

1596. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

1597. Показать, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

1598. Показать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

§ 5. Интегрирование по частям

Если функция $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx. \quad (1)$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

$$1599. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

$$1600. \int_1^e \ln x dx.$$

$$1601. \int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$$

$$1602. \int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$$

$$1603. \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

$$1604. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

$$1605. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0).$$

1606**. Показать, что для гамма-функции (см. № 1575) справедлива формула понижения:

$$\Gamma(p+1) = p \Gamma(p) \quad (p > 0).$$

Отсюда вывести, что $\Gamma(n+1) = n!$, если n — натуральное,

1607. Показать, что для интеграла

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

справедлива формула понижения

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Найти I_n , если n — натуральное. Пользуясь полученной формулой, вычислить I_9 и I_{10} .

1608. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить интеграл (см. № 1574)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

где p и q — целые положительные числа.

1609*. Выразить через B (бэта-функцию) интеграл

$$I_{n, m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx,$$

если m и n — целые неотрицательные числа.

§ 6. Теорема о среднем значении

1°. Оценки интегралов. Если $f(x) \leq F(x)$ при $a \leq x \leq b$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b F(x) dx. \quad (1)$$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leq x \leq b$ и, кроме того, $\varphi(x) \geq 0$, то

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (2)$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В частности, если $\varphi(x) \equiv 1$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (3)$$