть характеристики, указывающие на потенциальную возможность хаоса. Одна из таких характеристик — динамика объема областей в фазовом пространстве.

Первый признак — наличие ***полупроницаемых поверхностей*** — замкнутых поверхностей, на которых векторное поле направлено внутрь ограничиваемой области. Тогда траектории с поверхности входят в область и уже не покидают ее. В указанной ситуации область, скорее всего, содержит аттрактор.

4.2. Фазовый объем

Еще один признак, указывающий на аттракторы, сокращение фазового объема.

Пусть динамическая система описывается фазовым потоком $\Phi(t,x)$. Область G за время G переходит в область $\Phi(t,G)$. Ее объем можно выразить в соответствии с правилом замены переменных в кратном интеграле:

$$V_t(G) = \int\limits_{\Phi(t,G)} dy = \int\limits_G |\det \Phi'_x(t,x)|\, dx.$$

Производная функции $V_t(G)$ может быть вычислена как производная кратного интеграла по параметру (модуль для якобиана при малых t можно снять, поскольку при $t=0$ якобиан равен 1, т.е. положителен):

$$\frac{d}{dt}V_t(G) = \frac{d}{dt}\int\limits_G \det \Phi'(t,x)\, dx = \int\limits_G \frac{\partial}{\partial t}\det \Phi'(t,x)\, dx.$$

Как дифференцировать определитель? Правило такое:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} & \frac{\partial a_{12}}{\partial t} & \dots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial t} & \frac{\partial a_{22}}{\partial t} & \dots & \frac{\partial a_{2n}}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial t} & \frac{\partial a_{n2}}{\partial t} & \dots & \frac{\partial a_{nn}}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Если теперь подставить $t = 0$ (т.е. смотрим скорость изменения в начальный момент времени), то получим (на примере первого слагаемого):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} & \frac{\partial a_{12}}{\partial t} & \dots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial a_{11}}{\partial t}\right|_{t=0} & \left.\frac{\partial a_{12}}{\partial t}\right|_{t=0} & \dots & \left.\frac{\partial a_{1n}}{\partial t}\right|_{t=0} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \left.\frac{\partial a_{11}}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Дифференцируя поток по времени, приходим к правым частям $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, ..., $f_n(t,x)$ системы дифференциальных уравнений. Перестановка частных производных дает

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(t,x) = \frac{\partial f_1(t,x)}{\partial x_1}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t}\det \Phi'_x(t,x)\Big|_{t=0} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,x) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0,x) = \operatorname{div} f(0,x),$$

а

$$\frac{d}{dt}V_t(G)\Big|_{t=0} = \int\limits_G \operatorname{div} f(0,x)\,dx.$$

Характеристикой изменения объема в фазовом пространстве является дивергенция векторного поля системы.

Систему $\dot{x} = f(x)$ назовем ***диссипативной*** в области $X \subset \mathbb{R}^n$, если $\operatorname{div} f(x) < 0$ в X.

Примером диссипативной системы является линейная система, матрица которой имеет отрицательный след. Другой пример — система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases}$$

Действительно,

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} f(t,x) = -\sigma - 1 - b,$$

т.е. дивергенция векторного поля не зависит от точки и отрицательна (при положительных параметрах).

Система $\dot{x} = f(x)$ называется ***консервативной*** в области X, если $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$ в этой области.

Примером консервативной системы является линейная система с нулевым спектром. Целый класс консервативных систем составляют ***гамильтоновы системы***. К таким системам относят системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = \overline{1,\,n}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,\,n}. \end{cases}$$

Для гамильтоновых систем имеем

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0.$$

Для диссипативных систем характерной структурой является аттрактор.

4.3. Показатели Ляпунова

Среди аттракторов выделяются такие, которые имеют сложное строение: в аттрактор входит семейство переплетенных траекторий. Такие траектории не могут быть устойчивыми, поскольку замыкание устойчивой траектории само было бы аттрактором, а это противоречит условию неразделимости. Аттрактор, состоящий из некоторого набора неустойчивых траекторий, часто называют странным.

Характеристикой устойчивости ограниченных траекторий являются показатели Ляпунова, являющиеся аналогами собственных значений линейного приближения в положении равновесия. Пусть дана система $\dot{x} = f(x)$ и $\gamma(t)$ — ее траектория. Составим систему в отклонениях, полагая $y = x - \gamma(t)$. Эта система имеет вид

$$\dot{y} = f(y + \gamma(t)) - \gamma'(t).$$

Система в отклонениях неавтономная, но у нее нулевое положение равновесия, которое можно исследовать методами, близкими к методам исследования положений равновесия автономных систем. В частности, большую роль здесь играет система линейного приближения:

$$\dot{\eta} = f'(\gamma(t))\eta$$

(она получается, если в системе $\dot{y} = g(t, y)$ правую часть разложить в ряд Тейлора по пространственным переменным с коэффициентами, зависящими от времени, и ограничиться линейной частью этого приближения). Это линейная система с переменной матрицей. Рассмотрим траекторию $\eta(t)$ системы линейного приближения. Если матрица системы от t не зависит, решение $\eta(t)$ будет выражаться экспоненциальными функциями, которые в зависимости от коэффициента либо стремятся к нулю (говорят, экспоненциально), либо к бесконечности. Характеристикой такого стремления является величина

$$\lambda(\eta) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln|\eta(t)|}{t},$$

называемая ***характеристическим показателем*** или ***показателем Ляпунова кривой*** $\boldsymbol{\eta(t)}$. В общем случае показатель Ляпунова может быть и бесконечной величиной, это говорит о том, что кривая стремится к бесконечности быстрее любой показательной функции (например, как функция e^{t^2}).

Если все решения системы линейного приближения имеют отрицательные показатели Ляпунова, то соответствующее решение $\gamma(t)$ устойчиво по Ляпунову. Если есть решения с положительным показателем Ляпунова, то соответствующее решение неустойчиво. Остановимся на исследовании показателей Ляпунова решений линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Теорема 4.1. Если $\|A(t)\| \leqslant c < +\infty$, то каждая траектория системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет конечный характеристический показатель. #

Замечание 4.1. Вообще говоря, анализируя характеристические показатели для линейной системы, следует рассматривать и действительные, и комплексные решения. Однако, если есть комплексное решение с показателем α, то либо действительная, либо мнимая часть этого решения — тоже решение с тем же показателем. Поэтому можно ограничиться только действительными решениями.

Лемма 4.1. Решения системы, обладающие различными характеристическими показателями, линейно независимы.

◀ Нетрудно показать, что если

$$\eta(t) = \alpha_1\eta_1(t) + \alpha_2\eta_2(t) + \ldots + \alpha_k\eta_k(t),$$

то

$$\lambda(\eta) \leqslant \max\{\lambda(\eta_1),\ \lambda(\eta_2),\ \ldots,\ \lambda(\eta_k)\}.$$

Пусть

$$\alpha_1\eta_1(t) + \alpha_2\eta_2(t) + \ldots + \alpha_k\eta_k(t) = 0, \tag{4.1}$$

причем можно считать, все коэффициенты ненулевые (нулевые попросту можно опустить) и что нумерация выбрана по убыванию характеристических показателей, т.е. $\lambda(\eta_1)$ — наибольший характеристический показатель. Тогда

$$\eta_1(t) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\eta_2(t) - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\eta_k(t).$$

Следовательно,

$$\lambda(\eta_1) \leqslant \max\{\lambda(\eta_2),\ \lambda(\eta_3),\ \ldots,\ \lambda(\eta_k)\},$$

а это противречит выюору нумерации и в конечном счете предположению, что в (4.1) есть ненулевые коэффициенты. ►

Множество характеристических показателей решений линейной системы называется ***спектром линейной системы***.

Теорема 4.2. Спектр линейной системы состоит из конечного числа элементов (не более размерности системы).

◄ Действительно, наличие k разных характеристических показателей означает, что система имеет k линейно независимых решений. Однако максимальное количество линейно независимых решений совпадает с порядком системы n. Следовательно, у линейной системы спектр может иметь не более n разных значений. ►

Чтобы выяснить, имеет ли линейная система решения с положительным характеристическим показателем, достаточно найти наибольшее значение в ее спектре (наибольший среди характеристических показателей ее решений). Это значение называют ***старшим показателем Ляпунова***. Если старший показатель Ляпунова отрицателен, то любое решение линейной системы имеет отрицательный характеристический показатель, а нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво. Если страший показатель Ляпунова положителен, то есть решения с положительным характеристическим показателем и нулевое положение равновесия неустойчиво.

Вычисление старшего показателя Ляпунова. Найти старший показатель Ляпунова аналитически можно только в редких случаях. На практике используют численные методы. Для анализа аттракторов с помощью ляпуновских показателей необходимо:

1) найти траекторию на аттракторе, которую можно выбирать на аттракторе произвольно, поскольку она заполняет аттрактор всюду плотно;

2) для этой траектории построить систему линейного приближения и для этой системы найти фундаментальную систему решений. Поскольку любое решение является линейной комбинацией решений фундаментальной системы, то среди характеристических показателей решений фундаментальной системы есть старший показатель Ляпунова, так как характеристический показатель любого решения не превышает максимального среди характеристических показателей решений фундаментальной системы.

3) для решений найденной фундаментальной системы вычислить харктеристические показатели и среди них выбрать максимальный.

Как найти траекторию на аттракторе? Если найти точку в области притяжения аттрактора и построить траекторию, начинающуюся в этой точке, то через заметное время (скажем, через 1000 с) эта траектория окажется в непосредственной близости от аттрактора — фактически на аттракторе, если принять во внимание погрешности счета. Мы получаем точку на аттракторе, которую можно использовать как начальную для построения траектории на аттракторе. Отметим, что ошибки округления, конечно, влияют на получаемые при численном интегрировании данные, но за счет устойчивости аттрактора в целом мы не выйдем существенно за пределы аттрактора.

