2°. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$ и $\int \cos mx \cos nx\, dx$. В этих случаях применяются формулы:

1) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$;

2) $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$;

3) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$.

Пример 7. $\int \sin 9x \sin x\, dx = \int \frac{1}{2}[\cos 8x - \cos 10x]\, dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$.

Найти интегралы:

1365. $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$.

1366. $\int \sin 10x \sin 15x\, dx$.

1367. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$.

1368. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\, dx$.

1369. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\, dx$.

1370. $\int \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)\, dt$.

1371. $\int \cos x \cos^2 3x\, dx$.

1372. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx$.

3°. Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{2}$$

где R — рациональная функция.

1) С помощью подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

откуда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

интегралы вида (2) приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t.

Пример 8. Найти

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = I.$$

Решение. Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, будем иметь:

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2) Если имеет место тождество

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то для приведения интеграла (2) к рациональному виду можно употреблять подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Здесь

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

и

$$x = \operatorname{arctg} t,\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 9. Найти

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = I. \tag{3}$$

Решение. Полагая

$$\operatorname{tg} x = t,\quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

будем иметь:

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$$

Заметим, что интеграл (3) вычисляется более быстро, если предварительно числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^2 x$.

В отдельных случаях полезно применять искусственные приемы (см., например, 1379).

Семинар 6

Найти интегралы:

1373. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

1374. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

1375. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx$.

1376. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\, dx$.

1377. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

1378. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.

1379**. $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\, dx$.

1380. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\, dx$.

1381*. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

1382*. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

1383*. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

1384*. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$.

1385. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\, dx$.

1386. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$.

1387. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\, dx$.

1388. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}\, dx$.

1389*. $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$.

1390*. $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\, dx$.