Если $m \neq 0$, то из числителя выделяется производная $2ax+b$ квадратного трехчлена

2·5

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

и таким образом, мы приходим к интегралу, разобранному выше.

Пример 2.

$$\int\frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx = \int\frac{\frac12(2x-1)-\frac12}{x^2-x-1}\,dx = \frac12\ln|x^2-x-1| - \frac12\int\frac{d\left(x-\frac12\right)}{\left(x-\frac12\right)^2-\frac54} = \frac12\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{2\sqrt5}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt5}{2x-1+\sqrt5}\right|+C.$$

2°. Интегралы вида $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

Методы вычислений аналогичны разобранным выше. В конечном итоге интеграл приводится к табличному интегралу V, если $a>0$, и VI, если $a<0$.

Пример 3.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac34\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt2}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$$

Пример 4.

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac12\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + 2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \sqrt{x^2+2x+2}+2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$$

3°. Интегралы вида $\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. С помощью обратной подстановки

$$\frac{1}{mx+n}=t$$

эти интегралы приводятся к интегралам вида 2°.

Пример 5. Найти

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Решение. Полагаем

$$x+1=\frac1t,$$

отсюда

$$dx=-\frac{dt}{t^2}.$$

Имеем:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac1t\sqrt{\left(\frac1t-1\right)^2+1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} = -\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac12\right)^2+\frac14}} = -\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|t-\frac12+\sqrt{t^2-t+\frac12}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|+C.$$

4°. Интегралы вида $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. Путем выделения из квадратного трехчлена полного квадрата данный интеграл сводится к одному из следующих двух основных интегралов (см. примеры 1252 и 1253):

1) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac x2\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac xa + C$
$(a>0)$;

2) $\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac x2\sqrt{x^2+A}+\frac A2\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C.$

Пример 6.

$$\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx = \int\sqrt{2-(1+x)^2}\,d(1+x) = \frac{1+x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{1+x}{\sqrt2}+C.$$

Найти интегралы: Семинар 3

1255. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

1256. $\int\frac{dx}{x^2+2x}$.

1257. $\int\frac{dx}{3x^2-x+1}$.

1258. $\int\frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$.

1259. $\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$.

1260. $\int\frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$.

1261. $\int\frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$.

1262. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

1263. $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

1264. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

1265. $\int\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$.

1266. $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

1267. $\int\frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx$.

1268. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

1269. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

1270. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1271. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

1272. $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$.