Проинтегрировав траекторию на аттракторе, можно приступать к построению решений системы линейного приближения. Следует понимать, что построенная траектория на аттракторе будет представлять собой массив точек, соответствующих значениям решения в узлах временной сетки. Для получения значений решений в промежуточных точках можно воспользоваться методами интерполяции.

Но возможен и другой подход. Если сетка узлов по времени достаточно часта, то на промежутке $[t_{k-1},\, y_k]$ можно пренебречь изменением матрицы $A(t)$, считая ее постоянной на этом промежутке: в качестве постоянного значения можно выбрать

$$A_k = \frac{A(t_{k-1}) + A(t_k)}{2}.$$

Но тогда на отрезке $[t_k,\, y_{k+1}]$ линейную систему можно интегрировать как систему с постоянной матрицей, т.е.

$$\eta(t_k) = e^{A_k(t_k - t_{k-1})}\eta(t_{k-1}).$$

Используя записанную формулу многократно, заключаем, что

$$\eta(t_k) = e^{A_k(t_k - t_{k-1})} e^{A_{k-1}(t_{k-1} - t_{k-2})} \ldots e^{A_1(t_1 - t_0)}\eta(t_0).$$

Чтобы построить фундаментальную систему решений, достаточно в качестве начальных условий выбрать столбцы единичной матрицы. Получим формулу

$$\Phi(t_k) = e^{A_k(t_k - t_{k-1})} e^{A_{k-1}(t_{k-1} - t_{k-2})} \ldots e^{A_1(t_1 - t_0)} E = e^{A_k(t_k - t_{k-1})} e^{A_{k-1}(t_{k-1} - t_{k-2})} \ldots e^{A_1(t_1 - t_0)}.$$

Матрица $\Phi(t_k)$ — резольвента системы линейного приближения (точнее ее значение в момент времени t_k), ее столбцы образуют фундаментальную систему решений.

Вычислив массив матриц $\Phi_k = \Phi(t_k)$, можно для каждого i-го столбца Φ_{ki} матрицы Φ_k вычислить

$$\lambda_{ki} = \frac{\ln|\Phi_{ki}|}{t_k - t_0}.$$

Для каждого i последовательность λ_{ki}, $k = 1, 2, N$, есть последовательность характеристических показателей для i-го решения фундаментальной системы. Чтобы вычислить верхний предел этой последовательности, можно воспользоваться формулой

$$\lambda_i = \min_{j=\overline{1,\, N-s}} \; \max_{m=\overline{j,\, N}} \lambda_{ki},$$

выбрав определенное значение s (например, $s = [0{,}01N]$). Проконтролировать результат можно, построив графики λ_{ki} для всех значений k.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ

Напомним, что векторное поле A_1, заданное в области G_1, и векторное поле A_2, заданное в области G_2 топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h\colon G_1 \to G_2$, переводящий орбиты первого поля в орбиты второго с сохранением их ориентации.

Топология в пространстве векторных полей на компактном многообразии.

Понятие структурной устойчивости и понятие грубости.

Теорема 5.1. Структурно устойчивые системы на компактном двумерном многообразии образуют открытое всюду плотное множество.

Теорема 5.2. Гладкая система структурно устойчива на двумерном компактном многообразии, если:

1) множество положений равновесия конечно и все они гиперболические;
2) множество периодических траекторий конечно и все они невырождены;
3) нет сепаратрис, связывающих два седла.

Параметрические семейства систем. Аналогия: несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx.$$

Вводим параметры:

$$I(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx.$$

Дифференцируем по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} I(\alpha,\beta) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha}.$$

Значит, $I(\alpha,\beta) = -\ln\alpha + C$. При $\alpha = \beta$ имеем $(I(\beta,\beta) = 0$. Поэтому $C = \ln\beta$ и

$$I(\alpha,\beta) = \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Исходный интеграл равен $\ln 2$.

5.1. Однопараметрические бифуркации

Одно из направлений качественного анализа динамических систем — качественное изменение при изменениях параметров системы.

Рассмотрим систему вида $\dot{x} = f(x,\mu)$, где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $\mu \in \mathbb{R}^P$ — вектор параметров. Ранее говорилось о грубых системах — системах, качественно не изменяющихся при слабом изменении. Понятие слабого изменения требует понятия окрестности в множестве динамических систем. Но если рассматривать параметризованные системы, то под слабым изменением можно понимать изменение, вызванное слабым изменением параметра.

Отсюда следующие олпределения. Значение μ_0 параметра называется ***регулярным***, если существует такая окрестность $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$, что для любого μ из такой окрестности система $\dot{x} = f(x, \mu)$ топологически эквивалентна системе $\dot{x} = f(x, \mu_0)$. Значения параметра, не являющиеся регулярными, называют ***бифуркационными***, а процесс изменения системы при прохождении вектора параметров через бифуркационное значение — ***бифуркацией***.

Для параметризованных систем каждому экземпляру соответствует точка в области параметров (некоторая область в $\mathbb{R}^p$). Типично, что область изменения параметров разделяется не несколько подобластей (может быть, и бесконечное множество), разделенных несколькими гиперповерхностями, в которых различным значениям параметра соответствсуют топологически эквивалентные системы. Разделяющие гиперповерхности состоят из бифуркационных значений, поскольку изменение вектора параметров, при котором происходит переход из одной подобласти в другую, вызывает качественное изменение системы. Гиперповерхности, разделяющие подобласти, называют бифуркационными пленками. Сами бифуркационные пленки могут пересекаться, образуя поверхности коразмерности 2. Соответствующие точки соответствуют бифуркациям коразмерности 2. Чем выше коразмерность бифуркации, тем более хрупкой она является: тем большего количества условий требуется обеспечить для реализации этой бифуркации.

Если изобразить область изменения параметров с ее делением на подобласти со всеми пленками, то получится графическое представление характера параметризованной системы, называемое ***бифуркационной диаграммой***.

Наряду с бифуркационной диаграммой могут использовать и другие диаграммы, отражающие те или иные качественные характеристики системы. Например, топологическим инвариантом динамической системы является совокупность положений равновесия и характер их устойчивости. В $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ можно изобразить все положения равновесия в зависимости от значений вектора параметров и проследить их динамику. Изменение количества положений равновесия или качества одного из них свидетельствует о бифуркации.

Наиболее простыми являются однопараметрические бифуркации, т.е. бифуркации в случае $p = 1$. Рассмотрим варианты типичных бифуркаций положения равновесия. Разумеется, бифуркации могут происходить в многомерных системах, но в наиболее распространенных ситуациях бифуркации затрагивают одну-две фазовых переменных. Наличие остальных фазовых переменных не является существенным. Поэтому остановимся на одномерных и двумерных параметризованных системах.

1. Транскритическая бифуркация (обмен устойчивостью)

$$\dot{x} = \mu x - x^2.$$

В этой системе при прохождении параметра через значение $\mu = 0$ два положения равновесия слипаются, а потом вновь расходятся. При этом, если нарисовать диаграмму положений равновесия в плоскости (x, μ), то ненулевое положение равновесия, проходя через нуль, обменяется устойчивостью с нулевым положением равновесия.

2. Складка, или седлоузловая бифуркация (разрушение или удаление двух особых точек)

$$\dot{x} = \mu + x^2.$$

Два положения равновесия, существующие при $\mu < 0$, при прохождении через нуль, слипаются и исчезают. Отметим, что одно положение равновесия устойчиво, а второе нет. "Разнополюсные" положения равновесия аннигилируют при встрече.

3. «Вилка» (суперкритическая, субкритическая)

$$\begin{aligned} &\text{а) суперкритическая} \qquad \dot{x} = \mu x - x^3, \\ &\text{а) субкритическая} \qquad \dot{x} = \mu x + x^3. \end{aligned}$$

Здесь взаимодействие трех положений равновесия. В первом случае при прохождении μ через 0 рождаются два новых положения равновесия. При этом нулевое положение равновесия сохраняется, но теряет устойчивость, а вновь возникающие положения равновесия "забирают" устойчивость у нулевого. Во втором варианте нулевое положение равновесия, будучи устойчивым "ловит" два других и становится неустойчивым. Названия отражают характер потери устойчивости: в первом случае потеря устойчивости возникает вследствие образования новых устойчивых траекорий, в то время как во втором — вследствие влияния неустойчивых траекторий.

4. Бифуркация Андронова — Хопфа

$$\text{а) суперкритическая} \quad \begin{cases} \dot{x} = -\nu y + x(\mu - (x^2+y^2)), \\ \dot{y} = \nu x + y(\mu - (x^2+y^2)); \end{cases}$$

$$\text{а) субкритическая} \quad \begin{cases} \dot{x} = -\nu y + x(\mu + (x^2+y^2)), \\ \dot{y} = \nu x + y(\mu + (x^2+y^2)). \end{cases}$$

В первом случае (суперкритическая бифуркация) нулевое положение равновесия, будучи фокусом, теряет устойчивость. При этом рождается устойчивый цикл, "забирающий" устойчивость у нулевого положения равновесия. Во втором случае (субкритическая бифуркация) нулевое положение равновесия теряет устойчивость за счет поглощения цикла, который существует при $\mu < 0$. Анализ обоих случаев удобно проводить в полярной системе координат. В этой системе координат системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \mu\rho - \rho^3, \\ \dot{\varphi} = \nu; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\rho} = \mu\rho + \rho^3, \\ \dot{\varphi} = \nu. \end{cases}$$

Вращение и движение по радиусу независимы. При этом для ρ мы имеем бифуркацию "вилка", в то время как вращение происходит с постоянной скоростью. Ненулевое положение равновесия в подсистеме для ρ означает в исходной системе цикл.

