Неравенства (2) и (3) можно соответственно заменить эквивалентными им равенствами:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a),$$

где c и ξ — некоторые числа, лежащие между a и b.

Пример 1. Оценить интеграл

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx.$$

Решение. Так как $0\leqslant \sin^2 x\leqslant 1$, то имеем:

$$\frac{\pi}{2}<I<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

т. е.

$$1{,}57<I<1{,}91.$$

2°. Среднее значение функции. Число

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$.

1610*. Не вычисляя интегралов, определить их знак:

а) $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$;

б) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1611. Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

а) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ или $\int_0^1 x\,dx$;

б) $\int_0^1 x^2\sin^2 x\,dx$ или $\int_0^1 x\sin^2 x\,dx$;

в) $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ или $\int_1^2 e^x\,dx$.

Найти средние значения функций на указанных промежутках:

1612. $f(x)=x^2$, $\quad 0\leqslant x\leqslant 1$.

1613. $f(x)=a+b\cos x$, $\quad -\pi\leqslant x\leqslant \pi$.

1614. $f(x)=\sin^2 x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$.

1615. $f(x)=\sin^4 x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$.

1616. Доказать, что $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ заключен между $\frac{2}{3}\approx 0{,}67$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}70$. Найти точное значение этого интеграла.

Оценить интегралы:

1617. $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$.

1618. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{8+x^3}$.

1619. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

1620*. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

1621. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1622. Интегрируя по частям, доказать, что

$$0<\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx<\frac{1}{100\pi}.$$

§ 7. Площади плоских фигур

1°. Площадь в прямоугольных координатах. Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$ $[f(x)\geqslant 0]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями в точках $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a\leqslant x\leqslant b$ (черт. 40), определяется формулой

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=\frac{x^2}{2}$, прямыми $x=1$ и $x=3$ и осью абсцисс (черт. 41).