Задача 3

Для заданной системы 2-го порядка, имеющей нулевое положение равновестия:

а) найти линейное приближение в нуле и записать характеристические числа;

б) построить нормальную форму 2-го порядка;

в) построить фазовые портреты в окрестности нулевого положения равновесия как самой системы, так и нормальной формы, указать различия.

1. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x+y) + \sin x + \sin y - 1; \\ \dot{y} = x - \cos x + e^y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x-y) + \sin x + \sin y - 1; \\ \dot{y} = \cos 2x - x - e^y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1-y) - \cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{x-y} + \sin x - \sin y - \cos(x+y). \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1-y) - \cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{x-y} - \cos(x+y). \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(2+y) - 2\cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{x+y} - (1-x/2)^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = (1+2x)e^y - \cos y; \\ \dot{y} = (1+y)e^{2x} - \cos x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)e^{-y} - \cos y; \\ \dot{y} = (1-y)e^x - \cos(x+y). \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1+y) - \cos(x-y); \\ \dot{y} = e^{-x-y} - 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)e^y - \cos(2x+y); \\ \dot{y} = (1+y)e^x - \cos(x-y). \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x-y) + \sin 2x + \sin y - 1; \\ \dot{y} = 2x - \cos(x+y) + e^y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)(1+y) - \cos(x+2y); \\ \dot{y} = e^{x+y} - \cos(x-y). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x-x^2)e^y - \cos y; \\ \dot{y} = (1-y)e^{-x} - \cos(x-y). \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = \sin(x-y) + \ln(1+x^2+y^2); \\ \dot{y} = x + e^x + e^{-2y} - 2\cos(x+y). \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = \sin x - \sin y + \ln(1+x^2+y^2); \\ \dot{y} = x - e^y + \cos x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)e^{-y} - \cos y; \\ \dot{y} = (1-2y)e^x + \sin x - \cos x. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(x+y) + \sin x - \sin y - 1; \\ \dot{y} = x + \cos x - e^y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)e^{-y} - \cos(x+y); \\ \dot{y} = (1-y)e^x - \cos(x-y). \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)^2 e^{-y} - \cos y; \\ \dot{y} = (1-y)e^x + \sin x - \cos(x-y). \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = (1+x)^2 - e^{-y}; \\ \dot{y} = (1+y+y^2)e^{2x} - \cos x. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - \cos(x+y); \\ \dot{y} = (1+x)(1+y) - \sin(2x-x^2) - \cos(x-y). \end{cases}$

Задача 4

Для заданной системы 2-го порядка:

а) проанализировать фазовый портрет и выделить область возможного существования цикла;

б) задав трансверсальную кривую, построить отображение последования, с помощью него найти точку на цикле и построить цикл численно;

в) определить период для цикла;

г) вычислить мультипликаторы цикла.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - 11xy - 16x + 13y^2 + 26y - 2; \\ \dot{y} = 5y^2 - 3xy - 10x + 16y - 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{216}{11}x^2 + \dfrac{785}{23}xy - \dfrac{72}{17}y^2 - \dfrac{250}{83}x + \dfrac{199}{50}y; \\ \dot{y} = -\dfrac{255}{28}x^2 + \dfrac{17}{11}xy + \dfrac{837}{46}y^2 - \dfrac{227}{90}x + \dfrac{250}{83}y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -26x^2 - \dfrac{262}{5}xy - \dfrac{127}{5}y^2 + 44x + \dfrac{207}{5}y - 7; \\ \dot{y} = \dfrac{255}{10}x^2 + \dfrac{254}{5}xy + \dfrac{247}{10}y^2 - 46x - 44y + 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 + \dfrac{17}{9}xy - \dfrac{9}{10}y^2 + \dfrac{40}{9}x - \dfrac{19}{3}y + \dfrac{8}{15}; \\ \dot{y} = -x^2 + \dfrac{7}{4}xy - y^2 + 4x - \dfrac{9}{2}y + \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -6x^2 + 10xy + 39y - 24x - 2; \\ \dot{y} = -5x^2 + 10xy - 3y^2 - 15x + 24y - 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -18x^2 + 50xy - 34y^2 + 42x - 68y + 3; \\ \dot{y} = -13x^2 + 37xy - 26y^2 + 26x - 42y + 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 22x^2 + 30xy + 10y^2 + 34x + 20y + 1; \\ \dot{y} = -29x^2 - 41xy - 14y^2 - 58x - 34y - 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{16}{3}x^2 + 7xy + 2y^2 + 8x - 13y; \\ \dot{y} = \dfrac{7}{9}x^2 - \dfrac{25}{3}xy + 5x + 11y^2 - 8y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{17}{5}x^2 + \dfrac{17}{5}xy + y^2 + \dfrac{13}{11}x + \dfrac{14}{11}y - 9; \\ \dot{y} = -8x^2 - 8xy - \dfrac{5}{4}y^2 - 10x - \dfrac{41}{7}y + 5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{12}{25}x^2 + \dfrac{12}{25}xy - \dfrac{6}{25}y^2 - 3x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{1}{2}; \\ \dot{y} = 21x^2 + 3xy - \dfrac{4}{5}y^2 + 3y - 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 73x^2 + 94xy + 51x + 30y^2 + 30y + 1; \\ \dot{y} = -116x^2 - 150xy - 87x - 48y^2 - 51y - 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -88x^2 + 230xy - 150y^2 + 54x - 75y + 4; \\ \dot{y} = -65x^2 + 170xy - 111y^2 + 39x - 54y + 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{89}{9}x^2 - \dfrac{19}{9}xy + 12x - \dfrac{7}{9}y^2 - 5y; \\ \dot{y} = -\dfrac{142}{9}x^2 + \dfrac{245}{9}xy - \dfrac{76}{9}y^2 + 29x - 12y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - 26xy + 34y^2 + 63x - 102y + 3; \\ \dot{y} = 16y^2 - 10xy + 39x - 63y + 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{5}{27}x^2 + \dfrac{4}{15}xy - \dfrac{72}{9}y^2 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{138}{5}y - 16; \\ \dot{y} = -\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{15} + \dfrac{x}{2} + y + \dfrac{6}{5}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{55}{9}x^2 + \dfrac{28}{9}xy + \dfrac{2}{9}y^2 + 3x - 2y; \\ \dot{y} = \dfrac{7}{9}x^2 - \dfrac{61}{9}xy + \dfrac{31}{9}y^2 + 5x - 3y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2}{2} + 4xy + \dfrac{28}{5}y^2 + \dfrac{15}{4}x + \dfrac{18}{5}y - 8; \\ \dot{y} = -\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{8}{5}xy - \dfrac{25}{12}y^2 - \dfrac{23}{7}x - \dfrac{13}{4}y + 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{5}x^2 + 25y^2 + \dfrac{9}{5}x - 46y + 8; \\ \dot{y} = \dfrac{x^2}{5} - y^2 - x - \dfrac{3}{2}y + 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{47}{4}x^2 + \dfrac{47}{2}xy + 11y^2 - 24x - 24y + 5; \\ \dot{y} = -\dfrac{51}{4}x^2 - \dfrac{51}{2}xy - 11y^2 + 22x + 24y - 4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{47}{2}x^2 + \dfrac{47}{2}xy + \dfrac{11}{2}y^2 - 24x - 12y + \dfrac{5}{2}; \\ \dot{y} = -51x^2 - 51xy - 11y^2 + 46x + 25y - 4. \end{cases}$