Бифуркации предельных циклов по своей природе похожи на бифуркации положений равновесия. Изменение поведения в окрестности цикла можно исследовать с помощью отображения Пуанкаре, положения равновесия (стационарные точки) которого соответствуют циклам исходной системы. Таким образом, анализ предельных циклов сводится к анализу положений равновесия соответствующей дискретной системы.

Простейший вариант бифуркации цикла — потеря им устойчивости. Это происходит, если в процессе изменения параметра системы один из мультипликаторов выходит за пределы единичной окружности (или по-другому, показатель Флоке, т.е. степень мультипликатора, пересекает мнимую ось).

Воспроизвести подобную бифуркацию можно так же, как и в случае бифуркации Андронова — Хопфа: система в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) разделяется на движения по паре параметров (ρ, z) и равномерное независимое вращение вокруг оси z. Тогда циклу будет соответствовать положение равновесия в плоскости (ρ, z). Потеря устойчивости этим положением равновесия будет означать потерю устойчивости циклом.

Еще один важный пример такого рода:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\nu y - \dfrac{\nu}{2}xz - \big((\mu-1)x + 1\big)(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = \nu x + 2z - \dfrac{\nu}{2}yz - (\mu-1)y(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{z} = 2(\mu-1)z - 2xz + \left(y + \dfrac{\nu}{4}\right)(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

Система имеет цикл $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. При прохождении μ через 0 цикл теряет устойчивость, при этом образуется новый цикл удвоенного периода. Бифуркация и называется ***бифуркацией удвоения периода***.

5.2. Простейшие двупараметрические бифуркации

Двумерная складка. Канонический пример:

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + x^2.$$

Корни

$$x_{1,2} = \frac{-\mu_2 \pm \sqrt{\mu_2^2 - 4\mu_1}}{2}.$$

Области $\mu_2^2 - 4\mu_1 > 0$ и $\mu_2^2 - 4\mu_1 < 0$. При переходе два положения равновесия слипаются и исчезают. При переходе через точку $(0, 0)$ внутри области $\mu_2^2 - 4\mu_1 > 0$ транскритическая бифуркация.

Картинка в области (μ_1, μ_2, x): $(x + \mu_2/2)^2 + \mu_1 - \mu_2^2/4 = 0$. Отсюда название.

Сборка. Канонический пример:

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x - x^3.$$

Здесь могут быть три положения равновесия или одно. При разных изменениях вектора $(\mu_1,\ \mu_2)$ возможны складка и бифуркация «вилка».

5.3. Нелокальные бифуркации

Бифуркация петли сепаратрисы седла.

Бифуркация петли сепаратрисы седлофокуса.

Гетероклиническая бифуркация:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - \mu xy, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2) + xy. \end{cases}$$

При $\mu = 0$ имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$$

У это системы есть инвариантные прямые: $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Разобравшись с поведением на этих прямых, получим фазовый портрет. Система имеет два положэения равновесия $P_1(-1; 0)$ и $P_2(1; 0)$, оба — седла. Систему можно решить аналитически.

При $\mu = 0$ у системы есть сепаратриса — интервал $(-1,\ 1)$ оси абсцисс.

Если $\mu \neq 0$, то положения равновесия сохраняются, сохраняется и их тип. При $\mu > 0$ на интервале $(-1,\ 1)$ оси абсцисс векторное поле направлено вправо вверх. Из этого следует, что траектория вдоль неустойчивого многообразия левого положения равновесия не может вернуться на ось абсцисс, т.е. эта траектория перестает быть сепаратрисой. Аналогичная ситуация при $\mu < 0$, но при этом траектория вдоль неустойчивого многообразия левого положения равновесия уходит вниз.

6. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ

6.1. Ограниченные траектории

Один из подходов к качественному анализу динамической системы — выявление и оценка положения ограниченных траекторий системы. Такие траектории имеют большой практический смысл: они описывают динамику процесса, в определенном смысле стабилизирующуюся (не в смысле математическом). Ключевой параметр меняется так, что остается ограниченным.

Понятие ограниченной траектории трансформировалось в понятие инвариантного компакта.

Теорема 6.1. Если траектория автономной системы ограничена, то ее объединение с α-и ω-предельными множествами представляет собой инвариантный компакт.

◀ Присоединение к траектории α-и ω-предельных множеств с топологической точки зрения является замыканием множества, которое, в силу ограниченности, есть компакт. Остается убедиться в том, что это инвариантное множество. Но сама траектория — инвариантное множество. Согласно теореме 3.1 α-и ω-предельные множества являются инвариантными. Следовательно, замыкание ограниченной траектории инвариантно. ▶

Замыкание ограниченной траектории — простейший инвариантный компакт. Есть и более сложные образования, в частности, связанные с хаосом.

Двустороннюю поверхность в фазовом пространстве называют полупроницаемой, если векторное поле системы при пересечении поверхности направлено в одну сторону (или, что то же самое, не касается этой поверхности). Внутри замкнутой полупроницаемой поверхности существует аттрактор или репеллер — в зависимости от направления векторного поля. Действительно, пусть векторное поле направлено внутрь. Взяв точку на поверхности, получим полутраекторию, целиком лежащую внутри поверхности. Эта траектория имеет ω-предельное множество, являющееся инвариантным компактом. Этот компакт либо сам аттрактор, либо является частью аттрактора.

Пример 6.1. Один из хрестоматийных примеров такого рода — система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y; \\ \dot{y} = rx - y - xz; \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \tag{6.1}$$

У этой системы при $r > 1$ три положения равновесия: начало координат, а также еще две точки

$$x_{1,2} = y_{1,2} = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z_{1,2} = r - 1.$$

При значениях параметров

$$\sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}, \quad r = 28$$

у системы Лоренца наблюдается динамический хаос.

Выбрав функцию

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(\sigma + r)z, \tag{6.2}$$

находим

$$\dot{G} = -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2bz^2 + 2b(\sigma + r)z = -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2b\Big(z - \frac{\sigma + r}{2}\Big)^2 + \frac{(\sigma + r)^2}{4}.$$

Выбрав поверхность $G(x, y, z) = M$ с достаточно большим M, заключаем, что на этой поверхности $\dot{G} < 0$. Следовательно, эта поверхность является полупроницаемой: векторное поле направлено против вектора нормали к поверхности, который направлен вовне.

6.2. Функциональный метод локализации

Полупроницаемые поверхности можно рассматривать как своего рода отголосок метода локализации инвариантных компактов, называемого функциональным.

Под локализацией инвариантных компактов динамической системы мы понимаем задачу построения в фазовом пространстве системы такого множества, которое содержит все инвариантные компакты рассматриваемой системы. Указанное множество называется ***локализирующим***.

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \tag{6.3}$$

фазовым пространством которой является открытое множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Выберем гладкую функцию φ, определенную в фазовом пространстве X системы. Множество

$$S_\varphi = \{x \in X\colon \dot{\varphi}(x) = 0\}$$

называют ***универсальным сечением*** рассматриваемой системы. Обозначим

$$\varphi_{\inf} = \inf_{x \in S_\varphi} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup} = \sup_{x \in S_\varphi} \varphi(x). \tag{6.4}$$

Теорема 6.2. Все инвариантные компакты системы (6.3) содержатся в множестве

$$\Omega_\varphi = \{x \in X\colon \varphi_{\inf} \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}\}.$$

◀ Пусть K — инвариантный компакт системы (6.3). Функция φ достигает на нем максимального значения в некоторой точке $x^* \in K$ и минимального в точке $x_* \in K$. Рассмотрим точку x^*. Через нее проходит траектория системы $x = \gamma(t)$ (т.е. $\gamma(0) = x^*$), целиком принадлежащая K. Рассмотрим функцию $h(t) = \varphi(\gamma(t))$. Эта функция достигает максимального значения при $t = 0$. Значит, $h'(0) = 0$, откуда $\dot{\varphi}(x^*) = \varphi'(x^*) f(x^*) = 0$. Следовательно, $x^* \in S_\varphi$. Аналогично доказывается, что $x_* \in S_\varphi$. Из этих условий делаем вывод, что для любой точки $x \in K$

$$\varphi_{\inf} = \inf_{x \in S_\varphi} \varphi(x) \leqslant \varphi(x_*) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x^*) \leqslant \sup_{x \in S_\varphi} \varphi(x) = \varphi_{\sup}.$$

Приведенные неравенства означают, что $x \in \Omega_\varphi$. Таким образом, $K \subset \Omega_\varphi$. ▶

Несложно получить простое обобщение теоремы 6.2. Для произвольного множества $Q \subset X$ введем обозначения

$$\varphi_{\inf}(Q) = \inf_{x \in S_\varphi \cap Q} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{x \in S_\varphi \cap Q} \varphi(x).$$

Отметим, что в частном случае $Q = X$ эти обозначения сводятся к обозначениям (6.4).

Теорема 6.3. Все инвариантные компакты системы (6.3), содержащиеся в множестве Q, содержатся в множестве

$$\Omega_\varphi(Q) = \{x \in X\colon \varphi_{\inf}(Q) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}(Q)\}.$$

Теоремы 6.2 и 6.2 дают метод построения локализирующего множества с помощью функции φ, которую называют ***локализирующей***. Этот метод называют функциональным.

Функциональный метод локализации не дает заключений о существовании инвариантных компактов. Он лишь утверждает, что если такие компакты есть, то они содержатся в построенном множестве. Точнее, утверждение состоит в следующем: ни один инвариантный компакт системы не пересекается с множеством $X \setminus \Omega_\varphi$.

