1177. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}$.

1178. $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) dt$.

1179. $\int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)}$.

1180. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx$.

1181. $\int e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x \, dx$.

1182. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^4 x}} dx$.

1183. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

1184. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

1185. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}} dx$.

1186. $\int \frac{\cos 2x}{4 + \cos^2 2x} dx$.

1187. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.

1188. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 + x^2}} dx$.

1189. $\int x^2 \operatorname{ch}(x^3 + 3) dx$.

1190. $\int \frac{3^{\operatorname{th} x}}{\operatorname{ch}^2 x} dx$.

§ 2. Метод подстановки

1°. **Замена переменной в неопределенном интеграле.** Полагая

$$x = \varphi(t),$$

где t — новая переменная и φ — непрерывно дифференцируемая функция, будем иметь:

$$\int f(x) \, dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt. \tag{1}$$

Функцию φ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид.

Пример 1. Найти

$$\int x \sqrt{x - 1} \, dx.$$

Решение. Естественно положить $t = \sqrt{x - 1}$, отсюда $x = t^2 + 1$, и $dx = 2t \, dt$. Следовательно,

$$\int x \sqrt{x - 1} \, dx = \int (t^2 + 1) t \cdot 2t \, dt = 2 \int (t^4 + t^2) \, dt =$$

$$= \frac{2}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{5} (x - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x - 1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Иногда применяются подстановки вида

$$u = \varphi(x).$$

Допустим, что нам удалось подынтегральное выражение $f(x) \, dx$ преобразовать к такому виду:

$$f(x) \, dx = g(u) \, du, \text{ где } u = \varphi(x).$$

Если $\int g(u) \, du$ известен, т. е.

$$\int g(u) \, du = F(u) + C,$$

то

$$\int f(x) \, dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Этим способом мы уже, собственно говоря, пользовались в § 1, 3°.

Примеры 2, 3, 4 (§ 1) можно было решить следующим образом:

Пример 2. $u = 5x - 2$; $du = 5dx$; $dx = \frac{1}{5} du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x - 2}} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x - 2} + C.$$

Пример 3. $u = x^2$; $du = 2x \, dx$; $x \, dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{2} \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + \sqrt{1 + x^4}\right) + C.$$

Пример 4. $u = x^3$; $du = 3x^2 \, dx$; $x^2 \, dx = \frac{du}{3}$.

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^u \, du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

2°. **Тригонометрические подстановки.**

1) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то обычно полагают $x = a \sin t$; отсюда

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$

2) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то полагают $x = a \sec t$ отсюда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t.$$

3) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то полагают $x = a \operatorname{tg} t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t.$$

Заметим, что тригонометрические подстановки не всегда оказываются выгодными.

Иногда вместо тригонометрических подстановок удобнее пользоваться *гиперболическими подстановками*, которые имеют аналогичный характер (см. пример 1209).

О тригонометрических и гиперболических подстановках более подробно см. в § 9.

Пример 5. Найти

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx.$$