

Задачи для подготовки к рубежному контролю
«Дифференциальные уравнения высших порядков»

Теоретические вопросы

Вопросы, оцениваемые в 1 балл

- 1) Сформулировать определение общего решения ОДУ n -го порядка.
- 2) Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n -го порядка.
- 3) Сформулировать определение линейного ОДУ n -го порядка.
- 4) Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы функций на промежутке.
- 5) Сформулировать определение определителя Вронского системы функций.
- 6) Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ.
- 7) Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами.

Вопросы, оцениваемые в 3 балла

- 1) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций.
- 2) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ.
- 3) Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ n -го порядка.
- 4) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n -го порядка.
- 5) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n -го порядка.
- 6) Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ.
- 7) Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ОДУ.
- 8) Вывести формулу Остроградского - Лиувилля для линейного ОДУ 2-го порядка.
- 9) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения.
- 10) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.
- 11) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

- 12) Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных.

Задачи для подготовки

1. Составление ОДУ (2 балла)
- 1.1. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1 + 3i$, $\lambda_4 = 1 - 3i$. Написать общее решение составленного дифференциального уравнения.
- 1.2. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, фундаментальная система решений которого состоит из функций $y_1 = x$, $y_2 = x^3$. При каких x для этого уравнения выполнено условие существования и единственности решения?
- 1.3. Могут ли функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-2x}$ задавать фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения? Если могут, то составить это уравнение.
- 1.4. Могут ли функции $y_1 = e^x \sin 2x$ и $y_2 = e^x \cos 2x$ задавать фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения? Если могут, то составить это уравнение.
- 1.5. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = Ce^x + \sin x$.
- 1.6. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = C \cos x + 1$.
2. Задача Коши для ОДУ высших порядков (3 балла)
- 2.1. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'' + y' + x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 2$.
- 2.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $1 + yy'' + (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 1$.
3. Решение линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами (3 балла)
- 3.1. Найти общее решение ОДУ $y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$.
- 3.2. Найти общее решение ОДУ $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$.
4. Составление общего решения линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (4 балла)
- 4.1. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)
- $$y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x.$$
- 4.2. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)
- $$y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x.$$

Образцы билетов рубежного контроля (теория)

Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2014, ИиДУ, модуль 2, РК2 (теория)

1. Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами. (1 балл)
2. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций. (3 балла)

$\min = 2, \max = 4$

Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2014, ИиДУ, модуль 2, РК2 (теория)

1. Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ. (1 балл)
2. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ. (3 балла)

$\min = 2, \max = 4$

Образцы билетов рубежного контроля (задачи)

Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2014, ИиДУ, модуль 2, РК2 (задачи)

1. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1 + 3i, \lambda_4 = 1 - 3i$. Написать общее решение составленного дифференциального уравнения. (2 балла)
2. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'' + y' + x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0, y' = 0$ при $x = 2$. (3 балла)
3. Найти общее решение ОДУ $y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$. (3 балла)
4. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x. \quad (4 \text{ балла})$$

$\min = 8, \max = 12$

Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2014, ИиДУ, модуль 2, РК2 (задачи)

1. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = C \cos x + 1$. (2 балла)
2. Найти частное решение дифференциального уравнения $1 + yy'' + (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 1, y' = 1$ при $x = 1$. (3 балла)
3. Найти общее решение ОДУ $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$. (3 балла)
4. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x. \quad (4 \text{ балла})$$

$\min = 8, \max = 12$