Задача 5

Для заданной системы 3-го порядка:

а) найти ограниченную траекторию и с помощью этой траектории найти хаотический аттрактор;

б) построить аттрактор, сделать рисунок;

в) для траектории на аттракторе вычислить старший показатель Ляпунова.

1. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y; \\ \dot{y} = x + z^2; \\ \dot{z} = 1 + x. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 0.9 - y; \\ \dot{y} = 0.4 + z; \\ \dot{z} = xy - z. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = -z; \\ \dot{y} = x - y; \\ \dot{z} = 3.1x + y^2 + 0.5z. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dot{x} = 2.7y + z; \\ \dot{y} = -x + y^2; \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = x - z; \\ \dot{z} = x + xz + 2.7y. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dot{x} = -2y; \\ \dot{y} = x + z^2; \\ \dot{z} = 1 + y - 2z. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} \dot{x} = -z; \\ \dot{y} = -x^2 - y; \\ \dot{z} = 1.7(1 + x) + y. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dot{x} = y + 3.9z; \\ \dot{y} = 0.9x^2 - y; \\ \dot{z} = 1 - x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = xy - z; \\ \dot{y} = x - y; \\ \dot{z} = x + 0.3z. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} \dot{x} = 2z; \\ \dot{y} = -2y + z; \\ \dot{z} = -x + y + y^2. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \dot{x} = -0.2y; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = x + y^2 - z. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x} = -y + z^2; \\ \dot{y} = x + 0.5y; \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = 0.4x + z; \\ \dot{y} = xz - y; \\ \dot{z} = -x + y. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} \dot{x} = y + z; \\ \dot{y} = -x + 0.5y; \\ \dot{z} = x^2 - z. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} \dot{x} = yz; \\ \dot{y} = x^2 - y; \\ \dot{z} = 1 - 4x. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} \dot{x} = -y; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = xz + 3y^2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = yz; \\ \dot{y} = x - y + 0.1z; \\ \dot{z} = 1 - x^2. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} \dot{x} = yz; \\ \dot{y} = x - y; \\ \dot{z} = 1 - xy. \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} \dot{x} = y + 2; \\ \dot{y} = -y - 9z; \\ \dot{z} = y/2 + x^2/4. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} \dot{x} = x/2 - y; \\ \dot{y} = x - z^2; \\ \dot{z} = 2y - z. \end{cases}$

Задача 6

Для заданной системы 3-го порядка (см. задачу 5) и заданной локализирующей функции решить задачу локализации инвариантных компактов системы:

а) найти все значения параметров локализирующей функции, при которых соответствующее локализирующее множество не является тривиальным;

б) найти итоговое локализирующее множество как пересечение всего семейства локализирующих множеств;

в) сделать рисунок, включающий аттрактор системы и итоговое локализирующее множество.

1. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ **2.** $\varphi(x, y, z) = x^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz.$

3. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ **4.** $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$

5. $\varphi(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2Cy + 2Dz.$ **6.** $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$

7. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ **8.** $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$

9. $\varphi(x,y,z) = By^2 + Cz^2 - 2Cyz - 2(B - C)x + 2Ly.$ **10.** $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$

11. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ **12.** $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$

13. $\varphi(x, y, z) = x^2 + 2Ax + 2By.$ **14.** $\varphi(x, y, z) = y^2 + 2Ay + 2Bz.$

15. $\varphi(x, y, z) = z^2 + 2Ay + 2Bz.$ **16.** $\varphi(x,y,z) = 3x^2 + Bxy + 2Kx - 2y - z.$

17. $\varphi(x, y, z) = y^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz.$ **18.** $\varphi(x, y, z) = x^2 + By^2 + z^2 + 2Ly.$

19. $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$ **20.** $\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz.$