Для применения функционального метода локализации можно взять любую гладкую функцию. Однако возможно, что ответ окажется тривиальным: построенное локализирующее множество совпадет с фазовым пространством (или с множеством Q в случае теоремы 6.3). В этом случае никакой реальной оценки возможного положения ограниченных траекторий не будет.

Укажем простейшие свойства локализирую.щих множеств.

1. Пересечение любого семейства локализирующих множеств является локализирующим множеством.

2. Если $\psi(x) = h(\varphi(x))$, где h — строго монотонная функция одного переменного, то $\Omega_\psi(Q) = \Omega_\varphi(Q)$ для любого множества $Q \subset X$.

3. Если функция φ достигает на X наибольшего (наименьшего) значения в некоторой точке $x_0 \in Q$, то $\varphi_{\sup}(Q) = \varphi(x_0)$ (соответственно $\varphi_{\inf}(Q) = \varphi(x_0)$), так что неравенство $\varphi(x) \leqslant \varphi_{\sup}(Q)$ (соответственно $\varphi_{\inf}(Q) \leqslant \varphi(x)$) выполняется на всем множестве Q.

Даже если выбранная функция привела к нетривиальному локализирующему множеству, это множество может быть слишком обширным, чтобы можно было удовлетвориться результатом. Наилучший вариант — когда локализирующее множество оказывается компактным (иначе ограниченным). Это позволяет далее использовать различные численные методы, например с помощью различных сеток. Но в любом случае целесообразно использовать разные локализирующие функции, объединяя полученные результаты. Можно предложить две стратегии использования нескольких локализирующих функций.

1. Использование параметрических семейств локализирующих функций. Суть стратегии заключается в использовании локализирующей функции $\varphi(x, p)$, включающей параметр p (возможно, векторный). Проведя процедуру построения локализирующего множества, получим семейство таких множеств $\Omega_{\varphi,p}$. В качестве итогового результата следует построить пересечение параметрического семейства множеств.

2. Применение специальной итерационной процедуры уточнения. Полагая $Q_0 = X$ с помощью локализирующей функции φ_1 строим локализирующее множество $\Omega_1 = \Omega_{\varphi_1}$. Далее, рассматривая Ω_1 как множество Q в теореме 6.3, с помощью новой функции φ_2 строим локализирующее множество $\Omega_2 = \Omega_{\varphi_2}(\Omega_1)$, для которого, очевидно, $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Процесс можно продолжать, применяя последовательность функций $\{\varphi_n\}$ и строя последовательность вложенных множеств

$$\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2.$$

В качестве итогового результата рассматриваем $\Omega_* = \bigcap\limits_n \Omega_n$.

Построение пересечения параметрического семейства множеств — в действительности очень нетривиальная задача. Здесь можно предложить два подхода.

1. Пусть однопараметрическое семейство $\Omega(r)$ описывается неравенством, квадратичным по параметру r:

$$\alpha(x)r^2 + \beta(x)r + \gamma(x) \leqslant 0,$$

где параметр r меняется на интервале $(0, +\infty)$. Тогда пересечение этого семейства множеств описывается системой неравенств

$$\begin{cases} \alpha(x) \leqslant 0, \\ \gamma(x) \leqslant 0, \\ \beta(x) \leqslant 2\sqrt{\alpha(x)\gamma(x)}. \end{cases}$$

Аналогичные результаты можно получить в более общем случае, когда r пробегает заданный интервал $(r_1,\ r_2)$ числовой оси. Такого же рода утверждение возможно, если неравенство линейно по параметру (это можно рассматривать как частный случай сформулированного результата). Принциапиально ясно, что это можно обобщать на общий случай неравенства, полиномиального по параметру, но в таком виде конкретную формулировку дать гораздо труднее.

2. Предположим неравенство $g(x, r) \geqslant 0$ разрешимо относительно одной из переменных, например относительно x_1, т.е. может быть преобразовано в эквивалентное неравенство вида $x_1 \geqslant h(x_2, x_3, \ldots, x_n, r)$ или $x_1 \geqslant h(x_2, x_3, \ldots, x_n, r)$. Тогда пересечение параметрического семейства множеств описывается неравенством

$$x_1 \geqslant \sup_r h(x_2, x_3, \ldots, x_n, r)$$

или

$$x_1 \leqslant \inf_r h(x_2, x_3, \ldots, x_n, r).$$

Пример 6.2. Рассмотрим систему Лоренца (6.1). АВ качестве локализирующей выберем функцию

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + By^2 + Bz^2 - 2(\sigma + Br)z,$$

где B — параметр (ср. (6.2)). Тогда

$$\dot{\varphi} = -2\sigma x^2 - 2By^2 - 2bBz^2 + 2b(\sigma + Br)z.$$

Возникает задача математического программирования

$$\begin{cases} x^2 + By^2 + Bz^2 - 2(\sigma + Br)z \to \mathrm{extr}, \\ \sigma x^2 + By^2 + bBz^2 - b(\sigma + Br)z = 0. \end{cases}$$

Как ее решать? Во-первых, можно параметризовать ограничение и тем самым свести задачу к безусловной оптимизации. Во-вторых, ограничившись случаем $B > 0$ заметим, что ищутся точные грани функции на компактном множестве (эллипсоиде). Поэтому эти грани достигаются в точках локального экстремума, которые можно искать методом Лагранжа. Отметим, что при $B > 0$ целевая функция имеет глобальный минимум. Поэтому можно ограничиться поиском максимума $\varphi_{\sup}$, а локализирующее множество будет иметь вид

$$x^2 + By^2 + Bz^2 - 2(\sigma + Br)z \leqslant \varphi_{\sup}.$$

Метод Лагранжа дает

$$\varphi_{\sup} = \frac{(\sigma + Br)^2}{B} k(b),$$

где

$$k(b) = \begin{cases} 0, & 0 < b \leqslant 2; \\ \dfrac{(b-2)^2}{4(b-1)}, & b \geqslant 2. \end{cases}$$

В результате приходим к неравенству

$$Bx^2 + B^2(y^2 + z^2) - 2B(\sigma + Br)z \leqslant (\sigma + Br)^2 k(b),$$

или

$$\big(y^2 + z^2 - 2rz - k(b)r^2\big)B^2 + \big(x^2 - 2\sigma z - 2\sigma r k(b)\big)B - \sigma^2 k(b) \leqslant 0.$$

Пересечение семейства будет описываться системой неравенств

$$\begin{aligned} &y^2 + z^2 - 2rz - k(b)r^2 \leqslant 0, \\ &x^2 - 2\sigma z - 2\sigma r k(b) \leqslant \sigma\sqrt{k(b)(k(b)r^2 - y^2 - z^2 + 2rz)}. \end{aligned}$$

Пример 6.3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot\rho = (\nu - 1)\rho + \rho\zeta, \\ \dot\zeta = \nu\zeta - \rho^2 - \zeta^2, \end{cases}$$

возникающую при анализе системы Ланфорда (см. пример 3.4). Для простоты ограничимся случаем $\nu > 0$. Выбрав в качестве локализирующей функцию $\varphi(\rho, \zeta) = \zeta$, получим $\dot\varphi = \nu\zeta - \rho^2 - \zeta^2$. Приходим к задаче оптимизации

$$\begin{cases} \zeta \to \mathrm{extr}, \\ \rho^2 + \zeta^2 - \nu\zeta = 0. \end{cases}$$

Ее решения

$$\varphi_{\inf} = 0, \quad \varphi_{\sup} = \nu.$$

Таким образом, построено локализирующее множество

$$\Omega_1 = \{(\rho,\ \zeta)\colon 0 \leqslant \zeta \leqslant \nu\}.$$

Взяв далее функцию $\psi(\rho, \zeta) = \rho$, находим $\dot\psi = (\nu - 1)\rho + \rho\zeta$, что приводит к задаче

$$\begin{cases} \rho \to \mathrm{extr}, \\ (\nu - 1)\rho + \rho\zeta = 0. \end{cases}$$

Эта задача имеет решения $\psi_{\inf} = -\infty$, $\psi_{\sup} = +\infty$, т.е. приходим к тривиальному решению. Однако, если учесть уже полученное локализирующее множество, ситуация изменяется. Уточним задачу:

$$\begin{cases} \rho \to \mathrm{extr}, \\ (\nu - 1)\rho + \rho\zeta = 0, \\ 0 \leqslant \zeta \leqslant \nu. \end{cases}$$

При $0 < \nu \leqslant 1$ это ничего не дает. Однако при $\nu > 1$ уравнение $(\nu - 1)\rho + \rho\zeta = 0$ эквивалентно уравнению $\rho = 0$, что приводит к локализирующему множеству $\rho = 0$. Таким образом, при $\nu \geqslant 1$ все инвариантные компакты системы находятся на отрезке $\rho = 0$, $\zeta \in [0,\ 1]$.

Нетрудно увидеть, что ось $\rho = 0$ является инвариантным множеством. Двумя положениями равновесия $(\rho, \zeta) = (0,\ 0)$ и $(\rho, \zeta) = (0,\ \nu)$ ось разделяется на три траектории (не считая сами положения равновесия), одна из них — отрезок $\rho = 0$, $\zeta \in [0,\ 1]$.

7. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Фазовый поток $G(t, x)$ может быть связан с дискретным временем, т.е. t может принимать только определенные значения t_i. Поскольку каждый такой момент времени определяется некоторым целым числом, то и представлять можно поток как функцию целочисленного аргумента: $G(n, x)$.

