

1286. $\int \frac{x^2 - 1}{4x^3 - x} dx.$

1287. $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^5 - 6x^2 + 12x - 8} dx.$

1288. $\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx.$

1289. $\int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2} dx.$

1290. $\int \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^3} dx.$

1291. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx.$

1292. $\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx.$

1293. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)}.$

Применяя метод Остроградского, найти следующие интегралы:

1301. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}.$

1302. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}.$

Применяя различные приемы, найти интегралы:

1305. $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)} dx.$

1306. $\int \frac{x^7 + x^3}{x^{12} - 2x^4 + 1} dx.$

1307. $\int \frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^2(x-2)} dx.$

1308. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}.$

1309. $\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}.$

1294. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$

1295. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$

1296. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$

1297. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

1298. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx.$

1299. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$

1300. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} dx.$

1303. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$

1304. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx.$

1310*. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}.$

1311. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}.$

1312. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}.$

1313. $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}}.$

1314. $\int \frac{dx}{x^8 + x^6}.$

§ 6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1°. Интегралы вида

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{q_2}, \dots \right] dx, \quad (1)$$

где R — рациональная функция и $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots$ — целые числа.

Интегралы вида (1) находятся с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n,$$

где n — общее наименьшее кратное чисел q_1, q_2, \dots

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}.$

Решение. Подстановка $2x-1 = z^4$ приводит интеграл к виду

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} &= \int \frac{2z^3 dz}{z^2 - z} = 2 \int \frac{z^2 dz}{z-1} = \\ &= 2 \int \left(z+1 + \frac{1}{z-1} \right) dz = (z+1)^2 + 2 \ln |z-1| + C = \\ &= \left(1 + \sqrt[4]{2x-1} \right)^2 + \ln \left(\sqrt[4]{2x-1} - 1 \right)^2 + C. \end{aligned}$$

Найти интегралы:

✓ 1315. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx.$

1316. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{ax+b}}.$

✓ 1317. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^4}}.$

✓ 1318. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

✓ 1319. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$

✓ 1320. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx.$

✓ 1321. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx.$

✓ 1322. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

✓ 1323. $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$

✓ 1324. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$

1325. $\int \frac{x+3}{x^2 \sqrt{2x+3}} dx.$

2°. Интегралы вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \quad (2)$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n .

Полагают

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (3)$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами и λ — число.

Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ находятся при помощи дифференцирования тождества (3).

Пример 2. $\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx = \int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2+4}} dx =$

$$= (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \sqrt{x^2+4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$