

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } \int \cos^2 3x \sin^4 3x dx &= \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx = \\ &= \int \frac{\sin^2 6x}{4} \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x \right) dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18} \sin^3 6x \right) + C. \end{aligned}$$

3) Если $m = -\mu$ и $n = -\nu$ — целые отрицательные числа одинаковой четности, то

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int \frac{dx}{\sin^\mu x \cos^\nu x} = \int \operatorname{cosec}^\mu x \sec^{\nu-2} x d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \right)^{\frac{\mu}{2}} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}} d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}}{\operatorname{tg}^{\mu} x} d(\operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

В частности, к этому случаю сводятся интегралы

$$\int \frac{dx}{\sin^\mu x} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^\mu \frac{x}{2} \cos^\mu \frac{x}{2}} \text{ и } \int \frac{dx}{\cos^\nu x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^\nu \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 3. } \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \sec^2 x d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 4. } \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \frac{1}{2^3} \int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \int \operatorname{tg}^{-3} \frac{x}{2} \sec^6 \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^3}{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \frac{2}{8} \int \left[\operatorname{tg}^{-3} \frac{x}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2} \right] + C. \end{aligned}$$

4) Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$ (или $\int \operatorname{ctg}^m x dx$), где m — целое положительное число, вычисляются с помощью формулы

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

(или соответственно $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$).

$$\begin{aligned} \text{Пример 5. } \int \operatorname{tg}^4 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \operatorname{tg}^2 x dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

5) В общем случае интегралы $I_{m,n}$ вида (1) вычисляются с помощью формул понижения, выводимых обычно интегрированием по частям.

$$\begin{aligned} \text{Пример 6. } \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \\ &= \int \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \\ &= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C. \end{aligned}$$

Найти интегралы:

$$1338. \int \cos^3 x dx.$$

$$1339. \int \sin^3 x dx.$$

$$1340. \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

$$1341. \int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx.$$

$$1342. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$1343. \int \sin^4 x dx.$$

$$1344. \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$1345. \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

$$1346. \int \cos^3 3x dx.$$

$$1347. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

$$1348. \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

$$1349. \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx.$$

$$1350. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}.$$

$$1351. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$$

$$1352. \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}.$$

$$1353. \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x} dx.$$

$$1354. \int \frac{dx}{\sin^5 x}.$$

$$1355. \int \sec^5 4x dx.$$

$$1356. \int \operatorname{tg}^2 5x dx.$$

$$1357. \int \operatorname{ctg}^3 x dx.$$

$$1358. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$1359. \int \left(\operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4} \right) dx.$$

$$1360. \int x \sin^2 x^2 dx.$$

$$1361. \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$1362. \int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx.$$

$$1363. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^2 x}}.$$

$$1364. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

См. пример 5