Знание состояния x системы в момент времени n должно определять состояние системы в любой будущий момент времени, в частности в момент времени $n+1$. Следовательно, закон эволюции можно описать некоторой функцией $F(n, x)$, которая состоянию x в момент времени n ставит в соответствие состояние $F(n, x)$ в момент времени $n+1$. Это обстоятельство записывают следующим образом:

$$x_{n+1} = F(n, x_n). \tag{7.1}$$

При этом говорят о ***дискретной системе*** (***динамической системе дискретного времени***).

Функция $F(n, x)$ порождает другую функцию $G(n, m, x)$, которая указывает состояние объекта в момент времени m при условии, что в момент времени n состояние было x. Предполагается, что $m > n$. Функцию $G(n, m, x)$ называют ***каскадом***.

Функция $F(n, x)$ на самом деле может не зависеть от n. Тогда дискретную систему называют ***автономной***, иначе ***неавтономной***. Автономную дискретную систему записывают в виде

$$x_{n+1} = F(x_n). \tag{7.2}$$

Так как отображение F полностью определяет автономную дискретную систему, то часто термин «система» подменяют термином «отображение», подчеркивая, что рассматривают итерации отображения. Кроме того, дискретную систему часто записывают в виде

$$\tilde{x} = F(x), \tag{7.3}$$

снимая индексы и тем самым подчеркивая динамику системы ровно на один шаг.

Последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая равенствам (7.1), называется ***орбитой*** или ***траекторией***.

Если траектория непрерывной системы может быть определена на любом интервале, охватывающем начальную точку, то орбита дискретной системы — это всегда полуинтервал $[n_0, +\infty)$ множества целых чисел или все множество целых чисел $(-\infty, +\infty)$, т.е. максимальный интервал времени не ограничен сверху.

В отличие от непрерывных систем дискретные могут терять свойство единственности в прошлом, т.е. могут существовать орбиты $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, которые совпадают только с определенного момента времени $x_{n_0} \neq y_{n_0}$, $x_{n_0+1} = y_{n_0+1}$.

Далее мы будем рассматривать автономные системы. Автономная система определяется некоторым отображением F: $X \to X$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Множество X —***фазовое пространство***. Отображение F во всех случаях считаем непрерывным.

Дискретная система (7.2) ***обратимая***, если отображение F является биекцией. При этом отображение F^{-1} задает обратную систему. Если F не является биекцией (даже если оно взаимно однозначно), то система ***необратимая***.

Множество $G \subset X$ называется ***положительно инвариантным*** для автономной дискретной системы, если любая положительная полутраектория, начинающаяся в G, целиком содержится в G. Сформулированное условие эквивалентно следующему:

$$F(G) \subset G.$$

Множество $G \subset X$ называется ***отрицательно инвариантным*** для автономной дискретной системы, если

$$F(G) \supset G. \tag{7.4}$$

Замечание 7.1. В отличие от непрерывных систем в дискретных системах прошлое и будущее не симметричны (исключение — обратимые системы). Поскольку в динамических системах детерминированность будущего — важнейшее условие, то и определения, касающиеся будущего, достаточно мотивированы. Что же касается прошлого, то здесь не все так очевидно.

Введенное определение отрицательно инвариантного множества означает, что любое положение в G имеет предысторию, т.е. для любого $x_0 \in G$ существует предыдущее состояние, т.е. состояние $x_{-1} \in G$, для которого $F(x_{-1}) = x_0$. Такое условие не является самоочевидным, хотя может возникать в тех или иных задачах. Возможны и другие подходы. Например, можно считать отрицательно инвариантным множество G, для любой точки которого любая возможная предыстория содержится в G. Правда вопрос, а что делать с точками, которые не имеют предыстории, т.е. не попадают в $F(X)$? Можно исходить из принципа: пустое множество включается в любое другое. Это уже другой подход, который можно охарактеризовать формулой

$$F^{-1}(G) \subset G. \tag{7.5}$$

Следует отметить, что включения (7.4) и (7.5) разные: ни одно из них не следует из другого. Первое допускает предысторию вне G, т.е. возможно $F(X \setminus G) \cap G \neq \varnothing$. Второе допускает отсутствие предыстории, т.е. возможно $G \setminus F(X) \neq \varnothing$.

Предельное множество $\omega(x_0)$ для точки $x_0 \in X$ — множество предельных точек полуорбиты $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$, которое можно записать в виде

$$\omega(x_0) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{f^k(x_0)\},$$

где $f^k(x)$ — композия k экземпляров функции $f(x)$, т.е. $f^1(x) = f(x)$ и $f^k(x) = f^{k-1}(f(x))$, $k \geqslant 2$.

Заметим, что предельное множество любой точки замкнуто положительно инвариантно. Замкнутость — общее свойство, касающееся множества предельных точек. Положительная инвариантность эквивалентна утверждению: если $y \in \omega(x_0)$, то и $F(y) \in \omega(x_0)$.

7.1. Линейные системы

Под линейной мы понимаем дискретную систему вида

$$x_{n+1} = Ax_n + b.$$

Если $b = 0$, система однородная. Для такой системы нетрудно увидеть, что

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A^2x_0, \quad \ldots, \quad x_n = A^nx_0.$$

Таким образом, любое начальное значение x_0 порождает положительную полуорбиту $x_n = A^nx_0$. В прошлое необходимо решать систему $x_0 = Ax_{-1}$, которая может решений и не иметь.

Запись $x_n = A^nx_0 = A^nC$ можно трактовать как запись общего решения линейной однородной системы.

Если система неоднородная, то общее решение может быть представлено как частное решение плюс общее решение однородной системы. Частное решение можно попробовать найти, выбрав $x_0 = 0$. Тогда

$$x_1 = b, \quad x_2 = Ab + b, \quad x_3 = A^2b + Ab + b, \quad \ldots, \quad x_n = A^{n-1}b + A^{n-2}b + \ldots + b.$$

Выражение $A^{n-1}b + A^{n-2}b + \ldots + b$ можно записать компактно, если матрица $E - A$ не вырождена. Умножив сумму на $E - A$ и упростив, получим

$$(E - A)(A^{n-1}b + A^{n-2}b + \ldots + b) = b - A^{n+1}b = (E - A^n)b.$$

Отсюда

$$x_n = (E - A)^{-1}(E - A^n)b.$$

Общее решение в рассматриваемом случае задается формулой

$$x_n = A^n C + (E - A)^{-1}(E - A^n)b.$$

Здесь C представляет собой начальное условие: $C = x_0$.

В линейных системах можно выполнять линейную невырожденную замену переменных. Рассмотрим однородный случай $x_{n+1} = Ax_n$. Само отображение $x \mapsto Ax$ можно рассматривать как запись в базисе действия линейного оператора. Ясно, что такая трактовка сохранится при замене базиса. Поэтому матрица при замене базиса меняется по закону матрицы линейного оператора: $A' = U^{-1}AU$.

В неоднородном случае запись $x' = Ax + b$ можно интерпретировать как композицию отображений $y = Ax$ и $x' = y + b$. Первое описано. Второе отображение есть сдвиг на вектор с координатами b. Для записи в новом базисе необходимо пересчитать координаты вектора сдвига: $b' = U^{-1}b$. В результате, если замена $x = Uy$, то в новых переменных получаем

$$x_{n+1} = Ax_n + b \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = A'y_n + b',$$

где

$$A' = U^{-1}AU, \quad b' = U^{-1}b.$$

Можно также использовать замену вида $x = y + d$ (сдвиг). Такой сдвиг может помочь превратить неоднородный случай в однородный. Действительно, если $\tilde{x} = Ax + b$, то

$$\tilde{y} + d = A(y + d) + b = Ay + (Ad + b),$$

откуда

$$\tilde{y} = Ay + b - (E - A)d.$$

Если система $(E - A)x = b$ имеет решения, то выбрав d в качестве такого решения, получим систему вида $\tilde{y} = Ay$, т.е. однородную. Система $(E - A)x = b$ может быть записана в виде

$$Ax + b = x.$$

7.2. Положения равновесия

Если орбита $\{x_n\}$ постоянная, т.е. $x_n = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, то соответствующее состояние называют ***положением равновесия*** дискретной системы (также точкой покоя, стационарной точкой, особой точкой). Для автономной системы условие равновесия сводится к уравнению

$$x = F(x).$$

Как и в случае непрерывных систем, возникает задача анализа устойчивости положений равновесия.

Определение 7.1. Орбита $\{x_n\}$ автономной системы $x_{n+1} = F(x_n)$ называется устойчивой, если для любых $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ существует такое $\delta > 0$, что для любой орбиты $\{y_n\}$, удовлетворяющей условию $\|x_N - y_N\| < \delta$, имеем $\|x_n - y_n\} < \varepsilon$ при $n \geqslant N$.

Определение 7.2. Орбита $\{x_n\}$ автономной системы $x_{n+1} = F(x_n)$ называется асимптотически устойчивой, если она устойчива и для любого $N \in \mathbb{N}$ существует такое $\delta > 0$, что для любой орбиты $\{y_n\}$, удовлетворяющей условию $\|x_N - y_N\| < \delta$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

В отношении положения равновесия автономной системы определения можно упростить, каждый раз полагая, что $N = 0$.

Для дискретных систем, как и для непрерывных, исследования на устойчивость могут вестись как с помощью функций Ляпунова, так и методом линеаризации.

Метод Ляпунова. Для начало введем понятие функции Ляпунова.

Определение 7.3. Непрерывная функция $V\colon X \to \mathbb{R}$, определенная на фазовом пространстве X дискретной системы $x_{n+1} = F(x_n)$, называется функцией Ляпунова этой системы на множестве $G \subset X$, если $V(F(x)) - V(x) \leqslant 0$, $x \in G$.

