1596. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

1597. Показать, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

1598. Показать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

§ 5. Интегрирование по частям

Если функция $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

1599. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$

1600. $\int_1^e \ln x\,dx.$

1601. $\int_0^1 x^3 e^{2x}\,dx.$

1602. $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx.$

1603. $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx.$

1604. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a > 0).$

1605. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a > 0).$

1606.** Показать, что для гамма-функции (см. № 1575) справедлива формула понижения:

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \qquad (p > 0).$$

Отсюда вывести, что $\Gamma(n+1) = n!$, если n — натуральное.

1607. Показать, что для интеграла

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

справедлива *формула понижения*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Найти I_n, если n — натуральное. Пользуясь полученной формулой, вычислить I_9 и I_{10}.

1608. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить интеграл (см. № 1574)

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

где p и q — целые положительные числа.

1609*. Выразить через B (бэта-функцию) интеграл

$$I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx,$$

если m и n — целые неотрицательные числа.

§ 6. Теорема о среднем значении

1°. Оценки интегралов. Если $f(x) \leqslant F(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$ и, кроме того, $\varphi(x) \geqslant 0$, то

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad (2)$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В частности, если $\varphi(x) \equiv 1$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (3)$$