

Применение интегрального исчисления

1. Площадь фигуры

1) Явное задание

$$S_{\text{ф}} = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) \geq 0.$$

2) Параметрическое задание.

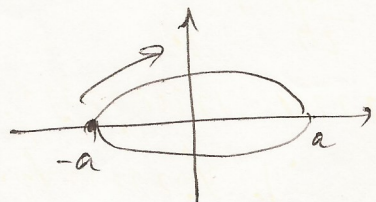
$$y = f(x) \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Пример 1.

Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение.



$$S = 2 \int_{-a}^a f(x) dx, \quad f(x) \geq 0.$$

Параметрич. задание эллипса $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$
 $x = -a \Rightarrow t = \pi$
 $x = a \Rightarrow t = 0$

$$x'_t = -a \sin t \quad t \in [\pi; 0]$$

$$S = 2 \int_{\pi}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt =$$

$$= -2ab \int_{\pi}^0 \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -2ab \left[\frac{1}{2} \frac{t}{1} + \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{\sin 2t}{2} \right]_{\pi}^0 =$$

$$= \pi ab.$$

Ответ: πab .