Теорема 7.1. Пусть x_* — положение равновесия системы $x_{n+1} = F(x_n)$. Если для некоторой окрестности $O(x_*)$ точки x_* существует положительно определенная функция Ляпунова на $O(x_*)$, то положение равновесия x_* устойчиво. Если к тому же $V(F(x)) - V(x) < 0$ на $O(x_*)$, то положение равновесия x_* асимптотически устойчиво.

Замечание. Функция Ляпунова положительно определена, если $V(x) > 0$ при $x \neq x_*$ и $V(x_*) = 0$.

◀ Выберем произвольную ограниченную окрестность U точки x_*, полагая, что ее замыкание $\overline{U}$ содержится в $O(x_*)$. В силу непрерывности функции F в точке x_* существует окрестность $U_1 \subset U$, такая, что $f(U_1) \subset U$. Положим

$$\lambda = \min_{x\in\overline{U}\setminus U_1} V(x).$$

Речь идет о компакте $\overline{U} \setminus U_1$, на котором V достигает точной нижней грани, а поскольку $x_* \notin \overline{U} \setminus U_1$, то $\lambda > 0$. Положим

$$W = \{x \in U\colon V(x) < \lambda\}.$$

Очевидно, что W открыто и содержит x_*. При этом $f(W) \subset W$, поскольку

$$V(f(x)) \leqslant V(x) < \lambda, \quad x \in W.$$

В результате, для любой ограниченной окрестности U точки x_* построена окрестность W этой точки, для которой $f^k(W) \subset W \subset U$. Значит, положение равновесия x_* устойчиво.

Если выполняется условие $V(F(x)) < V(x)$, то для любой полуорбиты $\{x_n\}$ имеем $V(x_{n+1}) < V(x_n)$, так что последовательность $\{V(x_n)\}$ монотонно убывает, ограничена снизу нулем, а следовательно, сходится к некоторому значению $V_\infty \geqslant 0$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена $\Rightarrow$ имеет непустое предельное множество $\omega(x_0)$, на котором функция Ляпунова имеет постоянное значение V_∞. Но множество $\omega(x_0)$ инвариантно, так что при $y \in \omega_(x_0)$ имеем $F(y) \in \omega_(x_0)$, так что $V(F(y)) = V(y)$. Но это возможно лишь при $y = x_*$. Таким образом, $\omega(x_0)$ совпадает с x_*, а последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_*. ▶

Теорема показывает, что метод Ляпунова без особых проблем переносится на дискретные системы.

Метод линеаризации. Под линеаризацией системы $x_{n+1} = F(x_n)$ понимается замена правой части уравнения ее линейной частью. Пусть $F(x_*) = x_*$. Тогда

$$F(x) = x_* + F'(x_*)(x - x_*) + o(x - x_*).$$

Вводя переменную $y = x - x_*$ и отбрасывая слагаемые высокого порядка малости, приходим к линейной системе

$$\tilde{y} = F'(x_*)y,$$

которая и называется линеаризацией дискретной системы в окрестности положения равновесия.

Для начала рассмотрим задачу об устойчивости нулевого положения равновесия линейной системы.

Теорема 7.2. Нулевое положение равновесия линейной системы устойчиво, если все собственные числа матрицы системы расположены внутри единичного круга $|z| < 1$ на комплексной плоскости. Нулевое положение равновесия неустойчиво, если есть собственное число вне замкнутого единичного круга

◀ Пусть у матрицы A системы есть собственное значение λ_0. Ему соответствует собственный вектор $v \neq 0$. Для этого вектора получаем $A^n v = \lambda_0^m v$, откуда $\|A^n v\| = |\lambda_0|^m \|v\|$. Если $|\lambda_0| > 1$, то вектор v можно выбрить по норме сколь угодно малым, т.е. для любого $\delta > 0$ можно выбрать v так, что $\|v\| < \delta$. Но при этом при достаточно большом n получаем $\|A^n v\| = |\lambda_0|^m \|v\| \geqslant 1$ — достаточно выбрать $n > \dfrac{-\ln\delta}{\ln|\lambda_0|}$. Следовательно, существование собственного значения вне единичного круга ведет к нарушению устойчивости.

Если для всех собственных чисел $|\lambda_i| \leqslant 1$, то линейный оператор имеет спектральный радиус $\rho(A) < 1$. Спектральный радиус — это, с одной стороны, максимум модулей собственных значений, а с другой — предел $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$. Можно найти такой номер K, что $\|A^k\| \leqslant q^k$, $q < 1$. Тогда для любого вектора v $\|A^{mk} v\| \leqslant q^m \|v\| \leqslant \|v\|$. Окончательное доказательство опирается на непрерывность операторов A^n, $n = \overline{1,\, k-1}$. ▶

Теорема 7.3. Нулевое положение равновесия дискретной системы устойчиво, если все собственные числа матрицы системы линейного приближения расположены в единичном круге $|z| < 1$ на комплексной плоскости. Нулевое положение равновесия неустойчиво, если есть собственное число вне замкнутого единичного круга. #

Точка покоя ***гиперболическая***, если матрица Якоби отображения в этой точке не имеет характеристических корней на единичной окружности.

7.3. Периодические орбиты

Рассмотрим орбиту x_0, x_1, … Если существует такое N, что $x_0 = x_N$, то орбиту называют периодической, или ***циклом***. Точки цикла называют периодическими. Каждая из точек цикла может рассматриваться как начальная его точка.

Наименьшее зеначение N, удовлетворяющее условию периодичности, называют ***периодом цикла***. Формально возможно значение $N = 1$. В этом случае орбита постоянна и представляет собой положение равновесия. Таким образом, положения равновесия можно считать частным случаем периодических точек с периодом 1. «Настоящие» периодические точки имеют период 2 или выше.

Отметим, что возможна ситуация, когда $x_N = x_k$, где $0 < k < N$, т.е. не вся орбита, а некоторый ее хвост является периодической. Например, в одномерной системе $\tilde{x} = x^3 - x$ есть положение равновесия $x = 0$. Точки $x = \pm 1$ не являются положениями равновесия, но если, например, $x_0 = 1$, то $x_1 = x_0^3 - x_0 = 0$: образ такой точки оказывается положением равновесия. В этом случае говорят о ***положениях равновесия в конечном счете*** или ***периодических точках в конечном счете***.

Если x_0 — периодическая точка системы $\tilde{x} = F(x)$ периода N, то

$$F^N(x_0) = F^{N-1}(F(x_0)) = F^{N-1}(x_1) = F^{N-2}(x_2) = \ldots = x_N = x_0.$$

Таким образом, периодическая точка периода N является положением равновесия отображения F^N. Нетрудно понять, что отображение F^N в качестве положений равновесия имеет положения равновесия F, а также периодические точки отображения F с периодом, являющимся делителем числа N.

Как исследовать периодические орбиты на устойчивость? Способ в чем-то похож на исследование циклов в непрерывных системах: надо исследовать поведение через период. Но в данном случае все даже проще.

Теорема 7.4. Периодическая орбита периода N устойчива, если произвольная точка орбиты является устойчивой точкой покоя отображения F^N.

◀ Пусть y_0, y_1, ..., y_N, ... — какая-либо орбита. Тогда y_0, y_N, y_{2N}, ..., y_{kN}, ... — орбита отображения F^N. Из устойчивости орбиты $\{y_j\}$ отображения F следует устойчивость орбиты $\{y_{kN}\}$ отображения F^N (это равнозначно переходу в пределе от последовательности к подпоследовательности). Но и обратное утверждение тоже верно. Действительно, если орбита $\{y_{kN}\}$ устойчива, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|\xi_0 - y_0| < \delta$ будем иметь $|\xi_{kN} - y_{kN}| < \varepsilon$. Отметим, что $\xi_{kN+1} = F(\xi_{kN})$, ..., $\xi_{(N+1)-1} = F^{N-1}(\xi_{kN})$. Если траектория $\{y_{kN}\}$ ограничена, т.е. содержится в некотором компакте, то функции F, F^2, ..., F^{N-1} в совокупности равномерно ограничены. Это значит, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что при $|\xi_{kN} - u_{kN}| < \varepsilon$ имеем $|\xi_{kN+j} - u_{kN+j}| < \varepsilon_0$, $j = \overline{1,\ N{-}1}$. Но тогда при $|\xi_0 - y_0| < \delta$ имеем $|\xi_n - y_n| < \varepsilon_0$, т.е. устойчивость траектории $\{y_n\}$.

В частном случае периодической траектории получаем утверждение теоремы. ▶

Пусть y_0, y_1, ..., $y_N = y_0$ — цикл дискртеной системы $\tilde{x} = F(x)$. Если отображение F дифференцируемо, то

$$\frac{dF^N}{dx}(y_0) = \frac{dF}{dx}(y_{N-1})\,\frac{dF}{dx}(y_{N-2})\ldots\frac{dF}{dx}(y_0),$$

т.е. матрица Якоби N-кратного отображения равна произведению матриц Якоби исходного отображения во всех точках цикла.

Теорема 7.5. Собственные значения матрицы линейного приближения функции F^N в точках цикла периода N одинаковы.

