Иногда, чтобы свести данный интеграл к табличному, приходится применять формулу интегрирования по частям несколько раз. В некоторых случаях с помощью интегрирования по частям получают уравнение, из которого определяется искомый интеграл.

Пример 2. Найти

$$\int e^x \cos x\,dx.$$

Имеем $\int e^x \cos x\,dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x + {}$

$+ \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx.$

Следовательно,

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx,$$

откуда

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

Семинар 2

1211. $\int \ln x\,dx.$

1212. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$

1213. $\int \arcsin x\,dx.$

1214. $\int x \sin x\,dx.$

1215. $\int x \cos 3x\,dx.$

1216. $\int \frac{x}{e^x}\,dx.$

1217. $\int x \cdot 2^{-x}\,dx.$

1218**. $\int x^2 e^{3x}\,dx.$

1219*. $\int (x^2 - 2x + 5)\, e^{-x}\,dx.$

1220*. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}\,dx.$

1221. $\int x \sin x \cos x\,dx$

1222*. $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x\,dx.$

1223. $\int x^2 \ln x\,dx.$

1224. $\int \ln^2 x\,dx.$

1225. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$

1226. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

1227. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$

1228. $\int x \arcsin x\,dx.$

1229. $\int \ln (x + \sqrt{1 + x^2})\,dx.$

1230. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$

1231. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x}\,dx.$

1232. $\int e^x \sin x\,dx.$

1233. $\int 3^x \cos x\,dx.$

1234. $\int e^{ax} \sin bx\,dx.$

1235. $\int \sin (\ln x)\,dx.$

Применяя различные методы, найти интегралы:

1236. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$

1237. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

1238. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x\,dx.$

1239. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x}\,dx.$

1240. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx.$

1241. $\int \frac{\ln (\ln x)}{x}\,dx.$

1242. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x\,dx.$

1243. $\int x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx.$

1244. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

1245. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

1246. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

1247. $\int x \operatorname{tg}^2 2x\,dx.$

1248. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx.$

1249. $\int \cos^2 (\ln x)\,dx.$

1250**. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$

1251*. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$

1252*. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

1253*. $\int \sqrt{A + x^2}\,dx.$

1254*. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$

§ 4. Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен

1°. Интегралы вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx.$ Основной прием вычисления — приведение квадратного трехчлена к виду:

$$ax^2 + bx + c = a(x+k)^2 + l, \tag{1}$$

где k и l — постоянные. Для выполнения преобразования (1) удобнее всего из квадратного трехчлена выделять полный квадрат. Можно также пользоваться подстановкой

$$2ax + b = t.$$

Если $m = 0$, то, приводя квадратный трехчлен к виду (1), получаем табличные интегралы III или IV (см. таблицу).

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{4}x + \frac{25}{16}\right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{25}{16}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x - \frac{5}{4}\right)}{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C.$$