1273. $\int\sqrt{x-x^2}\,dx.$

1274. $\int\sqrt{2-x-x^2}\,dx.$

1275. $\int\frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}.$

1276. $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}\,dx.$

1277. $\int\frac{e^x\,dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$

1278. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}.$

1279. $\int\frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}.$

§ 5. Интегрирование рациональных функций

1°. Метод неопределенных коэффициентов. Интегрирование рациональной функции после выделения целой части сводится к интегрированию *правильной рациональной дроби*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — целые многочлены, причем степень числителя $P(x)$ ниже степени знаменателя $Q(x)$.

Если

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\ldots(x-l)^{\lambda},$$

где $a, \ldots, l$ — различные действительные корни многочлена $Q(x)$ и $\alpha, \ldots, \lambda$ — натуральные числа (кратности корней), то справедливо разложение дроби (1) на простейшие дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{L_1}{x-l}+\frac{L_2}{(x-l)^2}+\ldots+\frac{L_{\lambda}}{(x-l)^{\lambda}}. \tag{2}$$

Для вычисления неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots$ обе части тождества (2) приводят к целому виду, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях переменной x (первый способ). Можно также определять эти коэффициенты, полагая в равенстве (2), или ему эквивалентном, x равным подходяще подобранным числам (второй способ).

Пример 1. Найти

$$\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}=I.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Отсюда

$$x=A(x+1)^2+B_1(x-1)(x+1)+B_2(x-1). \tag{3}$$

а) *Первый способ определения коэффициентов.* Перепишем тождество (3) в виде

$$x=(A+B_1)x^2+(2A+B_2)x+(A-B_1-B_2).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$0=A+B_1;\quad 1=2A+B_2;\quad 0=A-B_1-B_2.$$

Отсюда

$$A=\frac{1}{4};\quad B_1=-\frac{1}{4};\quad B_2=\frac{1}{2}.$$

б) *Второй способ определения коэффициентов.* Полагая $x=1$ в тождестве (3), будем иметь:

$$1=A\cdot 4, \text{ т. е. } A=\frac{1}{4}.$$

Полагая $x=-1$, получим:

$$-1=-B_2\cdot 2, \text{ т. е. } B_2=\frac{1}{2}.$$

Далее, полагая $x=0$, будем иметь:

$$0=A-B_1-B_2,$$

т. е. $B_1=A-B_2=-\frac{1}{4}$.

Следовательно,

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+C=$$
$$=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Пример 2. Найти

$$\int\frac{dx}{x^3-2x^2+x}=I.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

и

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx. \tag{4}$$

При решении этого примера рекомендуется комбинировать два способа определения коэффициентов. Применяя второй способ, полагаем $x=0$ в тождестве (4). Получим $1=A$. Затем, полагая $x=1$, получим $1=C$. Далее, применяя первый способ, приравняем в тождестве (4) коэффициенты при x^2. Будем иметь:

$$0=A+B, \text{ т. е. } B=-1.$$

Таким образом,

$$A=1,\quad B=-1 \text{ и } C=1.$$

Следовательно,

$$I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$