◀ Матрица линейного приближения F^N — матрица Якоби — в точке y_0 цикла может быть представлена в виде произведения n матриц. Матрица линейного приближения в другой точке — произведение тех же матриц, но переставленных циклическим образом. Например, в точке y_0 имеем:

$$\frac{dF^N}{dx}(y_0) = \frac{dF^{N-1}}{dx}(y_1)\,\frac{dF}{dx}(y_0)$$

(для краткости произведение первых $N - 1$ сомножителей свернуто), а в точке y_1

$$\frac{dF^N}{dx}(y_1) = \frac{dF}{dx}(y_0)\,\frac{dF^{N-1}}{dx}(y_1).$$

Остается заметить, что собственные значения произведения двух матриц не зависят от порядка сомножителей (хотя само произведение, естественно, зависит). В самом деле, пусть $ABx = \lambda x$. Тогда $Bx = y$, $Ay = \lambda x$. Значит, $BAy = B(\lambda x) = \lambda Bx = \lambda y$. Другими словами, если λ — собственное значение оператора AB, то оно является и собственным значением оператора BA. ▶

Следствие 7.1. Периодическая орбита периода N системы $\tilde{x} = F(x)$, включающая точку x_*, устойчива, если все собственные значения матрицы линейного приближения отображения F^N в точке x_* содержатся внутри единичного круга, и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение находится вне единичного круга.

7.4. Аттракторы

Аттракторы для дискретных систем определяются так же, как и для непрерывных: это область, куда в пределе стремится множество траекторий, при этом характер времени (дискретный или непрерывный) не является существенным. Есть, правда, одно отличие: непрерывная система симметрична относительно пары «прошлое-будущее», а дискретная система — нет. Соответственно у непрерывных систем есть репеллеры, двойственное к аттракторам понятие, а у дискретных систем такое обычно не рассматривают, поскольку типичную систему нельзя развернуть в прошлое.

Повторим соответствующие определения.

Притягивающее множество — множество K, обычно компактное, удовлетворяющее условию: существует такая окрестность $U \supset K$, что любая положительная полутраектория дискртеной системы, начинающаяся в точке из U, имеет ω-предельное множество, целиком лежащее в K.

Объединение всех U с указанным свойством есть, очевидно, максимальная окрестность, в которой притягивание имеет место. Такое объединение называется ***областью притяжения*** или ***бассейном*** притягивающего множества.

Аттрактором называется притягивающее множество, дополнительно обладающее свойствами:

1) оно инвариантно (в смысле «совпадает со своим образом»);

2) оно компактно (замкнуто и ограничено);

3) оно неразложимо, т.е. у него нет таких подможеств, которые удовлетворяют предыдущим условиям (притягиваемость, инвариантность, компактность).

Определение дает некоторый набор признаков, которыми должен обладать аттрактор, но эти признаки взаимно зависимы, но не следуют один из другого. При этом эти признаки не всегда легко проверить. Однако есть процедура, когда это можно.

Назовем ***областью захвата*** (trapping region) замкнутую ограниченную область G, образ которой содержится во внутренности G, т.е. $F(G) \subset \operatorname{int} G$.

Для области захвата G имеем

$$G \Supset f(G) \Supset F^2(G) \ldots \Supset F^n(G) \Supset \ldots$$

(знак $\Supset$ обозначает «содержит строго внутри»). Значит, определено пересечение

$$H = \bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(G).$$

Теорема 7.6. Множество H не пусто, замкнуто и инвариантно.

◀ Так как $F(N)$ компактно как образ компактного множества. Поэтому мы имеем последовательность компактных вложенных множеств. Пересечение их не пусто и замкнуто. Далее, если $x \in H$, то $x \in F^n(G)$ для любого n. Поэтому $F(x) \in F^n(G)$ для каждого n, откуда заключаем, что $F(x) \in N$. Наоборот, если $y \in N$, то $y \in F^n(G)$ при $n > 1$. Следовательно, существует такой $x_n \in F^{n-1}(G)$, что $F(x_n) = y$. Последовательность $\{x_n\}$, как последовательность на компакте, имеет сходящуюся подпоследовательность. Ее предел x_∞ принадлежит каждому множеству $F^N(G)$, т.е. принадлежит N. При этом в силу непрерывности $F(x_\infty) = y$. Это значит, что $F(N) = N$. ▶

Теорема накрывает два условия для аттрактора из трех. Например, если есть два асимптотически устойчивых положения равновесия, то для каждого из них есть область захвата (строится с помощью функции Ляпунова). Ясно, что в этом случае N будет множеством из двух положений равновесия, которое не удовлетворяет условию неразложимости.

Примерами аттракторов являются асимптотически устойчивые положения равновесия и циклы. Аттрактором может быть компактная поверхность (например, тор, сфера). Однако могут быть и более сложные множества типа канторовых. Поведение системы на аттракторе также может быть сложным. Именно с аттракторами связпано понятие динамического хаоса.

Хаотический аттрактор — аттрактор, удовлетворяющий следующим условиям (Девани — Devaney):

1) множество периодических точек на аттракторе всюду плотно, т.е. в любой окрестности любой точки аттрактора есть периодические точки, принадлежащие аттрактору;

2) отображение F, рассматриваемое на аттракторе N, топологически транзитивно, т.е. для любых открытых множеств U и V, где $U \cap N \neq \varnothing$, $V \cap N \neq \varnothing$, существует такое n, что $F^n(U \cap N) \cap (V \cap N) \neq \varnothing$;

3) отображение F, рассматриваемое на аттракторе N, чувствительно по начальным условиям, т.е. существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in N$ и любой ее окрестности V_x можно указать такую точку $y \in V_x \cap N$, что $\rho(F^n(x), F^n(y)) > \delta$.

Может ли положение равновесия попадать на аттрактор? Да, если оно не является асимптотически устойчивым. То же в отношении циклов. И их может быть очень много.

Топологическая транзитивность означает, что, стартуя в окрестности какой-либо точки на аттракторе, рано или поздно попадем в окрестность любой другой точки.

Наконец, чувствительность по начальным условиям означает, что все траектории на аттракторе не устойчивы.

Условия в определении хаотического аттрактора взаимозависимы.

Теорема 7.7. Если A бесконечно, то из плотности периодических точек и транзитивности вытекает чувствительность по начальным условиям.

Как проверять устойчивость? Как и в непрерывном случае, используют показатели Ляпунова. Пусть есть ограниченная траектория $\{x_n\}$, так что $x_{n+1} = F(x_n)$. Рассмотрим близкую траекторию $\{y_n\}$. Положим $\delta_n = y_n - x_n$. Тогда

$$\delta_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} = F(x_n + \delta_n) - F(x_n).$$

Получили систему в отклонениях, для которой $\delta_n = 0$ соответствует траектории $\{x_n\}$, т.е. взамен исходной траектории мы в результате замены получили нулевое положение равновесия. Устойчивость траектории $\{x_n\}$ равносильна устойчивости нулевого положения равновесия для системы в отклонениях. В свою очередь, при определенных условиях устойчивость нулевого положения равновесия сводится у устойчивости его для системы линейного приближения

$$\xi_{n+1} = F'(x_n)\xi_n.$$

Это однородная линейная система с переменной матрицей, но, в отличие от непрерывного аналога, в дискретном случае решение можно записать:

$$\xi_n = F'(x_{n-1})F'(x_{n-2}) \ldots F'(x_0)\xi_0.$$

Произведение производных (точнее матриц Якоби) отображения F представляет собой матрицу Якоби отображения F^n в точке x_0 — это вытекает из цепного правила дифференцирования. Таким образом,

$$\xi_n = (F^n)'(x_0)\xi_0.$$

Эти рассуждения корректны, если отображение F непрерывно дифференцируемо. Если траектория $\{x_n\}$ ограничена, то $|F'(x_n)| < C$ для некоторого числа $C > 0$. Поэтому

$$|(F^n)'(x_0)| \leqslant |F'(x_{n-1})|\,|F'(x_{n-2})| \ldots |F'(x_0)| \leqslant C^n$$

(использовано неравенство $|AB| \leqslant |A|\,|B|$, верное, если используется операторная норма). Но тогда

$$|\xi_n| \leqslant |(F^n)'(x_0)|\,|\xi_0| \leqslant C^n|\xi_0|$$

Наименьшее значение C, при котором последнее неравенство имеет место начиная с некоторого номера, определяет показатель Ляпунова для последовательности $\{x_n\}$ — или для стартовой точки x_0, которая последовательность определяет однозначно. Из неравенства получаем

$$\ln|\xi_n| \leqslant n\ln C + \ln|\xi_0|,$$

откуда

$$\ln C \geqslant \frac{\ln|\xi_n| - \ln|\xi_0|}{n}.$$

Переходя к пределу, получаем нижнюю оценку для величины C:

$$\ln C \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\xi_n| - \ln|\xi_0|}{n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\xi_n|}{n}.$$

Величину

$$\chi(\{\xi_n\}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\xi_n|}{n}$$

называют ***показателем Ляпунова*** решения $\{\xi_n\}$ системы $\tilde{\xi} = F'(x_n)\xi$. Учитывая общее решение линейной дискретной системы, можем записать

$$\chi(x,\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|(F^n)'(x)\xi|}{n}.$$

Здесь точка x определяет стартовую точку (ограниченной) траектории системы $\tilde{x} = F(x)$, а ξ — стартовую точку траектории соответствующей системы линейного приближения.

Множество решений линейной системы $\tilde{\xi} = F'(x_n)\xi$ образует линейное пространство, изоморфное линейному пространству стартовых векторов ξ. Как и в непрерывном случае, можно показать, что векторы ξ_1 и ξ_2, которым соответствуют разные показатели Ляпунова, линейно независимы. Следовательно, возможных значений показателей Ляпунова не более n — размерности рассматриваемой системы. Их совокупность — спектр линейной системы.

В данном случае спектр линейной системы следует рассматривать как спектр точки x — стартовой точки траектории системы $\tilde{x} = F(x)$. Если все значения спектра меньше нуля, положение равновесия линейной системы асимптотически устойчиво, т.е. траектория, начинающаяся в точке x, асимптотически устойчива. Если же наибольшее значение в спектре положительно, то траектория, начинающаяся в точке x, неустойчива.

