

ИУ-РЛ-БМТ, 2014, ИиДУ, модуль 1

Задачи для подготовки к рубежному контролю

«Определённый интеграл»

Теоретические вопросы

Вопросы, оцениваемые в 1 балл

- 1) Сформулировать определение первообразной.
- 2) Сформулировать определение неопределённого интеграла.
- 3) Сформулировать определение определённого интеграла.
- 4) Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом.
- 5) Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода.
- 6) Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода.
- 7) Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
- 8) Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
- 9) Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
- 10) Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.
- 11) Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.
- 12) Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.

Вопросы, оцениваемые в 3 балла

- 1) Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла.
- 2) Сформулировать и доказать теорему о среднем.
- 3) Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом.
- 4) Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница.
- 5) Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определённом интеграле.
- 6) Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.
- 7) Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.
- 8) Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.
- 9) Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$.
- 10) Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$.

Задачи для подготовки

1. Задачи на вычисление площадей плоских фигур (3 балла)
 - 1.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x+4}$, $y = -\sqrt{x} + 2$ и осью Ox . Сделать чертёж.
 - 1.2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Сделать чертёж.
 - 1.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сделать чертёж.

2. Задачи на вычисление объёмов тел (3 балла)
 - 2.1. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4z^2 - 1$, $z = 1$. Сделать чертёж.
 - 2.2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = 2y^2$, $x^2 + z^2 = 8$. Сделать чертёж.
 - 2.3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $y^2 + z^2 = x$, $y^2 + z^2 = (x - 2)^2$ и содержащего точку $M(1, 0, 0)$. Сделать чертёж.
 - 2.4. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = y^2 + 4$, $x^2 + z^2 = 5y^2$. Сделать чертёж.
 - 2.5. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2 - 1$, $x^2 + y^2 = (z - 3)^2 - 1$. Сделать чертёж.
 - 2.6. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$ и $x = 0$. Сделать чертёж.
 - 2.7. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$. Сделать чертёж.
 - 2.8. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $x = at^2$, $y = a \ln t$ ($a > 0$) и осями координат, вокруг оси Ox . Сделать чертёж.
 - 2.9. Найти объём тела, образованного вращением кривой $r = a \sin^2 \varphi$ вокруг полярной оси. Сделать чертёж.

3. Задачи на вычисление длин дуг и площадей поверхностей вращения (2 балла)
 - 3.1. Найти длину дуги кривой $y = x^2$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(1, 1)$. Сделать чертёж.
 - 3.2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$. Сделать чертёж.

4. Задачи исследования на сходимость несобственных интегралов (2 балла)
 - 4.1. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}{x+3} dx$.
 - 4.2. Исследовать на сходимость $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx$.

Образец билета рубежного контроля (теория)

Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2014, ИиДУ, модуль 1, РК1 (теория)

1. Сформулировать определение первообразной. (1 балл)
2. Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом. (3 балла)

$\min = 2, \max = 4$

Образцы билетов рубежного контроля (задачи)

Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2014, ИиДУ, модуль 1, РК1 (задачи)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x+4}$, $y = -\sqrt{x} + 2$ и осью Ox . Сделать чертёж. (3 балла)
2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = 2y^2$, $x^2 + z^2 = 8$. Сделать чертёж. (3 балла)
3. Найти длину дуги кривой $y = x^2$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(1, 1)$. Сделать чертёж. (2 балла)
4. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}{x+3} dx$. (2 балла)
5. Исследовать на сходимость $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx$. (2 балла)

$\min = 8, \max = 12$

Вариант 0.

ИУ-РЛ-БМТ, 2014, ИиДУ, модуль 1, РК1 (задачи)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сделать чертёж. (3 балла)
2. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = y^2 + 4$, $x^2 + z^2 = 5y^2$. Сделать чертёж. (3 балла)
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$. Сделать чертёж. (2 балла)
4. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{x\sqrt{x} + 3} dx$. (2 балла)
5. Исследовать на сходимость $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3} dx$. (2 балла)

$\min = 8, \max = 12$