Если многочлен $Q(x)$ имеет комплексные корни $a \pm ib$ кратности k, то в разложение (2) дополнительно войдут простейшие дроби вида

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}, \tag{5}$$

где

$$x^2+px+q=[x-(a+ib)]\,[x-(a-ib)]$$

и $A_1, B_1, \ldots, A_k, B_k$ — неопределенные коэффициенты, определяемые способами, указанными выше. При $k=1$ дробь (5) интегрируется непосредственно; при $k>1$ применяется *метод понижения*, причем предварительно квадратный трехчлен x^2+px+q рекомендуется представить в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ и сделать подстановку $x+\frac{p}{2}=z$.

Пример 3. Найти

$$\int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx=I.$$

Решение. Так как

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1,$$

то, полагая $x+2=z$, получим:

$$I=\int\frac{z-1}{(z^2+1)^2}\,dz=\int\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}-\int\frac{(1+z^2)-z^2}{(z^2+1)^2}\,dz=$$
$$=-\frac{1}{2(z^2+1)}-\int\frac{dz}{z^2+1}+\int z\,d\left[-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]=-\frac{1}{2(z^2+1)}-$$
$$-\operatorname{arctg} z-\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z=-\frac{z+1}{2(z^2+1)}-$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C=-\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

2°. Метод Остроградского. Если $Q(x)$ имеет кратные корни, то

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{X(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{Y(x)}{Q_2(x)}\,dx, \tag{6}$$

где $Q_1(x)$ — общий наибольший делитель многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$;

$$Q_2(x)=Q(x):Q_1(x);$$

$X(x)$ и $Y(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых соответственно на единицу меньше степеней $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Неопределенные коэффициенты многочленов $X(x)$ и $Y(x)$ вычисляются при помощи дифференцирования тождества (6).

Пример 4. Найти

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}.$$

Решение.

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1}+\int\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}\,dx.$$

Дифференцируя это тождество, получим:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

или

$$1=(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3-1).$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, будем иметь:

$$D=0;\ E-A=0;\ F-2B=0;\ D+3C=0;\ E+2A=0;\ B+F=-1;$$

отсюда

$$A=0;\ B=-\frac{1}{3};\ C=0;\ D=0;\ E=0;\ F=-\frac{2}{3}$$

и, следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3-1}. \tag{7}$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (7) разлагаем дробь $\frac{1}{x^3-1}$ на элементарные:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{L}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

т. е.

$$1=L(x^2+x+1)+Mx(x-1)+N(x-1). \tag{8}$$

Полагая $x=1$, получим $L=\frac{1}{3}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (8), находим:

$$L+M=0;\quad L-N=1,$$

т. е.

$$M=-\frac{1}{3};\quad N=-\frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

и

$$\int\frac{dx}{(x^3-1)^2}=-\frac{x}{3(x^3-1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Найти интегралы: Семинар 4

1280. $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

1281. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$.

1282. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1283. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

1284. $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx$.

1285. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.