Существование неустойчивых траекторий на аттракторе — один из признаков хаотического аттрактора.

7.5. Динамика одномерных отображений

В случае непрерывных систем одномерный и даже двумерный случае относительно просты. Это возникает из-за того, что траектория системы (а в одномерном случае и одна точка) разделяет фазовое пространство и блокирует переход траектории из одной части в другую. В случае дискретных систем этого эффекта нет, а все сложные варианты динамики системы можно наблюдать в одномерном случае. Это объясняет повышенный интерес к одномерным системам: при максимальной сложности поведения они относительно просты для анализа.

Для исследования одномерных систем часто используют графический метод. В этом случае отображение F — функция одного действительного переменного, которую можно представить графиком на плоскости. Уравнение $F(x) = x$ на положения равновесия можно решать графически, представляя его как пересечение графика функции F с графиком функции $y = x$, т.е. с биссектрисой первого и третьего квадрантов. Подобное представление в некоторых литературных источниках называют ***диаграммой Кенигса — Ламерея***. Точнее, диаграмма Кёнигса — Ламерея — это не просто факт пересечения двух графиков, а особый способ представления орбит системы. Отметим, что этот способ используется для представления метода простой итерации решения уравнений вида $F(x) = x$: решение находится как предельное множество траектории системы, которую в данном случае называют итерационной последовательностью.

Теорема 7.8. Если (непрерывное) отображение f определено на отрезке I и $f(I) \subset I$, то f имеет на I неподвижную точку.

◀ Пусть $I = [a,\, b]$. Тогда из условия теоремы вытекает, что $f(a) \geqslant a$, $f(b) \leqslant b$. Функция $f(x) - x$ либо имеет нуль в одном из концов отрезка (а может, в обоих сразу), либо на концах отрезка $[a,\, b]$ имеет значения разных знаков. Во втором случае существование нуля вытекает из теоремы о промежуточном значении. ▶

В доказанной теореме существенную роль играет факт, что отрезок — компактное множество. Например, отображение $f(x) = \operatorname{ch} x$ определяет дискретную систему на полуинтервале $[0,\, +\infty)$, которая не имеет положений равновесия, поскольку $\operatorname{ch} x > x$ для всех x.

Задача. Придумайте дискретную систему на полуинтервале $[0,\, 1)$, не имеющую положений равновесия.

Существование положений равновесия может вытекать из существования периодических точек.

Пример 7.1. Если одномерная дискретная система $\tilde{x} = f(x)$ имеет периодические точки x_1, x_2 периода 2, то между этими точками есть положение равновесия. Действительно, пусть для определенности $x_1 < x_2$. Тогда $f(x_1) = x_2 > x_1$ и $f(x_2) = x - 1 < x_2$. Функция $f(x) - x$ на концах отрезка $[x_1,\, x_2]$ имеет значения разных знаков. Значит, в интервале $(x_1,\, x_2)$ она имеет нуль, являющийся положение равновесия системы.

Близкими рассуждениями можно доказать, что у одномерной дискретной системы, имеющей цикл периода 3 всегда существует цикл периода 2. Легко увидеть, что функция $f^2(x)$, как и $f(x)$ имеет цикл периода 3. Можно показать, как в примере, что f^2 имеет положение равновесия. Правда, далее надо еще показать, что по крайней мере одно положение равновесия f^2 не является таковым для f, а это уже сложнее.

Приведенные рассуждения поднимают так называемую задачу о сосуществовании циклов: существование каких циклов вытекает из существования цикла периода n?

В случае числовой оси (а значит, и любого интервала) известна замечательная теорема Шарковского, которая дает полный ответ на поставленный вопрос. Зададим специальный порядок натуральных чисел, кроме 1. Пусть $m = 2^r p$, $n = 2^s q$. Будем считать, что $m \triangleright n$ (m доминирует над n), если или $p = q = 1$, $r > s$, или $q = 1$, $p > 1$, или p, $q > 1$, $r < s$, или $r = s$, $1 < p < q$. В результате числа выстраиваются следующим образом:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \;\ldots\; 2{\cdot}3 \triangleright 2{\cdot}5 \triangleright \;\ldots\; 2^2{\cdot}3 \triangleright 2^2{\cdot}5 \triangleright \;\ldots\; 2^n{\cdot}3 \triangleright 2^n{\cdot}5 \triangleright \;\ldots \quad \ldots\; 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \;\ldots\; 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2.$$

Теорема 7.9 (Шарковский). Если непрерывное отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет цикл периода n, то оно имеет циклы любого периода k с $n \triangleright k$. В частности, отображение, имеющее цикл периода 3, также имеет циклы любого периода.

Логистическая система. Так называют одномерную дискретную систему

$$\tilde{x} = \lambda x(1 - x).$$

Несмотря на свой простой вид, эта система демонстрирует непростой нрав.

Положения равновесия: $x_{1,1} = 0$, $x_{1,2} = 1 - \dfrac{1}{r}$. При $r < 1$ вторая точка покоя оказывается левее отрезка $[0,\, 1]$. На самом отрезке поведение системы простое: все орбиты стремятся к нулевому положению равновесия. При $r = 1$ (точнее при проходе возрастающего r через это значение) второе положение равновесия переходит в отрезок $[0,\, 1]$, причем нулевое положение равновесия теряет устойчивость, которая передается второму положению равновесия (транскритическая бифуркация).

При $r \leqslant 4$ инвариантным множеством (компактом) системы является отрезок $[0,\,1]$. На нем и происходят все важнейшие события. По мере роста r производная в точке $x_{1,2}$ убывает и в определенный момент становится меньше 1. Так как $f'(x) = r(1-2x)$, $f'(x_{1,2}) = 2-r$, это происходит при $r = 3$. В этот момент положение равновесия $x_{1,2}$ теряет устойчивость. Устойчивость уходит вместе с рождающимся циклом периода 2. Проверить это можно, проанализировав функцию $f^2(x) = r^2x(1-x)[1-rx(1-x)]$. Она имеет 4 точки покоя, из которых две — точки покоя базовой функции, а две — пара периодических точек рассматриваемой системы. Уравнение 4-q степени, два корня известны. Значит, периодические точки определяются квадратным уравнением, их легко найти:

$$x_{2,1} = \frac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}, \quad x_{2,2} = \frac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}.$$

Поскольку в этих точках

$$f'(x_{2,k}) = -1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)},$$

производная f^2 на цикле есть

$$f'(x_{2,1})f'(x_{2,2}) = 1-(r+1)(r-3).$$

При $r > 3$ она меньше 1, уменьшается с ростом r и в определенный момент уходит вниз за -1, что соответствует потерю циклом устойчивости. Это происходит при $r = 1\sqrt{6}$. Образуется цикл вдвое большего периода. Бифуркация, когда рождается цикл удвоенного периода, называется бифуркацией удвоения периода. Характерно, что потеря устойчивости происходит при выходе собственного значения за единичный круг через -1.

Далее с ростом r происходят последовательные удвоения вплоть до $r_* \approx 3{,}569$. В этот момент система будет иметь циклы любого периода, являющегося степенью 2. При этом для каждого значения $r < r_*$ лишь один цикл устойчивый. Он притягивает все траектории, кроме периодических точек и их прообразов (точек, периодических в конечном счете). В случае $r = r_*$ все циклы отталкивающие, но есть предельное множество K для множества всех периодических точек. Это множество инвариантно, не содержит периодических точек и точек, периодических в конечном счете, оно канторово и притягивает все непериодические траектории. Само оно имеет всюду плотную на K траекторию (точнее, любая траектория на K всюду плотна на K).

Этот процесс усложнения поведения системы можно изобразить в виде диаграммы в плоскости (r, x), на которой вдоль оси x откладываются все имеющиеся периодические точки (она называется бифуркационной диаграммой).

Любопытный эффект, обнаруженный Фейгенбаумом: если r_n — моменты удвоения периода, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty}(r_{n+1}-r_n) = \delta \approx 4{,}66920.$$

При увеличении r до $r^+ = 3{,}83$ система приобретает циклы всех периодов. Это происходит потому, что появляется цикл периода 3. Как оказывается, он притягивает почти все траектории системы (притягиваемое множество открыто всюду плотно и имеет полную лебегову меру).

При $r = 4$ поведение системы можно трактовать как хаотическое.

Теорема 7.10. Для любого открытого интервала $J \subset [0,\,1]$ существует такое m, что $f^m(J) = [0,1]$. #

Отображение «тент». Так называют дискретную систему на отрезке $[0,\,1]$, определяемую функцией

$$g(x) = 1-|1-2x| = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos 2\pi x).$$

Теорема 7.11. Отображение «тент» топологически эквивалентно отображению $f_4(x) = 4x(1-x)$.

◄ Соответствующий гомеоморфизм определяется отображением $x = U(\xi) = \sin^2 \dfrac{\pi}{2} x$. ►

Теорема 7.10 достаточно просто доказывается для тента. В силу топологической сопряженности результат переносится и на квадратичное отображение.

Из теоремы ряд важных выводов.

Лемма 7.1. Любой открытый интервал $J \subset [0, 1]$ содержит периодические точки каких угодно периодов.

Лемма 7.2. Существует траектория, всюду плотная на $[0, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

[2] Крищенко А.П. Устойчивость движения автономных систем: конспект лекций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 44 с.

[3] Dumortier F., Llibre J., Artes J.C. Qualitative theory of planar differential systems. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 308 p.

[4] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

[5] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 428 с.

[6] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. М.–Ижевск: НИЦ ¡Регулярная и хаотическая динамика¿, Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